Effets gravitationnels des champs électromagnétiques intenses

Pierre Marx

102, les bois du cerf, F – 91450 Etiolles, France
email: marx.p@wanadoo.fr

RESUME. En présence d'un champ e.m., la métrique du 4-espace est affectée par les potentiels du champ. Le principe de superposition, auquel obéit habituellement le champ e.m., n'est alors plus valable pour les champs très élevés et les équations de Maxwell, *pour le champ libre*, ont un second membre en général non nul. Pour les potentiels faibles, la métrique est très voisine de la métrique euclidienne *i.e.* le champ de gravitation est négligeable. Il faut des potentiels et des champs e.m. très intenses pour créer un champ de gravitation mesurable et encore plus pour mettre en défaut le principe de superposition. Dans ce dernier cas, le tenseur énergie-impulsion du champ e.m. doit être modifié et la linéarisation des équations d'Einstein n'est plus possible.

ABSTRACT. In the presence of an electromagnetic field, the space-time metrics is affected by the field potential. The principle of superposition, which rules e.m. field usually, is no more valid for biggest fields and Maxwell's equations, for free field, have generally a right-hand side different from zero. For weak potentials, the metrics is very close to euclidean metrics i.e. the gravitational field is negligible. Very high e.m. potentials and fields are necessary to create a measurable gravitational field and even higher to get false the principle of superposition. In this last case, the energy-impulsion tensor of the e.m. field has to be modified and the linearization of Einstein's equations is no more possible.

1 Introduction

Selon la théorie de la relativité générale, toute source d'énergie (matière ou champ) crée un champ de gravitation. C'est donc le cas de l'énergie e.m. Mais, comparés à ceux de la matière, les effets gravitationnels des champs e.m. usuels sont extrêmement faibles et sont très loin d'être mesurables comme on le verra plus loin. C'est probablement la raison pour laquelle cette question n'intéresse pas la physique contemporaine et semble n'avoir été traitée nulle part.

Toutefois, on ne peut pas exclure qu'un jour, on sache amplifier ou cumuler ces effets pour créer un champ de gravitation appréciable à l'échelle macroscopique. Les expériences sur des disques supraconducteurs faites par E. Podkletnov, M. Nadjar et consorts, si elles s'avéraient probantes (ce qui ne semble pas le cas actuellement) pourraient s'interpréter de cette manière.

C'est dans cette perspective, peut-être illusoire, que se place cet article.

2 Gravitation et principe de superposition

2.1 Validité du principe de superposition

La propriété du champ électromagnétique (e.m.) dans le vide d'obéir au principe de superposition est un fait expérimental. Toutefois, il n'existe aucun système physique où l'effet (ici l'induction) est proportionnel à la cause (ici le champ) quelle que soit son intensité. On est en droit de penser, soit que le principe de superposition n'a pas été validé pour des champs très élevés, soit que les champs susceptibles d'invalider le principe n'ont jamais été observés ou encore qu'ils sont si intenses qu'on ne sait les produire.

Pour ces raisons, la théorie classique du champ e.m. est basée sur le principe de superposition lequel implique que les équations différentielles régissant le champ ($2^{\grave{e}me}$ groupe des équations de Maxwell) doivent être linéaires ([1], §27). Ce fait, joint à celui de la non-univocité des potentiels, définit le lagrangien comme une forme quadratique des composantes du champ:

$$\Lambda = -\frac{\varepsilon_0}{4} F^{kl} F_{kl} = -\frac{\varepsilon_0}{4} \left(g^{ik} g^{jl} \right) F_{ij} F_{kl} \tag{1}$$

où les quantités $g^{ik} g^{jl}$, coefficients de la forme, sont des données au point considéré. On obtient ainsi les équations de l'électrodynamique dans l'espace de Minkowski en coordonnées galiléennes ([1], §30) ou en coordonnées curvilignes [1], §90) associées, soit à un simple changement de coordonnées sans changement de la métrique, soit à un champ de gravitation non dû au champ e.m.[1]

Ainsi, la linéarité des équations de Maxwell implique que le tenseur métrique ne dépend pas du champ e.m. alors que la relativité générale prévoit le contraire. La raison en est justement que les effets gravitationnels ne sont significatifs que pour des champs e.m. très intenses. On peut donc penser que, dans le vide, *le principe de superposition s'applique aux champs e.m. dans un domaine probablement très étendu mais néanmoins fini.*

2.2 Hypothèse

Pour prendre en compte le fait que le champ e.m. engendre un champ de gravitation ([1], §95) et donc que la métrique est affectée par le champ, il faut ajouter dans l'expression classique de la variation du lagrangien $\Lambda\sqrt{-g}$ pour le champ libre:

$$\delta\,\left(\Lambda\sqrt{-g}\right) = \frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial A_{k,\,l}}\delta A_{k,\,l},$$

un terme représentant la variation des coefficients de la métrique, soit:

$$\delta\left(\Lambda\sqrt{-g}\right) = \frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial g^{ij}}\delta g^{ij} + \frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial A_{k,\,l}}\delta A_{k,\,l} \tag{2}$$

Pour rendre l'action stationnaire, il faut relier la métrique au champ e.m. Pour ce faire, on propose de rapprocher l'expression précédente de celle, générale, de la variation du lagrangien:

$$\delta\,\left(\Lambda\sqrt{-g}\right) = \frac{\partial\,\Lambda\sqrt{-g}}{\partial\,A_k}\delta A_k + \frac{\partial\,\Lambda\sqrt{-g}}{\partial\,A_{k,\,l}}\delta A_{k,\,l} \tag{3}$$

qui suggère de poser: $\delta g^{ij} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial A_k}\delta A_k$

D'où l'hypothèse:

" En présence d'un champ électromagnétique, la métrique de l'espace-temps est fonction des potentiels du champ ".

---

[1] Les inductions électrique D et magnétique $\boldsymbol{B}$ sont alors liées aux champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ par les relations ([[1], §90) :
$D = \frac{E}{\sqrt{g_{00}}} + H \times g$; $B = \frac{H}{\sqrt{g_{00}}} + g \times E$
où $\boldsymbol{g}$ est le vecteur tridimensionnel de composantes$g^{\alpha} = -g^{0\alpha}$.

Dans ces conditions, les coefficients g^{ij} sont des fonctions des coordonnées géométriques x^l, d'une part *via* les coordonnées généralisées A_k, d'autre part du fait d'éventuelles autres formes d'énergie (i.e. autres sources de gravitation) ou si le 4-espace est plan et rapporté à des coordonnées curvilignes. On pose donc:

$$g^{ij}\left(x^l\right) = g^{ij}\left[A_k\left(x^l\right), x^l\right] \tag{4}$$

Du point de vue de la relativité générale, on ne restreint pas la généralité des équations d'Einstein. Le champ de gravitation, c'est-à-dire la métrique, est défini par l'ensemble des formes d'énergie en présence. Simplement, la part due au champ e.m. est, selon notre hypothèse, définie par les potentiels du champ.

