Un calcul direct de l'effet Doppler-Fizeau relativiste

JEAN REIGNIER

Département de Mathématiques ULB - CP 217, Campus de la Plaine
Université Libre de Bruxelles, 1050 Bruxelles
E-mail : jreignier@ulb.ac.be

ABSTRACT. I propose an alternative proof of Einstein's Doppler-Fizeau relativistic formula. It is valid for any periodical signal that propagates with the velocity of light. The formula is asymptotic in a parameter proportional to the ratio of the displacement during one period to the distance source-observer.

RESUME. Je propose une démonstration alternative de la formule d'Einstein pour l'effet Doppler-Fizeau relativiste. Elle concerne un signal périodique de forme quelconque se propageant à la vitesse de la lumière. Elle est asymptotique en un paramètre proportionnel au rapport du déplacement relatif pendant une période à la distance source-observateur.

1 Introduction

L'effet Doppler-Fizeau relativiste a été calculé par Albert Einstein dans son mémoire fondamental de juin 1905 [1]. Ce calcul est empreint de l'esprit relativiste et extrêmement simple dans son développement. J'en rappelle l'essentiel.

Einstein considère l'émission en continu d'une onde électromagnétique monochromatique par une source placée très loin des observateurs en sorte que le signal est représenté par une onde plane monochromatique. Deux observateurs sont en mouvement rectiligne uniforme (MRU) l'un par rapport à l'autre; on fait les conventions habituelles afin que leurs coordonnées soient reliées par la transformation de Lorentz (1). (La direction du MRU définit les axes x et x' des référentiels K et K', le temps a été fixé par la méthode de synchronisation de Poincaré-Einstein, les systèmes d'axes cartésiens coïncident à l'instant $t = t' = 0$; la vitesse de la lumière est prise comme unité de vitesse: $c = 1$).

$$\begin{aligned} x' &= k\,(x + v\,t) & \qquad x &= k\,(x' - v\,t') \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \\ t' &= k\,(t + v\,x) & t &= k\,(t' - v\,x') \end{aligned} \tag{1}$$

v est la vitesse relative des référentiels et $k = (1 - \mathrm{v}^2)^{-1/2}$.

On suppose que la source est au repos dans le plan (x , y) du système *K*, dans la direction faisant un angle θ avec l'axe x ; la fréquence d'émission est ν. Le signal reçu par l'observateur *O* localisé à l'origine du système *K* (et par tout autre observateur au repos dans ce système et suffisamment proche de l'origine pour voir la source dans la même direction θ) est de la forme:

$$\Phi = A \sin 2\pi\nu\ (\ t + x \cos\theta + y \sin\theta + \varphi\ )\ , \tag{2}$$

la phase φ et l'amplitude A étant quelconques. (N.B. comme c = 1, les valeurs numériques de la fréquence ν et de la grandeur du vecteur d'onde sont égales et la longueur d'onde λ est égale à $1/\nu$). De même, l'observateur *O'* localisé à l'origine du système *K'* (et tout autre observateur au repos dans ce système et suffisamment voisin de *O'* pour voir la source dans la même direction θ') reçoit un signal de la forme:

$$\Phi' = A' \sin 2\pi\nu'\ (\ t' + x' \cos\theta' + y' \sin\theta' + \varphi'\ ). \tag{3}$$

Il résulte des lois de transformation relativiste des champs électromagnétiques que la phase d'un tel signal est un invariant relativiste, de sorte que l'on doit avoir :

$$\nu'\ (\ t' + x' \cos\theta' + y' \sin\theta' + \varphi') = \nu\ \ (\ t + x \cos\theta\ +\ y \sin\theta\ + \varphi\ ), \tag{4}$$

pour tout t, tout x et tout *y*, et les variables correspondantes t', x', y', ainsi que définies par la transformation de Lorentz. Il en résulte immédiatement que $\nu\varphi = \nu'\varphi'$, et les trois relations suivantes, qui donnent la correspondance des angles d'observation et des fréquences observées:

$$\sin\theta' = \frac{\sin\theta}{k(1 - \mathrm{v}\cos\theta)} \tag{5}$$

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \mathrm{v}}{1 - \mathrm{v}\cos\theta} \tag{6}$$

$$\nu' = \nu k(1 - \mathrm{v}\cos\theta) = \frac{\nu}{k}\,\frac{1}{1 + \mathrm{v}\cos\theta'} \tag{7}$$

Il est à noter que les relations (5) et (6) peuvent aussi s'obtenir directement par la cinématique relativiste d'un corpuscule de vitesse c. La formule (7) est la relation Doppler-Fizeau d'Einstein; elle est ici écrite de deux façons, selon que l'on utilise l'angle du système de la source θ ou celui du système du récepteur θ'.

