Aspects particulaires de l'onde de Dirac

Claude Daviau

email : daviau.claude@orange.fr
Fondation Louis de Broglie, 23 rue Marsoulan, 75012 Paris

Résumé : On part de l'invariance relativiste de l'équation d'onde de Dirac, qui oblige à utiliser l'algèbre de Clifford de l'espace physique. L'invariance relativiste fait partie d'un groupe plus vaste. Pour le mettre en évidence on réécrit l'équation de Dirac en algèbre d'espace, on y réécrit aussi les tenseurs sans dérivée. Parmi ces tenseurs figurent quatre vecteurs formant une base orthogonale de l'espace-temps, liés à la matrice d'une dilatation d'espace-temps. Cette dilatation comporte un aspect particulaire dont on commence ici l'analyse.

ABSTRACT. We start from the relativistic invariance of the Dirac equation, that implies to use the Clifford algebra of the physical space. The relativistic invariance group is a part of a greater invariance group. To see that, we rewrite the Dirac equation in the frame of the space algebra, we rewrite the tensors without derivative. Among those tensors are four vectors forming an orthogonal basis of space-time, linked to the matrix of a Lorentz dilation. That dilation has particular aspects, which we begin to analyse.

Introduction

Le concept d'une onde associée au mouvement de toute particule matérielle, extension de ce qu'Einstein avait découvert pour la lumière, est venu à Louis de Broglie à partir de considérations relativistes [1]. Puis E. Schrödinger proposa une équation d'onde valable à l'approximation non relativiste, et dans les mêmes temps fut découvert le spin de l'électron. Pauli proposa une onde à deux composantes complexes pour rendre compte du spin. Sur ces bases, P.A.M. Dirac bâtit une équation relativiste pour une onde à quatre composantes complexes [2]. Cette équation donne pour l'électron des résultats extraordinairement proches des résultats expérimentaux. Parce qu'elle est relativiste, Louis de Broglie a, dès le début, porté une grande attention à l'équation de Dirac, l'a étudiée [3], l'a fait étudier par ses élèves, et l'a utilisée comme base de construction de sa théorie de la lumière [4]. L'équation de Dirac admet une seconde invariance de jauge qui a permis à G. Lochak de bâtir une théorie du monopôle magnétique [5]

Le point de départ de la présente étude est : en quel sens l'équation de Dirac est-elle relativiste ?

On écrira ici l'équation de Dirac en représentation de Weyl :

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi = 0 \ ; \quad q = \frac{e}{\hbar c} \ ; \quad m = \frac{m_0 c}{\hbar} \tag{1}$$

où les γ^μ sont quatre matrices complexes :

$$\begin{gathered}
\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \ ; \ \gamma^j = -\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \\
I = \sigma_0 = \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ \sigma_1 = -\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\sigma_2 = -\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ ; \ \sigma_3 = -\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{2}$$

Les σ_j sont les matrices de Pauli. L'onde ψ s'écrit :

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \ ; \ \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \ ; \ \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

ξ et η sont les spineurs à deux composantes de Weyl. Les A_μ sont les composantes covariantes du vecteur d'espace-temps potentiel électrique extérieur.

1 - L'algèbre de Clifford d'espace

Pour obtenir l'invariance relativiste de l'onde ψ, on doit faire quelque chose de tout à fait nouveau par rapport à la physique pré-quantique, à savoir mettre les coordonnées d'espace-temps sous forme matricielle, en associant à chaque point-événement, de coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3) avec $x^0 = ct$, dans un repère donné, la matrice 2×2 :

$$x = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Soit alors M une matrice quelconque 2×2 à coefficients complexes et de déterminant 1 :

$$M=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\ ;\ \ \det(M)=\alpha\delta-\beta\gamma=1. \tag{5}$$

et soit R la transformation qui à x associe x' tel que

$$x'=x'^{\mu}\sigma_\mu=MxM^\dagger\ ;\ \ M^\dagger=\begin{pmatrix}\alpha^* & \gamma^*\\ \beta^* & \delta^*\end{pmatrix} \tag{6}$$

où z^* est le complexe conjugué de z. On a alors :

$$\begin{aligned}&(x'^0)^2-(x'^1)^2-(x'^2)^2-(x'^3)^2=\det(x')=\det(MxM^\dagger)\\ &=\det(M)\det(x)\det(M^\dagger)=\det(x)=(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2\end{aligned} \tag{7}$$