Justification

Dans l'espace de configuration d'un système physique, l'énergie cinétique peut dépendre des coordonnées généralisées *via* les coefficients de cette forme ([1], §5). cette possibilité peut s'appliquer au lagrangien du champ e.m., forme quadratique des vitesses généralisées (composantes covariantes du tenseur de Faraday):

$$\Lambda = -\frac{\varepsilon_0}{4} F^{kl} F_{kl} = -\frac{\varepsilon_0}{4} g^{ik} g^{jl} F_{ij} F_{kl} \tag{5}$$

Ce n'est pas le cas en théorie classique où les coefficients $g^{ik}g^{jl}$ ne dépendent que des coordonnées géométriques, lesquelles ne varient pas lorsqu'on fait varier le lagrangien du champ.

D'un point de vue formel, cette situation est analogue à celle qui détermine la trajectoire d'une particule libre à partir du lagrangien:$L = -m\, cds/dt$ ([1], §87) selon que l'on est dans l'espace plan en coordonnées galiléennes ou non. La différence porte sur les variables de position: potentiels pour le champ e.m., coordonnées géométriques pour la particule.

Enfin, d'un point de vue mathématique, il ne s'agit que d'un changement de variables. Les 10 fonctions indépendantes g^{ij} sont, pour la part qui relève du champ e.m., des fonctions des 4 coordonnées généralisées A_k, les quelles sont des fonctions des 4 coordonnées géométriquesx^l.

2.3 Principe d'équivalence

Les dérivées totales des coefficients de la métrique par rapport aux coordonnées géométriques s'écrivent:

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^l} = A_{k,l}\left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial A_k}\right)_{M\,\text{donné}} + \left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^l}\right)_{A\,\text{donné}} \tag{6}$$

Le 1^{er} terme représente la variation de la métrique due au 4-potentiel A en un point donné, le $2^{\text{ème}}$ englobe la variation de la métrique du fait de la présence d'autres formes d'énergie et celle des coefficients de la métrique (à métrique donnée) si le 4-espace est rapporté à des coordonnées curvilignes:

- pour des potentiels faibles, seul subsiste le $2^{\text{ème}}$ terme. En l'absence d'autres sources de gravitation, l'espace est plan et il est toujours possible de le rapporter à des coordonnées galiléennes.
- les valeurs élevées des potentiels du champ e.m. engendrent un champ de gravitation (1^{er} terme).

Vis-à-vis de la métrique, les deux termes jouent un rôle équivalent conformément au principe fondamental de la relativité générale. En particulier, il est toujours possible d'annuler localement le champ de gravitation dans un repère accéléré.

2.4 Equations de Maxwell modifiées

Il résulte de ce qui précède, qu'en un point de coordonnées x^l données, la variation du lagrangien s'écrit:

$$\delta\,\left(\Lambda\sqrt{-g}\right) = \frac{\partial\,\Lambda\sqrt{-g}}{\partial\,g^{ij}}\frac{\partial g^{ij}}{\partial A_k}\delta A_k + \frac{\partial\,\Lambda\sqrt{-g}}{\partial\,A_{k,\,l}}\delta A_{k,\,l} \tag{7}$$

ou en introduisant le TEI du champ e.m. ([1], §94):

$$\delta\,\left(\Lambda\sqrt{-g}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\;\tau_{ij}\frac{\partial g^{ij}}{\partial A_k}\delta A_k + \frac{\partial\,\Lambda\sqrt{-g}}{\partial\,A_{k,\,l}}\delta A_{k,\,l} \tag{8}$$

D'où les équations de Maxwell pour le champ libre:

$$\varepsilon_0 D_l F^{kl} = \frac{1}{2}\tau_{ij}\frac{\partial g^{ij}}{\partial A_k} \tag{9}$$

Nota: il s'ensuit que les dérivées $\partial g^{ij}/\partial A_k$ sont les composantes d'un tenseur.

Ainsi, *les équations de Maxwell pour le champ e.m. libre ont en général un second membre non nul, toutefois totalement négligeable pour les champs usuels.*

Densité de courant électrogravitationnel

Par analogie avec les équations de Maxwell pour le champ en présence de charges: $\varepsilon_0 D_l F^{kl} = -\frac{1}{c} j^k$ ou j est la 4-densité de courant électrique, on pose:

$$-\frac{1}{c} f^k = \frac{1}{2} \tau_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial A_k} \tag{10}$$

On propose d'appeler le quadrivecteur f : "*4-densité de courant électrogravitationnel*" ou, pour abréger, "*4-densité de ceg*".

Comme la 4-densité de courant électrique, la 4-densité de ceg satisfait à la loi de conservation de la charge:

$$D_k f^k = -c\varepsilon_0 D_k \left(D_l F^{kl} \right) \equiv 0 \tag{11}$$

Discussion

Dans le cas classique, le champ e.m. et les potentiels dont il dérive sont trop faibles pour engendrer un champ de gravitation appréciable. Alors $f \approx 0$. On retrouve les équations de Maxwell classiques où s'applique le principe de superposition.

Il y a deux autres cas où le second membre des équations (3) est nul:

- le 4-potentiel est très élevé mais quasi uniforme. Les dérivées $A_{k,l}$ sont nulles ou très petites de sorte que le champ e.m. et le TEI associé sont quasi nuls. Bien que les quantités $\partial g^{ij} / \partial A_k$ ne soit pas nulles, les dérivées: $\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^l} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial A_k} \frac{\partial A_k}{\partial x^l}$ sont nulles ou très petites de sorte qu'il n'y a pas ou très peu de gravitation,
- ni les $\partial g^{ij} / \partial A_k$ ni les τ_{ij} ne sont tous nuls mais leur produit est nul. Il y donc du champ EM et de la gravitation.

3 Potentiels de gravitation pour un champ e.m. faible

3.1 Préliminaires

Continuité de la métrique

Les potentiels gravitationnels (les coefficients de la métrique) étant supposés déterminés par le 4-potentiel A lorsque celui-ci est très élevé, on doit tendre vers la métrique euclidienne (espace de Minkowski caractérisé par l'absence de gravitation) pour les faibles valeurs de ce dernier (en supposant que le champ e.m. est la seule forme d'énergie en présence).