On ne peut qu'admirer l'élégance et la simplicité de cette démonstration. Cependant, étant donné qu'elle repose sur le modèle idéal d'une onde plane monochromatique, il est légitime de s'interroger sur son applicabilité à des phénomènes périodiques dont le signal électromagnétique diffère du modèle. La formule est-elle applicable à la fréquence de l'éclair lumineux périodique d'un pulsar ? Qu'en est-il d'un effet de distance finie de l'émetteur ? Dans les conditions expérimentales du laboratoire, les ions émetteurs se meuvent effectivement à distance finie (variable) du détecteur. On peut aussi remarquer que la démonstration diffère profondément de l'analyse du phénomène Doppler pour la propagation du son [2]. Cette analyse se fait généralement à partir d'un signal de forme quelconque, régulièrement répété avec une période *T*, émis par une source S située à distance finie des observateurs. Le résultat porte sur la période *T* du phénomène et contient une estimation asymptotique de l'effet de distance. La seule considération d'une onde plane limiterait l'applicabilité des formules Doppler sonores aux cas de la fréquence pure de diapasons lointains, en écartant les cas de bruits simplement répétitifs, par exemple le tac tac d'une mitrailleuse.

Je vais montrer que l'on peut obtenir la formule Doppler-Fizeau d'Einstein en s'inspirant de la démonstration de l'effet Doppler sonore. Bien entendu, il existe une différence fondamentale entre les deux cas: l'approche relativiste ne peut contenir que le concept de vitesse relative source-observateur. Il n'est pas question d'introduire un milieu ambiant assurant la propagation du signal, ce qui oblige à distinguer deux cas, selon que c'est la source ou alternativement l'observateur qui est en mouvement par rapport à ce milieu. Il n'y a ici pas de place pour un éther ! (Sauf à déclarer comme H. Poincaré que dans une théorie relativiste 'chacun peut à bon droit se croire au repos par rapport à l'éther', ce qui n'est évidemment qu'une manière déguisée de l'éliminer).

2 Le problème et sa formalisation

Une source *S* émet des signaux lumineux de période *T*. Si un observateur (un récepteur *R*) est au repos par rapport à cette source, ces signaux lui arrivent avec un certain retard (qui dépend de sa distance à *S*) mais bien évidemment avec la même période *T* que celle de l'émission. Si un autre observateur (récepteur *R'*) est en MRU par rapport à *S*, il reçoit de même ces signaux avec un certain retard qui dépend de sa distance à *S* (laquelle distance est maintenant variable) et il enregistre leur réception avec une période modifiée *T'*. Le calcul de l'effet Doppler-Fizeau vise à estimer cette période *T'* en fonction de *T* et de l'angle θ' entre la direction du MRU et la direction d'observation, *à l'approximation* où l'on peut négliger les variations de la distance *R'S* et de l'angle θ' sur un intervalle de temps de l'ordre de la période *T*.

J'adopte les conventions ci-dessus pour les référentiels respectifs de la source *S* (référentiel *K*) et de l'observateur *R'* (référentiel *K'*). Les coordonnées cartésiennes de la source sont respectivement $(x_S, y_S, 0)$ *fixes dans K* et $(x'_S y'_S, 0)$ *variables dans K'*, le lien étant donné par la transformation de Lorentz. Le récepteur *R'* est fixé sur l'axe x', en un point de coordonnées $(x'_{R'}, 0, 0)$.

S émet un premier signal au temps t_1. C'est l'événement "1", représenté dans *K* par les coordonnées $(x_1, y_1, z_1, t_1) = (x_S, y_S, 0, t_1)$ et dans *K'* par son transformé de Lorentz $(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) = (x'_S(t_1), y'_S, 0, t'_1)$. La lumière (l'éclair lumineux, le photon, l'onde, ce que l'on veut) se propage dans tous les référentiels inertiels à la même vitesse *c = 1*. Le signal atteint donc le détecteur *R'* à l'instant $t'_1 + d'_1$ où d'_1 est la distance cartésienne calculée dans *K'* entre le récepteur *R'* et la source *S au moment de l'émission de ce premier signal* :

$$d'_1 = \sqrt{(x'_S(t_1) - x'_{R'})^2 + (y'_S)^2)} \tag{8}$$

(Rappelons que $y'_S = y_S$ = Cte et que $y'_R = 0$ puisque nous convenons de placer le récepteur sur l'axe *x'*).