Donc la transformation conserve les distances d'espace-temps. Ce qui précède équivaut en fait à travailler avec l'algèbre de Clifford Cl_3 de l'espace physique, qui se trouve être isomorphe à l'algèbre de Pauli. L'élément général de cette algèbre s'écrit

$$a=a_0+a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+a_3\sigma_3+a_4\sigma_2\sigma_3+a_5\sigma_3\sigma_1+a_6\sigma_1\sigma_2+a_7\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \tag{8}$$

où les $a_0,...,a_7$ sont huit nombres réels et les $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ sont les trois éléments d'une base orthonormée de l'espace physique, vérifiant donc :

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=1\ ;\ \ \sigma_1\cdot\sigma_2=\sigma_2\cdot\sigma_3=\sigma_3\cdot\sigma_1=0 \tag{9}$$

Comme la multiplication de l'algèbre de Clifford vérifie, par construction et pour tous vecteurs u et v :

$$u\cdot v=\frac{1}{2}(uv+vu) \tag{10}$$

on a nécessairement

$$0=\sigma_1\cdot\sigma_2=\frac{1}{2}(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_1)\ ;\ \ \sigma_2\sigma_1=-\sigma_1\sigma_2 \tag{11}$$

D'où la principale difficulté de l'algèbre Cl_3, à savoir la non-commutativité de la multiplication. Celle-ci est par contre associative, ce qui donne :

$$(\sigma_1\sigma_2)^2=(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1\sigma_2)=\sigma_1(\sigma_2\sigma_1)\sigma_2=-\sigma_1(\sigma_1\sigma_2)\sigma_2=-\sigma_1^2\sigma_2^2=-1 \tag{12}$$

et de même :

$$(\sigma_2\sigma_3)^2 = (\sigma_3\sigma_1)^2 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2 = -1 \tag{13}$$

Aussi l'on peut poser

$$i = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \tag{14}$$

qui donne les relations

$$\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1 \ ; \quad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2 \ ; \quad \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 \tag{15}$$

On peut donc identifier les matrices de Pauli et les vecteurs de la base d'espace, ce qui est justement ce que l'on fait en (4). Il faut aussi identifier les nombres complexes aux matrices scalaires complexes, 1 et σ_0, ce qui simplifie les écritures. On fera ici ces identifications, qui permettent d'écrire la matrice x de (4) sous la forme

$$x = x^0 + x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 \tag{16}$$

donc comme somme d'un nombre réel x^0, coordonnée de temps, et du vecteur d'espace $\vec{x}$:

$$x = x^0 + \vec{x} \ ; \quad \vec{x} = x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 \tag{17}$$

Et l'élément général (8) de l'algèbre d'espace Cl_3 s'écrit :

$$\begin{aligned} &a = s + \vec{v} + i\vec{w} + ip \ ; \quad s = a_0 \ ; \quad \vec{v} = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 \\ &\vec{w} = a_4\sigma_1 + a_5\sigma_2 + a_6\sigma_3 \ ; \quad p = a_7 \end{aligned} \tag{18}$$

c'est-à-dire est la somme d'un scalaire s, d'un vecteur $\vec{v}$, d'un bivecteur $i\vec{w}$, [1] et d'un pseudo-scalaire ip. Les nombres complexes $s+ip$ commutent avec tout élément de l'algèbre. Le produit de deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifie :

$$\vec{u}\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v} + i\vec{u}\times\vec{v} \tag{19}$$

où $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le produit scalaire et $\vec{u}\times\vec{v}$ le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a en outre besoin des opérateurs différentiels :

$$\vec{\partial} = \sigma_1\partial_1 + \sigma_2\partial_2 + \sigma_3\partial_3 \ ; \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ ; \quad \nabla = \partial_0 - \vec{\partial} = \sigma^\mu\partial_\mu \tag{20}$$

[1] $\vec{w}$ est appelé habituellement vecteur axial.