Une première question est de savoir si on passe de la métrique dépendant de A à la métrique euclidienne de manière continue ou discontinue:

- dans le premier cas, la métrique tend continûment vers la métrique euclidienne quand A tend vers 0, soit: $A \to 0 \Rightarrow g_{ij} \to g_{ij}^{(0)}$où les $g_{ij}^{(0)}$ sont les coefficients de la métrique euclidienne dans un système de coordonnées quelconques.
- dans le second cas, il existe un 4-potentiel $A^{(0)}$ pour lequel s'effectue la transition:

$$A^2 < A^{(0)2} \Rightarrow g_{ij} = g_{ij}^{(0)} \; ; \; A^2 \geq A^{(0)2} \Rightarrow g_{ij} = g_{ij}\left(A_k\right) \tag{12}$$

De même, les équations de Maxwell avec second membre doivent redonner les équations classiques sans second membre lorsque le principe de superposition s'applique. Comme précédemment, deux cas sont possibles:

- ou le second membre tend continûment vers 0 quand A tend vers 0. Alors, le TEI du champ e.m. n'étant pas nul pour les faibles valeurs du champ, ce sont les $\partial g_{ij}/\partial A_k$qui tendent vers 0 quand A tend vers 0:

$$A \to 0 \Rightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial A_k} \to 0 \tag{13}$$

- ou il existe un 4-potentiel $A^{(0)}$ pour lequel s'effectue la transition:

$$A < A^{(0)} \Rightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial A_k} = 0 \; ; \; A \geq A^{(0)} \Rightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial A_k} \neq 0 \tag{14}$$

L'hypothèse la plus simple est que les équations d'Einstein s'appliquent quel que soit le niveau d'énergie-impulsion en présence. Simplement le champ de gravitation engendré n'est décelable qu'à des niveaux extrêmement élevés.

Il s'ensuit que les coefficients de la métrique et leurs dérivées premières par rapport aux composantes de A doivent être des fonctions continues. On a donc:

$$A \to 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} g_{ij} \to g_{ij}^{(0)} \\ \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial A_k} \to 0 \end{array} \right. \tag{15}$$

Equations d'Einstein

Etant donné que la métrique est fonction des potentiels du champ e.m., elle doit fournir les équations d'Einstein pour un champ e.m. pur, à savoir ([1], §95):

$$E_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - g_{ik}\mathcal{L}' = \frac{8\pi\, G}{c^4}\tau_{ik} \tag{16}$$

Inversement, on doit pouvoir déterminer la métrique en intégrant ces équations.

La constante cosmologique, notée ici[2] $\mathcal{L}'$, peut figurer au 1^{er} membre (terme: $-g_{ik}\mathcal{L}'$) ou au second sous la forme: $+g_{ik}\mathcal{L}' = +g_{ik}\frac{c^4}{8\pi\, G}\mathcal{L}$, selon l'interprétation que l'on en fait (géométrique ou physique).

τ est le TEI du champ e.m. de composantes:

$$\tau_{ik} = -\varepsilon_0 F_i^{\ l} F_{kl} - g_{ik}\Lambda \tag{17}$$

ce qui limite la validité des équations d'Einstein précédentes aux champs e.m. faibles. En effet, la 4-divergence de τ n'est nulle (condition que doit remplir le tenseur du $2^{ème}$ membre des équations d'Einstein) que si la 4-divergence du tenseur de Faraday est elle-même nulle (équations de Maxwell sans second membre), ce qui, selon notre hypothèse, n'est pas le cas pour le champ e.m. très intense (cf. §3).

Démarche proposée

Il apparaît difficile d'intégrer les équations d'Einstein dans le cas le plus général. C'est pourquoi on s'est limité ici à des cas particuliers. On en a choisi deux parmi les champs usuels:

- le champ électrostatique uniforme, le plus simple des champs e.m.
- une onde progressive plane polarisée rectilignement, élément de base de la représentation d'un champ e.m. pur.

Pour les champs usuels, le champ de gravitation est extrêmement faible de sorte qu'on peut considérer que la métrique associée est quasiment euclidienne. En s'inspirant de la méthode utilisée pour les ondes gravitationnelles ([1], §102) où l'on est dans le même cas, on

[2]Elle est habituellement notée Λ. On la note ici $\mathcal{L}$, réservant la notation Λ au lagrangien du champ e.m.

pose: $g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}$ où les $g_{ik}^{(0)}$ sont les composantes du tenseur métrique dans un référentiel orthonormé ($g_{00}^{(0)} = 1$; $g_{\alpha\alpha}^{(0)} = -1$; $g_{ij}^{(0)} = 0$ pour $i \neq j$; $g^{(0)} = -1$) et les h_{ik} les petites corrections qui déterminent le champ de gravitation.

En effectuant le changement de variable:

$$\psi_k^l = h_k^l - \frac{1}{2}\delta_k^l h \Leftrightarrow h_k^l = \psi_k^l - \frac{1}{2}\delta_k^l \psi \tag{18}$$

les composantes du tenseur d'Einstein (sans constante cosmologique) s'écrivent:

$$E_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial \psi_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial \psi_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial x^l} - g_{ik}\frac{\partial \psi_{lm}}{\partial x_m}\right) \tag{19}$$

Nota: dans le cas des ondes gravitationnelles où le deuxième membre des équations d'Einstein est nul, les conditions supplémentaires: $\partial_l \psi_k^l = 0$ conduisent à l'équation des ondes classique: $\Box \psi_{ik} = 0$. Mais ces conditions supposent le choix d'un système de coordonnées particulier *à priori* différent de celui auquel est rapporté le TEI du champ. Bien qu'ils soient très voisins en raison de la petitesse des quantités ψ_i^k, les variations des composantes du tenseur métrique sont du même ordre que celles dues au champ e.m. alors que la variation du TEI du champ est du second ordre en raison de la petitesse de la quantité $8\pi G/c^4$. Il convient donc de rester dans le même système de coordonnées et de ne considérer les quantités ψ_i^k que comme un changement de variables commode.

3.2 Cas du champ électrostatique uniforme

Si $\boldsymbol{E}$ est porté par l'axe des x, le système ne dépend que de la coordonnée spatiale $x = x^1$. Alors:

$$\begin{aligned}
&E_{00} = \tfrac{1}{2}\tfrac{d^2(\psi_{00}-\psi_{11})}{dx^2} \ ; \ E_{11} = 0 \ ; \\
&E_{22} = \tfrac{1}{2}\tfrac{d^2(\psi_{11}+\psi_{22})}{dx^2} \ ; \ E_{33} = \tfrac{1}{2}\tfrac{d^2(\psi_{11}+\psi_{33})}{dx^2} \\
&E_{02} = \tfrac{1}{2}\tfrac{d^2\psi_{02}}{dx^2} \ ; \ E_{03} = \tfrac{1}{2}\tfrac{d^2\psi_{03}}{dx^2} \ ; \ E_{23} = \tfrac{1}{2}\tfrac{d^2\psi_{23}}{dx^2} \\
&E_{01} = E_{12} = E_{13} = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