Le même scénario se reproduit pour le signal suivant, émis au temps $t_2 = t_1 + T$. Cette deuxième émission est l'événement "2", représenté dans *K* par les coordonnées*:* $(x_2, y_2, z_2, t_2) = (x_S, y_S, 0, t_2)$ et dans *K'* par son transformé de Lorentz $(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) = (x'_S(t_2), y'_S, 0, t'_2)$. Le signal atteint donc le détecteur *R'* à l'instant $t'_2 + d'_2$ où d'_2 est la distance cartésienne calculée dans K' entre le récepteur *R'* et la source *S au moment de l'émission de ce deuxième signal* :

$$d'_2 = \sqrt{(x'_S(t_2) - x'_{R'})^2 + (y'_S)^2)} \qquad (9)$$

L'intervalle de temps entre les deux réceptions est la période *T'* observée par *R'*:

$$T' = (t'_2 - t'_1) + (d'_2 - d'_1). \qquad (10)$$

Dans le cadre habituel du calcul de l'effet Doppler-Fizeau, cette période doit être évaluée à l'approximation où le changement de la distance d' durant l'intervalle de temps T reste petit devant cette distance, c'est-à-dire à l'ordre le plus bas significatif en un paramètre d'approximation: $\varepsilon = kvT/d'$.

3 Calcul

Le premier terme est directement donné par la transformation de Lorentz des temps t_1 et t_2 pour un même point source x_S ; c'est la dilatation du temps:

$$t'_2 - t'_1 = k\,(t_2 - t_1) = k\,T. \qquad (11)$$

Le deuxième terme doit être calculé approximativement, à l'ordre le plus bas significatif en le paramètre d'approximation ε, en explicitant le fait que:

$$x'_S(t_2) = k(x_S + vt_2) = k(x_S + vt_1 + vT) = x'_S(t_1) + kvT. \qquad (12)$$

On a:

$$d'_2 = \sqrt{(x'_S(t_1) + kv\text{-}x'_{R'})^2 + (y'_S)^2}$$
$$d'_2 = \sqrt{(d'_1)^2 + 2(x'_S(t_1)\text{-}x'_{R'})kvT + (kvT)^2}$$
$$d'_2 = d'_1 \sqrt{1 + 2\,\frac{x'_S(t_1)\text{-}x'_{R'}}{d'_1}\,\frac{kvT}{d'_1} + \left(\frac{kvT}{d'_1}\right)^2} \tag{13}$$
$$d'_2 = d'_1 \left[1 + \frac{kvT}{d'_1}\cos\theta'_1 + O(\varepsilon^2) \right]$$

Le deuxième terme vaut donc :

$$(d'_2 - d'_1) = k\ v\ T \cos\theta' + O(\varepsilon), \tag{14}$$

où l'on a, bien entendu, écrit au même ordre d'approximation que l'angle d'observation θ' n'est pas changé sur une période.

La période T' mesurée par l'observateur *R'* est donc:

$$T' = kT\ (\ 1 + v \cos\theta') \tag{15}$$

à des corrections d'ordre O(ε) près. Passant aux fréquences par $\nu = 1 / T$, on retrouve bien la formule Doppler-Fizeau obtenue par Einstein:

$$\nu' = \frac{\nu}{k}\,\frac{1}{1 + v\cos\theta'} = \nu k(1 - v\cos\theta) \tag{16}$$

Elle est maintenant établie pour un signal périodique de forme quelconque, sous la seule condition qu'il se propage à la même vitesse c dans tous les référentiels inertiels (signaux électromagnétiques ou gravitationnels), et à l'ordre le plus bas en un paramètre d'approximation $\varepsilon = kvT/d'$.

Références

[1] Albert Einstein, "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", *Ann. d. Phys.*, **17**, 891-921, 1905.

[2] Georges Bruhat, Cours de Physique Générale : Mécanique, § 395-396, Masson & Cie, Editeurs, (1948).

(Manuscrit reçu le 18 juin 2007)