L'opérateur $\vec{\partial}$ donne, sur un scalaire s, le gradient $\vec{\partial}s$, et sur un vecteur $\vec{v}$:

$$\vec{\partial}\vec{v} = \vec{\partial}\cdot\vec{v} + i\vec{\partial}\times\vec{v} \tag{21}$$

où $\vec{\partial}\cdot\vec{v}$ est la divergence et $\vec{\partial}\times\vec{v}$ le rotationnel du vecteur $\vec{v}$.

De même que le corps des complexes utilise une conjugaison qui y joue un grand rôle, l'algèbre Cl_3, qui est plus vaste, comporte trois conjugaisons définies, pour l'élément quelconque a de (18), par :

$$\widehat{a} = s - \vec{v} + i\vec{w} - ip \ ; \quad a^\dagger = s + \vec{v} - i\vec{w} - ip \ ; \quad \overline{a} = s - \vec{v} - i\vec{w} + ip \tag{22}$$

Ces conjugaisons sont liées entre elles :

$$\widehat{a} = (\overline{a})^\dagger = \overline{a^\dagger} \ ; \quad a^\dagger = \widehat{\overline{a}} = \overline{\widehat{a}} \ ; \quad \overline{a} = \widehat{a}^\dagger = \widehat{a^\dagger} \tag{23}$$

et vérifient, pour tout élément a et b de l'algèbre :

$$\widehat{ab} = \widehat{a}\widehat{b} \ ; \quad (ab)^\dagger = b^\dagger a^\dagger \ ; \quad \overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a} \tag{24}$$

ainsi que, pour tout a :

$$a = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \ ; \quad a^\dagger = \begin{pmatrix}\alpha^* & \gamma^*\\ \beta^* & \delta^*\end{pmatrix} \ ; \quad \widehat{a} = \begin{pmatrix}\delta^* & -\gamma^*\\ -\beta^* & \alpha^*\end{pmatrix} \ ; \quad \overline{a} = \begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}$$

$$a\overline{a} = \overline{a}a = \det(a) \ ; \quad \widehat{a}a^\dagger = a^\dagger\widehat{a} = \det(\widehat{a}) = [\det(a)]^*. \tag{25}$$

Deux remarques s'imposent :

1 - Malgré le fait que l'algèbre de Pauli est une algèbre de matrices à coefficients complexes, la structure qui importe ici est celle **d'algèbre sur le corps des réels**, car s et p sont des nombres réels, les composantes des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des nombres réels, les coordonnées x^μ d'un point-événement sont des nombres réels. L'isomorphisme entre Cl_3 et l'algèbre de Pauli est un isomorphisme d'algèbres sur le corps des nombres réels.

2 - Le choix d'une base orthonormée $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ implique le choix d'une **orientation** de l'espace. Pour toute autre base orthonormée (τ_1, τ_2, τ_3) on obtient : soit $\tau_1\tau_2\tau_3 = i$, auquel cas on dit que (τ_1, τ_2, τ_3) est de même sens que $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, soit $\tau_1\tau_2\tau_3 = -i$, auquel cas on dit que (τ_1, τ_2, τ_3) et $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sont de sens contraire. Le terme i est donc lié à l'orientation de l'espace.