Par ailleurs, les seules composantes non nulles du TEI du champ sont:

$$\tau_{00} = -\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \tag{21}$$

La seconde équation $E_{11} = \frac{8\pi G}{c^4}\tau_{11}$ *n'a d'autre solution que* $E = 0$*. Il faut donc introduire une "constante cosmologique".* En le plaçant au $2^{\text{ème}}$ membre, il vient:

$$0 = \frac{8\pi\, G}{c^4}\left(-\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + g_{11}\mathcal{L}\right) \Rightarrow \mathcal{L} = -\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \tag{22}$$

Les équations d'Einstein s'écrivent alors:

$$E_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(\tau_{ik} - g_{ik}\mathcal{L}'\right) = \frac{8\pi G}{c^4}\sigma_{ik} \tag{23}$$

$$\sigma_{ik} = \tau_{ik} - g_{ik}\mathcal{L}' \Rightarrow \sigma_{00} = \sigma_{11} = 0\ ;\ \sigma_{22} = \sigma_{33} = \varepsilon_0 E^2 \tag{24}$$

D'où les 6 équations:

$$\begin{array}{l} \frac{d^2(\psi_{00}-\psi_{11})}{dx^2} = 0 \Rightarrow \psi_{00} = \psi_{11} \\ \frac{d^2(\psi_{11}+\psi_{22})}{dx^2} = \frac{d^2(\psi_{11}+\psi_{33})}{dx^2} = \frac{16\pi\varepsilon_0 G}{c^4}E^2 \Rightarrow \psi_{22} = \psi_{33} \\ \frac{d^2\psi_{02}}{dx^2} = \frac{d^2\psi_{03}}{dx^2} = \frac{d^2\psi_{23}}{dx^2} = 0 \Rightarrow \psi_{02} = \psi_{03} = \psi_{23} = 0 \end{array}$$

Les quantités: ψ_{01} , ψ_{12} , ψ_{13} n'apparaissent pas et doivent donc être considérées comme nulles (puisque seules celles déterminées par le champ modifient la métrique). D'où: $i \neq k \Rightarrow \psi_{ik} = 0$. On en déduit les quantités h_{ik}:

$$\frac{d^2 h_{00}}{dx^2} = \frac{16\pi\varepsilon_0 G}{c^4}E^2\ ;\ h_{11} = \psi_{00} - \psi_{22}\ ;\ h_{22} = h_{33} = 0\ ;\ i \neq k \Rightarrow h_{ik} = 0 \tag{25}$$

La quantité $h_{11} = \psi_{00} - \psi_{22}$ est indéterminée. On doit donc la considérer comme nulle (voir ci-dessus) de sorte que la seule quantité h_{ik} non nulle est h_{00}. Alors:

$$\frac{d^2 h_{00}}{dx^2} = \frac{16\pi\varepsilon_0 G}{c^4}E^2 \Rightarrow h_{00} = \frac{8\pi\varepsilon_0 G}{c^4}V^2 \tag{26}$$

où V est le potentiel électrostatique dont dérive le champ $\boldsymbol{E}$. Introduisant le potentiel de Planck: $V_p = \sqrt{\frac{c^4}{4\pi\varepsilon_0 G}}$, il vient finalement:

$$g_{00} = 1 + \frac{2}{V_p^2}V^2 \tag{27}$$

<u>Nota</u>: Les coordonnées spatiales restent orthonormées. La coordonnée temporelle n'est plus normée. mais reste orthogonale aux autres puisque $h_{0\alpha} = \psi_{0\alpha} = 0$.

3.3 Cas de l'onde progressive plane

- le champ dépend ici des deux coordonnées $x = x^1$ et $t = x^0/c$. Il est fonction de la variable $w = x - ct$, x étant la direction de propagation.
- on considère une onde polarisée rectilignement (pas nécessairement monochromatique): l'induction $\boldsymbol{B}$ définit l'axe y et $\boldsymbol{E}$, l'axe z.
- le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ est porté par l'axe z (pour simplifier l'écriture, on note $\boldsymbol{A}$ la composante A_z). Les autres composantes du quadrivecteur A sont nulles:

$$A_0 = V = 0 \; ; \; A_1 = A_2 = 0 \; ; \; A_3 = -cA_{\,z} = -cA \tag{28}$$

Par ailleurs, les seules composantes non nulles sont:

- pour le tenseur de Faraday:

$$F_{03} = E_z = E = -\frac{\partial A}{\partial t} \; ; \; F_{13} = cB_y = cB = -c\frac{\partial A}{\partial x} \tag{29}$$

- pour le TEI du champ: $\tau_{00} = -\tau_{01} = \tau_{11} = \varepsilon_0 E^2$ (3.19)

Enfin:

$$\begin{array}{l} A = A\,(x - ct) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \\ \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} \end{array} \right. \Rightarrow E = -cB \Rightarrow F_{03} = -F_{13} \end{array} \tag{30}$$

On en déduit les 5 équations:

$$\frac{d^2\,(\psi_{00} - \psi_{11})}{dw^2} = \frac{16\pi\varepsilon_0 G}{c^4}E^2 = \frac{4}{V_p^2}E^2 \; ; \; \psi_{01} = 0 \; ;$$

$$\psi_{02} + \psi_{12} = 0 \; ; \; \psi_{03} + \psi_{13} = 0 \; ; \; \psi_{23} = 0$$

D'où: $\psi = \psi_{00} - (\psi_{11} + \psi_{22} + \psi_{33}) \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dw^2} = \frac{4}{V_p^2}E^2 - \frac{d^2(\psi_{22}+\psi_{33})}{dw^2}$. Alors:

$$h_{00} - h_{11} = \left(\psi_{00} - \tfrac{1}{2}\psi\right) - \left(\psi_{11} + \tfrac{1}{2}\psi\right) \Rightarrow \frac{d^2(h_{00}-h_{11})}{dw^2} = \frac{d^2(\psi_{22}+\psi_{33})}{dw^2}$$

$$\Rightarrow h_{00} - h_{11} = \psi_{22} + \psi_{33}$$

$$\left. \begin{array}{l} h_{22} = \psi_{22} + \frac{1}{2}\psi \Rightarrow \frac{d^2h_{22}}{dw^2} = \frac{2}{V_p^2}E^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2(\psi_{22}-\psi_{33})}{dw^2} \\ h_{33} = \psi_{33} + \frac{1}{2}\psi \Rightarrow \frac{d^2h_{33}}{dw^2} = \frac{2}{V_p^2}E^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2(\psi_{22}-\psi_{33})}{dw^2} \end{array} \right| \Rightarrow \frac{d^2(h_{22}+h_{33})}{dw^2} = \frac{4}{V_p^2}E^2$$

$$h_{01} = \psi_{01} = 0 \; ; \; h_{02} + h_{12} = \psi_{02} + \psi_{12} = 0 \; ;$$

$$h_{03} + h_{13} = \psi_{03} + \psi_{13} = 0 \; ; \; h_{23} = \psi_{23} = 0$$

La quantité $h_{00} - h_{11} = \psi_{22} + \psi_{33}$ n'est pas déterminée par le champ. Comme h_{00} et h_{11} n'apparaissent dans aucune autre équation, on doit les considérer comme nulles, c'est-à-dire n'affectant pas les composantes galiléennes. D'où $g_{00} = g_{00}^{(0)} = 1$ et $g_{11} = g_{11}^{(0)} = -1$.

Le même raisonnement vaut pour les quantités h_{02} et h_{12} et pour h_{03} et h_{13} dont seules les sommes sont déterminées (égales à 0). On a donc $g_{ik} = g_{ik}^{(0)} = 0$ pour $i \neq k$.

Pour déterminer h_{22} et h_{33} dont on ne connaît que la somme, on peut remarquer, par comparaison avec le cas précédent, que la composante diagonale du tenseur métrique affectée par le champ semble correspondre à la coordonnée associée au quadripotentiel, ici x^3, auquel cas on a

$$h_{22} = 0 \Rightarrow g_{22} = g_{22}^{(0)} = -1$$

Alors:

$$\frac{d^2 h_{33}}{dw^2} = \frac{4}{V_p^2} E^2 \Rightarrow h_{33} = \frac{2}{V_p^2} c^2 A^2$$

D'où:

$$g_{33} = -1 + \frac{2}{V_p^2} c^2 A^2 \tag{31}$$

3.4 Comparaison

Métrique

	Champ ES	**Onde plane**
Composante non nulle du 4-potentiel A	$A_0 = V$	$A_3 = -cA$
Norme du 4-potentiel vecteur	$A^2 = V^2$	$A^2 = -c^2 A^2$
Composantes du tenseur métrique affectées par le champ e.m.	$g_{00} = 1 + \frac{2}{V_p^2} A^2$	$g_{33} = -1 - \frac{2}{V_P^2} A^2$

On constate que la composante diagonale du tenseur métrique affectée par le champ correspond à celle non nulle du potentiel. On a donc *pour ces deux cas particuliers*:

$$g_{ii} = g_{ii}^{(0)} \left(1 + \frac{2}{V_p^2} A^2\right) \tag{32}$$

L'orthogonalité des coordonnées est conservée, l'élément de volume affine étant pondéré par la densité scalaire: $\sqrt{-g} = 1 + \frac{A^2}{V_P^2}$.

Constante cosmologique

Contrairement au cas du champ électrostatique pour lequel elle est indispensable, le terme additionnel, baptisé faute de mieux "constante cosmologique", n'est pas nécessaire dans le cas de l'onde. On peut aussi dire, dans ce cas, qu'il est nul ou encore qu'il représente la valeur du lagrangien Λ (valeur extrêmale constante, les équations de Maxwell étant satisfaites) et poser:

$$\mathcal{L}' = \frac{8\pi G}{c^4}\Lambda \tag{33}$$

En effet, on a, pour les deux cas considérés:

	Champ ES	**Onde plane**
Cste cosmologique$\mathcal{L}' = \frac{c^4}{8\pi G}\mathcal{L}$	$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$	$\mathcal{L} = 0$
LagrangienΛ	$\Lambda = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$	$\Lambda = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E^2 - c^2B^2\right) = 0$

Dans ces conditions, les équations d'Einstein s'écriraient:

$$E_{ik} = \frac{8\pi\, G}{c^4}\sigma_{ik}\ ;\ \sigma_{ik} = \tau_{ik} - g_{ik}\Lambda \tag{34}$$

Mais cela suppose qu'on ait $\partial_k\Lambda = 0$, ce qui n'est pas le cas en général.

Cela étant, on n'a pas trouvé de raison d'être à cette constante. On peut simplement remarquer qu'il figurerait dans le TEI du champ si on dérivait par rapport aux g^{ik} la quantité $-\Lambda g$ et non $\Lambda\sqrt{-g}$.

3.5 Effets mécaniques induits

La 4-accélération d'une particule dans un champ de gravitation a pour composantes ([1], §87):

$$\frac{du_i}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}u^k u^l \tag{35}$$

Dans le cas du champ électrostatique précédent, la seule composante non nulle est: $\frac{du_1}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dg_{00}}{dx^1}\left(u^0\right)^2 \approx \frac{1}{2}\frac{dg_{00}}{dV}\frac{dV}{dx}$, d'où:

$$\ddot{x} = \frac{2c^2}{V_p^2} E\, V = -\frac{c^2}{V_p^2}\frac{d\,V^2}{dx} \tag{36}$$

Pour l'onde progressive plane:

$$\frac{du_i}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^i}\left(u^3\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{dg_{33}}{dA_3}\frac{\partial A_3}{\partial x^i}\left(u^3\right)^2 \tag{37}$$

les deux composantes non nulles ont pour expression:

$$\frac{du_1}{ds} = -\frac{du_0}{ds} = -\frac{2c}{V_p^2} AE\left(\frac{v_z}{c}\right)^2 \tag{38}$$

Classification des potentiels et des champs

Ces résultats suggèrent une classification des potentiels et des champs e.m. selon la valeur du produit du potentiel par le champ. Dans le cas du champ ES, le rapport V_p^2/c^2 du produit EV à l'accélération gravitationnelle est de l'ordre de 10^{37}. Ainsi:

- avec une DDP de 1MV et un champ de 3 MV/m, valeurs [3] qu'on peut qualifier "*d'* ***intenses***", l'accélération gravitationnelle est de l'ordre de $10^{-25}\ m/s^2$, évidemment non mesurable [4]
- au rayon du proton $\left(\approx 0,4.10^{-15}\ m\right)$, le potentiel vaut 3,6 MV et le champ: $9.10^{21}\ V/m$, soit $EV \approx 3.10^{27}\ V^2/m$. D'où une accélération de l'ordre de $10^{-10}\ m/s^2$.
- pour obtenir une accélération de 1 m/s^2, il faut un produit $EV \approx 10^{38}\ V^2/m$, soit sur 1m, une DDP de 10^{19} *volts*.

*De tels niveaux qu'on peut qualifier de "**très intenses**" et qui semblent aujourd'hui très largement inatteignables, permettraient de modifier localement les niveaux de gravitation usuels.*

---

[3] Performances des meilleures machines électrostatiques actuelles (générateur Felici).

[4] La précision des meilleurs accéléromètres actuels est de 10^{-11} à $10^{-12}\ m/s^2$ (ex: gradiomètre de l'Onera pour la mission GOCE de l'ESA).

4 Cas d'un champ e.m. extrêmement intense

Dans ce qui précède, même les champs qualifiés de "très intenses" ne font qu'affecter légèrement la métrique euclidienne. La densité de ceg est négligeable et le principe de superposition reste totalement valable.

Cette situation change radicalement pour des champs dérivant de potentiels commensurables avec le potentiel de Planck et que l'on conviendra d'appeler "***extrêmement intenses***":

- d'une part, la densité de ceg ne peut plus être négligée,
- d'autre part, la métrique ne peut plus être considérée comme une petite perturbation de la métrique euclidienne.