2 - Invariance relativiste de l'équation de Dirac

Repartons de la transformation R définie en (6), mais où M est maintenant un élément quelconque de Cl_3, c'est-à-dire une matrice 2×2 quelconque, de déterminant

$$\det(M) = \alpha\delta - \beta\gamma = re^{i\theta} \tag{26}$$

Le module r du déterminant n'est plus forcément égal à 1, et l'argument θ n'est plus forcément égal à 0. On a maintenant [6] :

$$\begin{aligned}
&(x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 = \det(x') = \det(MxM^\dagger) \\
&= \det(M)\det(x)\det(M^\dagger) = re^{i\theta}\det(x)re^{-i\theta} \\
&= r^2[(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2]
\end{aligned} \tag{27}$$

Donc R multiplie par r toutes les distances d'espace-temps, c'est la composée d'une rotation d'espace-temps et d'une homothétie de rapport r, que l'on appelera **dilatation de Lorentz de rapport r**. Soit R^ν_μ la matrice de la transformation R :

$$x'^\nu = R^\nu_\mu x^\mu \tag{28}$$

avec la convention usuelle de sommation sur les indices répétés haut et bas. On obtient

$$R^0_0 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 \tag{29}$$

Donc$R^0_0 > 0$ dès que $M \neq 0$. La dilatation R conserve la flêche du temps, elle est parfaitement compatible avec le temps de la thermodynamique, qui s'écoule toujours dans le même sens. De plus on a [2] :

$$\det(R^\nu_\mu) = r^4 \tag{30}$$

Donc $\det(R^\nu_\mu) > 0$ dès que $r \neq 0$, la dilatation R conserve donc l'orientation de l'espace-temps. Et comme elle conserve l'orientation du temps, elle conserve aussi l'orientation de l'espace, et est compatible avec l'espace physique orienté des interactions faibles.

Nous avons donc affaire à deux groupes bien distincts : le premier, que l'on notera Cl_3^*, est le groupe multiplicatif formé par les éléments

[2] Le calcul de ce déterminant 4×4 peut être simplifié en suivant la méthode de calcul exposée page 101 de [7].

inversibles de Cl_3, ou, ce qui est la même chose, par les matrices complexes 2×2 de déterminant non nul. Ce premier groupe est un groupe de Lie de dimension 8 sur le corps des réels. Le second groupe, que l'on notera $\mathcal{D}$, est le groupe formé par les dilatations de Lorentz R. C'est un groupe de Lie de dimension 7 dont les paramètres sont les 6 angles d'une rotation de Lorentz, plus le rapport r de la dilatation. Quel est le paramètre qui disparaît quand on passe de Cl_3^* à $\mathcal{D}$, et comment cela se fait-il ?

Considérons l'application f de Cl_3^* dans $\mathcal{D}$ qui à M fait correspondre R. Et soit M' un autre élément quelconque de Cl_3^*, et R' la dilatation définie par M' :

$$R' : x' \mapsto x'' = M'x'M'^{\dagger} \tag{31}$$

La composée $R' \circ R$ de ces deux dilatations fait correspondre à x x'' et l'on a :

$$x'' = M'x'M'^{\dagger} = M'MxM^{\dagger}M'^{\dagger} = (M'M)x(M'M)^{\dagger} \tag{32}$$

donc $R' \circ R$ est l'image par f de $M'M$:

$$f(M') \circ f(M) = R' \circ R = f(M'M) \tag{33}$$

ce qui signifie que f est un homomorphisme du groupe $(Cl_3^*, \times)$ sur le groupe $(\mathcal{D}, \circ)$. Mais ce n'est pas un isomorphisme, car le noyau de f n'est pas réduit à l'élément neutre, on a en fait

$$\ker f = \{M/M = e^{i\frac{\theta}{2}}\} \tag{34}$$

L'ensemble de ces matrices constitue un groupe $U(1)$ à un paramètre, dont le générateur est, non pas le i de (1), générateur de la jauge électrique, mais le i de (14), lié à l'orientation de l'espace physique, qui est le générateur de la jauge de G. Lochak [5].