Ces deux points ont pour conséquence de modifier les équations d'Einstein et la détermination de la métrique.

4.1 Tenseur d'énergie-impulsion

4-divergence du TEI classique

En présence de charges (4-densité de courant électrique$j$), la 4-divergence du TEI du champ e.m. classique n'est pas nulle ([1], §33):

$$D_l\,\tau_i^l = -\frac{1}{c} j^k F_{ik} \tag{39}$$

Etant donnée l'équivalence formelle de la 4-densité de ceg f, on peut transposer ces relations au cas du champ libre très intense et écrire [5]:

$$D_l\,\tau_i^l = -\frac{1}{c} f^k F_{ik} \tag{40}$$

Ainsi, contrairement au cas du champ libre classique, *la 4-divergence du tenseur τ pour le champ e.m. libre très intense n'est pas nulle.*

Dans la théorie classique du champ e.m. en présence de charges, au tenseur τ du champ s'ajoute nécessairement le TEI de la matière chargée [6]: $T_i^l = \mu c^2 u_i\, u^l \frac{ds}{dt}$ ([1], §33). Tenant compte des lois qui régissent le

[5] Une démonstration plus rigoureuse est donnée en annexe.

[6] Selon A. Lichnerowicz, il convient d'être prudent en ce qui concerne l'introduction dans les équations d'Einstein du TEI du champ e.m., lequel est issu de la relativité restreinte et est étranger aux principes qui fondent la relativité générale. Cette simple addition des TEI du champ et de la matière constitue, à ses yeux, une approximation qui ne peut être que provisoire ([3], Livre I, chap.1, § II-9 et introduction au livre II).

mouvement des charges dans le champ, la 4-divergence de la somme des deux tenseurs est nulle, condition nécessaire pour constituer le deuxième membre des équations d'Einstein.

Rien de tel dans le cas du champ e.m. libre extrêmement intense. Il s'ensuit que, *dans ce cas, le tenseur τ ne peut plus être considéré comme le TEI du champ libre.* La question est donc de savoir s'il existe un tenseur pouvant jouer ce rôle.

TEI proposé

Une transformation simple (cf. annexe) permet d'écrire le second membre de (40) sous la forme:

$$-\frac{1}{c}f^l F_{il} = -D_l \pi_i^l + \frac{1}{c}A^l s_{il} \tag{41}$$

où π désigne le tenseur symétrique de composantes:

$$\pi_{ik} = -\frac{1}{c}\left(A_i f_k + A_k f_i - g_{ik} A_l f^l\right) \tag{42}$$

et s, la dérivée extérieure de f:

$$s_{ik} = -\frac{1}{c}\left(\partial_i f_k - \partial_k f_i\right) \tag{43}$$

Alors:

$$D_l(\tau_i^l + \pi_i^l) = \frac{1}{c}A^l s_{il} \tag{44}$$

Le tenseur $\tau + \pi$ répond à la question si le quadrivecteur ω de composantes:

$$\omega_i = \frac{1}{c}A^l s_{il} \tag{45}$$

est identiquement nul.

Autre approche

Au § 1.2, on a comparé le cas du champ e.m.intense avec celui d'une particule libre placée dans un champ de gravitation. Mais aux vitesses petites devant c, la trajectoire de la particule peut tout aussi bien être déterminée par l'action du potentiel newtonien ϕ dans l'espace euclidien. ([1], §87). Montrons qu'on peut, d'une certaine manière, retrouver cette double formulation pour le champ e.m. intense, du fait de l'équivalence formelle des 4-densités de courant et de ceg.

Dans le cas du champ e.m. classique en présence de charges, on ajoute au lagrangien du champ libre (représentant son énergie "cinétique" T) le terme: $-\frac{1}{c}A_k j^k$ qui joue le rôle d'énergie potentielle: -U ($-\frac{1}{c}j$ étant la "4-force"). Par analogie, écrivons le lagrangien du champ intense sous la forme:

$$\Lambda = T - U = -\frac{\varepsilon_0}{4}F^{kl}F_{kl} - \frac{1}{c}A_k f^k \tag{46}$$

Le TEI correspondant s'obtient en dérivant $\Lambda\sqrt{-g}$ par rapport aux composantes contravariantes du tenseur métrique ([1], §87). Le premier terme donne le tenseur habituel τ. Pour le second, on peut écrire:

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial}{\partial g^{ik}}\left[\sqrt{-g}\left(-\tfrac{1}{c}A_l j^l\right)\right] = \tfrac{\partial}{\partial g^{ik}}\left[-\tfrac{1}{2c}\sqrt{-g}g^{lm}\left(A_l j_m + A_m j_l\right)\right]\\ &= -\tfrac{1}{2c}\sqrt{-g}\left(A_k j_i + A_i j_k - g_{ik}A_l j^l\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\;\pi_{ik}\end{aligned}$$

4.2 Equations d'Einstein modifiées

Dans ces conditions, les équations d'Einstein doivent s'écrire (en supposant la constante "cosmologique" contenue dans E):

$$E_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(\tau_{ik} + \pi_{ik}\right) \tag{47}$$

Nota: En l'absence de constante "cosmologique" et contrairement au champ e.m. faible, la courbure scalaire du 4-espace n'est pas nulle lorsque le champ est extrêmement intense:

$$R = -\frac{16\pi G}{c^5}A_k f^k \tag{48}$$

Ainsi, *sous réserve de la nullité du quadrivecteur ω, le TEI du champ e.m. libre figurant au second membre des équations d'Einstein est généralement la somme des deux tenseurs τ et π. Ce dernier est toutefois totalement négligeable aux niveaux de champ usuels.*

Vérification

Voyons ce qu'il en est dans le cas particulier du champ électrostatique étudié précédemment. On a trouvé la métrique (27) en intégrant l'équation (26). Mais $\boldsymbol{E}$ ne peut être uniforme que si le deuxième membre des équations de Maxwell est nul, hypothèse légitime dans le cas d'un champ usuel. Mais, en toute rigueur, on a:

$$E_{00} = \frac{1}{2}\frac{d^2 g_{00}}{dx^2} = \frac{2}{V_p^2}\left(E^2 - V\frac{dE}{dx}\right) \tag{49}$$

Soit maintenant le tenseur π de composantes (42). Dans le cas présent, seules ses composantes diagonales sont non nulles et l'on a:

$$\pi_{ii} = -\frac{1}{c} A_0 f_0 \ \forall i \tag{50}$$

$\varepsilon_0 D_l F^{kl} = -\frac{1}{c} f^k \Rightarrow f_0 = c\varepsilon_0 \frac{dE}{dx}$ d'où: $\pi_{00} = -\varepsilon_0 V \frac{dE}{dx}$ qui est bien, après multiplication par $8\pi G/c^4$, la quantité à ajouter au $2^{\text{ème}}$ membre de l'équation d'Einstein si on ne fait pas l'approximation. On vérifie, par ailleurs que le quadrivecteur ω est nul.