Les représentations du groupe de Lorentz [7] n'utilisent pas la totalité des groupes Cl_3^* et $\mathcal{D}$, mais seulement leurs sous-groupes $SL(2,\mathbb{C})$ et $\mathcal{L}_+^\uparrow$. $SL(2,\mathbb{C})$ est le sous-groupe de Cl_3^* formé par les termes dont le déterminant est égal à 1. $\mathcal{L}_+^\uparrow$ est le sous-groupe de $\mathcal{D}$ formé par les dilatations de rapport 1. C'est aussi le sous-groupe des transformations de Lorentz conservant l'orientation du temps et de l'espace. Le noyau de la restriction de f à ces sous-groupes se réduit alors à l'ensemble des matrices $M = e^{i\frac{\theta}{2}}$ telles que $\theta = 0 \bmod 2\pi$, donc $M = \pm 1$.

La théorie quantique identifie habituellement M et R, les groupes $SL(2,\mathbb{C})$ et $\mathcal{L}_+^\uparrow$, ou leurs sous-groupes $SU(2)$ et $SO(3)$ dans le cas non relativiste, et utilise les **représentations à deux valeurs** de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ et $SO(3)$, qui sont en fait des représentations de $SL(2,\mathbb{C})$ et $SU(2)$. Si on applique strictement les principes de la théorie quantique, on n'obtient, pour $\mathcal{L}_+^\uparrow$ et $SO(3)$, que les représentations dites entières. Seulement il se trouve que l'électron a besoin, non seulement des représentations entières, mais aussi des autres. C'est une des différences importantes entre la physique classique et la physique quantique. Elle signifie que le groupe d'invariance essentiel n'est pas celui qu'on attendait. $\mathcal{L}_+^\uparrow$ est trop petit. Ceci devient beaucoup plus visible si l'on étend l'invariance à Cl_3^*, groupe de Lie de dimension supérieure à celle du groupe $\mathcal{D}$. Ces groupes ne peuvent, même localement, [3] être confondus.

Les matrices de Dirac étant des matrices 4×4, on pose maintenant

$$N = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \widehat{M} \end{pmatrix} \;;\; \tilde{N} = \begin{pmatrix} \overline{M} & 0 \\ 0 & M^\dagger \end{pmatrix} \tag{35}$$

et l'on obtient, pour tout M et pour $\nu = 0,1,2,3$:

$$R^\nu_\mu \gamma^\mu = \tilde{N}\gamma^\nu N \tag{36}$$

On a par ailleurs

$$\partial'_\nu = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \;;\; \partial_\mu = R^\nu_\mu \partial'_\nu \;;\; A_\mu = R^\nu_\mu A'_\nu \tag{37}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= [\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi \\ &= [\gamma^\mu R^\nu_\mu(\partial'_\nu + iqA'_\nu) + im]\psi \\ &= [\tilde{N}\gamma^\nu N(\partial'_\nu + iqA'_\nu) + im]\psi \end{aligned}$$

Or si l'on se restreint à $SL(2,\mathbb{C})$, on a $M\overline{M} = \det(M) = 1$, donc $\overline{M} = M^{-1}$ et $\tilde{N} = N^{-1}$, ce qui permet d'écrire

$$[\tilde{N}\gamma^\nu N(\partial'_\nu + iqA'_\nu) + im]\psi = N^{-1}[\gamma^\nu(\partial'_\nu + iqA'_\nu) + im]N\psi \tag{38}$$

[3] Les groupes $SL(2,\mathbb{C})$ et $SU(2)$ sont les groupes de recouvrement respectifs de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ et $SO(3)$, ils ont la même algèbre de Lie que les groupes qu'ils recouvrent. Tant qu'on raisonne au voisinage de l'élément neutre du groupe, en considérant uniquement des transformations infinitésimales, on ne peut pas apercevoir de différence, car on travaille en fait dans l'algèbre de Lie du groupe. C'est bien pourquoi on n'utilise, ici, aucune transformation infinitésimale.

Donc en posant :

$$\psi' = N\psi \tag{39}$$

on obtient

$$0 = [\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi = N^{-1}[\gamma^\mu(\partial'_\mu + iqA'_\mu) + im]\psi' \tag{40}$$

C'est pourquoi on dit que l'équation de Dirac est invariante de forme sous le groupe de Lorentz. On remarquera :

1 - Que seules les transformations du groupe de Lorentz restreint $\mathcal{L}_+^\uparrow$ sont obtenues.

2 - Que les mêmes matrices γ^μ figurent dans les deux repères, celui des x^μ et celui des x'^μ. Ces matrices sont indépendantes du repère utilisé, elles ne dépendent pas de quel observateur en mouvement suit l'onde.

3 - Que ξ et η se transforment différemment :

$$\psi' = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \widehat{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \; ; \;\; \xi' = M\xi \; ; \;\; \eta' = \widehat{M}\eta \tag{41}$$

4 - Qu'un seul facteur M ou $\widehat{M}$ figure dans ces dernières relations, alors que deux facteurs M sont présents dans $x' = MxM^\dagger$. Dans le cas d'une rotation l'onde tourne seulement de θ quand on effectue une rotation de 2θ.

5 - Qu'il est quelque peu incorrect de dire que l'équation de Dirac est invariante relativiste, alors qu'en fait elle est invariante sous un autre groupe, $SL(2,\mathbb{C})$, qui n'est pas isomorphe au groupe de Lorentz.

Quoi qu'il en soit, on ne peut pas se passer, pour l'électron, du groupe $SL(2,\mathbb{C})$, donc on ne peut pas éviter d'utiliser l'algèbre Cl_3 qui le contient. En fait on peut même écrire toute l'équation de Dirac dans cette algèbre :

3 - L'onde en algèbre d'espace

Avec quatre composantes complexes, on peut construire, comme Dirac, une matrice unicolonne, on peut aussi obtenir une matrice 2×2 à coefficients complexes [6][8]. Pour cela on partira des équations de Weyl en ξ et η qui, avec (1), (2) et (3) donnent

$$(\partial_0 + iqA_0)\eta - \sum_{j=1}^{3}[\sigma_j(\partial_j + iqA_j)\eta] + im\xi = 0$$
$$(\partial_0 + iqA_0)\xi + \sum_{j=1}^{3}[\sigma_j(\partial_j + iqA_j)\xi] + im\eta = 0 \qquad (42)$$

Donc avec les notations (20) et avec

$$A = A_\mu\sigma^\mu = A^\mu\sigma_\mu = A^0 + \vec{A}\ ; \quad \vec{A} = A^1\sigma_1 + A^2\sigma_2 + A^3\sigma_3$$
$$\widehat{\nabla} = \partial_0 + \vec{\partial}\ ; \quad \widehat{A} = A^0 - \vec{A} \qquad (43)$$

les équations (42) s'écrivent

$$(\nabla + iqA)\eta + im\xi = 0 \qquad (44)$$
$$(\widehat{\nabla} + iq\widehat{A})\xi + im\eta = 0 \qquad (45)$$

Utilisons la conjugaison complexe sur cette dernière équation, puis multiplions à gauche par $-i\sigma_2$:

$$(-i\sigma_2)(\widehat{\nabla}^* - iq\widehat{A}^*)\xi^* - im(-i\sigma_2)\eta^* = 0 \qquad (46)$$

Or on a :

$$(-i\sigma_2)(\widehat{\nabla}^* - iq\widehat{A}^*) = (\nabla - iqA)(-i\sigma_2) \qquad (47)$$

donc l'équation (45) est équivalente à :

$$\nabla(-i\sigma_2\xi^*) + iqA(i\sigma_2\xi^*) + im(i\sigma_2\eta^*) = 0 \qquad (48)$$