Nota: les équations de Maxwell (9) donnent avec la métrique (27): $\frac{dE}{dx} = \frac{1}{V_p^2} E^2 V$. Pour une d.d.p. de 1MV et un champ de 3 MV/m (valeurs prises précédemment pour les effets mécaniques), il vient: $\frac{dE}{dx} \approx 10^{-35}\ V.m^{-2}$, ce qui justifie l'hypothèse *a posteriori.*

4.3 Métrique

La métrique établie précédemment (dans deux cas particuliers) pour des potentiels jusqu'à "très intenses" n'est pas *a priori* extrapolable aux potentiels "extrêmement intenses". Tout au plus doit-elle s'y raccorder.

Dans l'autre sens, on est en droit de supposer que les potentiels du champ e.m. et/ou le champ e.m. lui-même, soit atteignent une limite physique indépassable, soit ne conviennent plus comme représentation de la réalité physique[7].

On peut illustrer ce propos en considérant, par exemple, une métrique de composantes ([1], § 92, problème 2):

$$g_{ii} = g_{ii}^{(0)} \exp\left(\frac{2}{V_p^2} A^2\right) \ ; \ g_{ik} = 0 \ pour\ i \neq k \tag{51}$$

qui se raccorde à la précédente pour les champs "très intenses" et où sa limite de validité (ou celle du champ de gravité induit) proviendrait soit d'un 4-potentiel maximal et / ou d'un champ e.m. limite, dont les valeurs seraient très élevées [8].

[7] A l'instar d'un barreau métallique s'allongeant sous l'effet d'une force de traction. Tant qu'elle est faible, l'allongement relatif est proportionnel. On est dans le domaine élastique où s'applique le principe de superposition. Si on dépasse un certain seuil, appelé limite élastique, l'allongement cesse d'être proportionnel à l'effort exercé. Enfin, au-delà d'un certain allongement, le barreau casse.

[8] Par exemple, le potentiel de Planck $V_p \approx 10^{27}$ volts ou pour le champ: $10^{16}\ V/m$, celui créé par un électron (charge $e = 1,6.10^{19}\ C$) à une distance égale à son rayon quantique: $\overline{r} \approx \hbar/m_e\, c \approx 3,9.10^{-13}\ m$.

Etant donné qu'on se limite, dans cet article, aux champs "très intenses", suffisants pour atteindre des niveaux de gravitation usuels, on n'a pas été plus loin dans la recherche de métriques valables pour les champs "extrêmement intenses".

Pour les champs seulement "très intenses", on a essayé de trouver une métrique inspirée de la forme (32) mais sans succès. Par exemple, la métrique:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + \frac{4}{V_p^2}\left(A_i A_k - \frac{1}{2} g_{ik}^{(0)} A^2\right) \tag{52}$$

donne le tenseur $\tau + \pi$ plus des termes supplémentaires apparemment impossibles à éliminer.

5 Conclusions et perspectives

Validation expérimentale

L'hypothèse que la métrique de l'espace-temps peut dépendre des potentiels du champ e.m. ne repose, pour le moment, que sur des arguments de principe. Elle n'est pas aujourd'hui vérifiée expérimentalement, du moins à notre connaissance. Il faudrait pour cela des champs e.m. très élevés qu'on peut peut-être produire avec des lasers de puissance ou au sein de matériaux supra conducteurs.

Unification de l'e.m. et de la gravitation

L'hypothèse jette un pont entre la relativité restreinte, cadre naturel du champ e.m. classique, et la relativité générale, théorie fondamentale de la gravitation. Le champ e.m. n'apparaît plus comme un élément exogène dont le TEI doit être ajouté au second membre des équations d'Einstein mais, au contraire, comme l'une de ses composantes naturelles. Vue sous cet angle, la théorie proposée pourrait contribuer à unifier l'électromagnétisme et la gravitation, tout au moins dans un cadre classique[9].

Toutefois, cette unification ne peut être que partielle tant que, ne considérant que le champ e.m. pur, elle ignore la densité de courant

[9]Toutes les tentatives d'unification de l'électromagnétisme et de la gravitation dans un cadre classique ont échoué. Aujourd'hui, cette recherche se fait dans le cadre quantique (théorie des supercordes et gravité quantique à boucles). Pourtant, formellement, rien ne s'oppose à une unification dans le cadre classique, au moins à l'échelle macroscopique ([3], Introduction au livre II).

électrique, laquelle reste, comme le dit A. Lichnerowicz, "une notion étrangère à celle de champ" ([3], Introduction au livre II). C'est pourquoi, il est tentant d'identifier les 4-densités de courant électrique j et électrogravitationnel f. La charge électrique apparaîtrait ainsi comme une conséquence de la non-linéarité du champ e.m. et non plus comme sa source. Mais bien qu'il existe des éléments formels en faveur de cette hypothèse, ce n'est pour l'instant qu'une idée, sans fondement suffisant à ce stade et qui, en tout état de cause, sort du cadre de cet article.

Un "éther" électromagnétique ?

Sources de gravitation, les potentiels du champ e.m, apparaissent comme une réalité physique au même titre que la matière. Ce statut va au-delà de leur rôle formel de coordonnées généralisées. Le champ e.m. qui en dérive a, de ce fait, une existence propre, ce que reconnaît la théorie classique des ondes e.m. (solutions des équations de Maxwell du champ sans charges). Doit-on, pour autant, les définir de manière univoque? Ce n'est pas évident. Un "espace e.m.", rapporté à un système de coordonnées A_k d'origine arbitraire, pourrait se substituer à l'espace géométrique, les distances et les durées se définissant à partir de grandeurs e.m.[10]. Renaîtrait ainsi un "éther" e.m. affranchi, cette fois, des contradictions de l'éther mécaniste prérelativiste[11].

Validité des équations d'Einstein

Au cours des développements précédents, sont apparus deux points qui restent obscurs:

- la constante "cosmologique" qu'il a fallu introduire dans le cas particulier du champ électrostatique uniforme, semble très artificielle et son appellation, inappropriée (d'où les guillemets). Mais, dans ce cas précis, on n'a pas trouvé d'autre moyen de former les équations d'Einstein.

- le TEI proposé pour le champ extrêmement intense suppose que le 4-vecteur ω est nul. Dans le cas contraire, on ne sait pas écrire les équations d'Einstein pour le champ libre. On a cherché une signification physique de ω, par exemple sous la forme d'une loi de conservation, mais on n'en a pas trouvé.

[10] $[L] = [V]\,[E]^{-1}$; $[T] = [A]\,[E]^{-1}$

[11] le développement de la Relativité Générale conduira Einstein a revenir sur ses conceptions de 1905, ainsi qu'il l'explique dans la conférence qu'il prononça à l'Université de Leyde le 5 mai 1920 ("L'éther et la théorie de la Relativité Générale").

Contrôle de la gravitation

Enfin, s'il était possible de créer des champs e.m. suffisants, le champ de gravitation qui en résulterait permettrait de s'opposer à un champ d'inertie ou à un champ de gravitation non dû au 4-potentiel e.m et, de ce fait, permettre *un contrôle local de la gravitation.* C'est ce rêve qui peut paraître insensé qui a motivé cette démarche et conduit à proposer cette théorie. *C'est, en fait, son véritable objectif.*

Annexe

TEI du champ e.m. extrêmement intense

On établit ici, de manière rigoureuse, l'expression du TEI du champ e.m. extrêmement intense en dérivant, comme dans le cas classique, le lagrangien du champ par rapport aux coordonnées spatiales:

$$\frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial A_{k,l}} \frac{\partial A_{k,l}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial g^{kl}} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i}$$

Ici, les coefficients de la métrique qui interviennent dans le lagrangien du champ:

$$\Lambda_{ch}\sqrt{-g} = -\frac{\varepsilon_0}{4}\left(\sqrt{-g}g^{ik}g^{jl}\right)F_{ij}F_{kl}$$

dépendent des coordonnées géométriques, d'une part *via* les A_k (champ de gravitation dû au 4-potentiel), d'autre part directement:

$$\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i} = A_{j,i}\left(\frac{\partial g^{kl}}{\partial A_j}\right)_{M\,\text{donné}} + \left(\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i}\right)_{A\,\text{donné}}$$

Les dérivées totales du lagrangien par rapport aux coordonnées géométriques s'écrivent alors:

$$\frac{\partial \Lambda_{ch}\sqrt{-g}}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda_{ch}\sqrt{-g}}{\partial A_{k,l}} \frac{\partial A_{k,l}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda_{ch}\sqrt{-g}}{\partial g^{kl}} \left.\frac{\partial g^{kl}}{\partial A_j}\right|_M A_{j,i} + \frac{\partial \Lambda_{ch}\sqrt{-g}}{\partial g^{kl}} \left.\frac{\partial\, g^{kl}}{\partial x^i}\right|_A$$

Or: $\frac{\partial \Lambda_{ch}\sqrt{-g}}{\partial g^{lm}} \left.\frac{\partial g^{lm}}{\partial A_k}\right|_M = \frac{\partial \Lambda_{ch}\sqrt{-g}}{\partial A_k}$

$$\frac{\partial \Lambda_{ch}\sqrt{-g}}{\partial g^{lm}} \left.\frac{\partial\, g^{lm}}{\partial x^i}\right|_A = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\tau_{lm} \left.\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}\right|_A = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\tau_{lm}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\tau_{lm} \left.\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}\right|_M$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{-g}\tau_{lm}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} + \frac{1}{c}\sqrt{-g}f^k A_{k,i}$$

Compte tenu que les équations Maxwell sont vérifiées, il vient:

$$\frac{\partial \Lambda_{ch}\sqrt{-g}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial \Lambda_{ch}\sqrt{-g}}{\partial A_{k,l}} A_{k,i}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\tau_{lm}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} + \frac{1}{c}\sqrt{-g} f^k A_{k,i}$$

En procédant comme précédemment, il vient:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\sqrt{-g}\left(-\varepsilon_0 F^{kl}F_{ki} - \frac{1}{c}f^l A_i - \delta_i^l \Lambda_{ch}\right)\right] + \frac{1}{2}\tau_{lm}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} + \frac{1}{c}f^k A_{k,i} = 0$$

D'où la relation (40): $D_l\, \tau_i^l = -\frac{1}{c} f^k F_{ik}$

Le $2^{\text{è}me}$ membre peut se développer comme suit:

$$\begin{gathered} f^l F_{il} = f^l\left(D_i A_l - D_l A_i\right) = D_i\left(A_l f^l\right) - A_l D_i f^l - D_l\left(A_i f^l\right) \\ = D_i\left(A_l f^l\right) - A_l D_i f^l - D_l\left(A_i f^l\right) + \left[-D_l\left(A^l f_i\right) + D_l\left(A^l f_i\right)\right] \\ = -D_l\left(A_i f^l + A^l f_i - \delta_i^l A_k f^k\right) - A^l\left(D_i f_l - D_l f_i\right) \\ = -D_l\left(A_i f^l + A^l f_i - \delta_i^l A_k f^k\right) - A^l s_{il} \end{gathered}$$

D'où la relation (44):

$$D_l(\tau_i^l + \pi_i^l) = \frac{1}{c} A^l s_{il}$$

Avec (42): $\pi_{ik} = -\frac{1}{c}\left(A_i f_k + A_k f_i - g_{ik} A_l f^l\right)$

Principales abréviations et notations

e.m.	électromagnétisme (tique)
Λ	(densité du) lagrangien du champ e.m.
$\mathrm{d}\Omega$	4-volume affine élémentaire
A	quadripotentiel vecteur du champ e.m.
V	potentiel scalaire
$\boldsymbol{A}$	potentiel vecteur
F	tenseur de Faraday
$\boldsymbol{E}$	champ électrique
$\boldsymbol{B}$	induction magnétique
j	quadrivecteur courant
g_{ij}	tenseur métrique (composantes)
g	déterminant du tenseur métrique
R_{ik}	tenseur de Ricci (composantes)
R	courbure scalaire
E	tenseur d'Einstein
Λ	constante cosmologique
TEI	tenseur d'Energie-Impulsion
τ	TEI du champ EM
c	vitesse de la lumière dans le vide
G	constante de la gravitation
ε_0	permittivité du vide
V_P	potentiel de Planck

Références

[1] L. Landau, E. Lifchitz, *Théorie des Champs*, Ed. Mir, Moscou, 3$^{\text{ème}}$ édition (1970) *

[2] L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique*, Ed. Mir, Moscou, 3$^{\text{ème}}$ édition (1970).

[3] A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Ed. Masson & Cie, Paris (1955).

[4] M. Denis-Papin, A. Kaufmann, *Cours de calcul tensoriel appliqué*, Ed. Albin Michel, Paris (1966)

* Cet article s'appuie presque exclusivement sur la théorie relativiste classique des champs électromagnétique et gravitationnel, telle qu'elle

est exposée dans l'ouvrage de Landau et Lifchitz [1]. C'est pourquoi il est constamment fait référence à cet ouvrage. Pour cette raison, on utilise, comme dans cet ouvrage et contrairement à un usage répandu, les lettres latines pour les indices des composantes quadridimensionnelles et les lettres grecques pour ceux des composantes tridimensionnelles.

(Manuscrit reçu le 10 mai 2007, révisé le 24 septembre 2009)