Le système des deux équations (44)(45) est donc équivalent à une seule équation matricielle :

$$\nabla(\eta \quad -i\sigma_2\xi^*) + iqA(\eta \quad i\sigma_2\xi^*) + im(\xi \quad i\sigma_2\eta^*) = 0 \qquad (49)$$

Posons maintenant

$$\phi = \sqrt{2}(\xi \quad -i\sigma_2\eta^*) = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix} \qquad (50)$$

ce qui nous donne

$$\widehat{\phi} = \sqrt{2}(\eta \quad -i\sigma_2\xi^*) = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \eta_1 & -\xi_2^* \\ \eta_2 & \xi_1^* \end{pmatrix} \qquad (51)$$

et aussi

$$\phi\sigma_3 = \sqrt{2}(\xi \quad i\sigma_2\eta^*) \ ; \quad \widehat{\phi}\sigma_3 = \sqrt{2}(\eta \quad i\sigma_2\xi^*) \ ; \tag{52}$$

Donc l'équation (49), qui est équivalente à l'équation de Dirac (1), s'écrit

$$\nabla\widehat{\phi} + iqA\widehat{\phi}\sigma_3 + im\phi\sigma_3 = 0 \tag{53}$$

que l'on écrira, avec

$$\sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 \tag{54}$$

$$\nabla\widehat{\phi} + qA\widehat{\phi}\sigma_{12} + m\phi\sigma_{12} = 0 \tag{55}$$

Le i présent en (1), qui est le générateur de la jauge électrique présent dans toute la mécanique quantique, devient ici le bivecteur σ_{12}, et non pas le $i = \sigma_{123}$ qui est lié à l'orientation de l'espace. Ce terme est l'un des trois termes similaires σ_{12}, σ_{23}, σ_{31}. Or il est bien connu dans la théorie des interactions faibles, où le groupe de jauge est $U(1) \times SU(2)$, que le générateur du groupe de jauge électrique n'est pas dans $U(1)$, mais dans $SU(2)$, dont l'algèbre de Lie est justement engendrée par les trois σ_{12}, σ_{23}, σ_{31}. Le générateur de la jauge électrique, dans les interactions électro-faibles, ressemble donc beaucoup plus au σ_{12} de (55) qu'au i de (1).

Sous une dilatation R définie par une matrice M quelconque vérifiant (6) et (26), on a obtenu en (41) $\xi' = M\xi$, $\eta' = \widehat{M}\eta$, et ces relations ne sont pas réservées au cas particulier où $r = 1$ et $\theta = 0$. En outre on a

$$\begin{aligned} -i\sigma_2{\eta'}^* = -i\sigma_2\widehat{M}^*\eta^* &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\eta^* = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix}\eta^* \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\eta^* = M(-i\sigma_2\eta^*) \end{aligned} \tag{56}$$

Et donc, avec

$$\phi' = \sqrt{2}(\xi' \quad -i\sigma_2{\eta'}^*) = \sqrt{2}\begin{pmatrix} {\xi_1}' & -{\eta'_2}^* \\ \xi'_2 & {\eta'_1}^* \end{pmatrix} \tag{57}$$

les formules de transformation (41) sont équivalentes à

$$\phi' = M\phi \tag{58}$$

Ceci signifie que le lien existant entre les spineurs de Weyl ξ, η et ϕ est non seulement invariant relativiste, mais est même invariant sous le groupe plus vaste Cl_3^*. Par ailleurs, avec

$$\nabla' = \sigma^\mu\partial'_\mu \ ; \quad \partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial {x'}^\mu} \tag{59}$$

on obtient, pour tout M :

$$\nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M} \ ; \quad A = \overline{M}A'\widehat{M} \tag{60}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla\widehat{\phi} + qA\widehat{\phi}\sigma_{12} + m\phi\sigma_{12} \\ &= \overline{M}\nabla'\widehat{M}\widehat{\phi} + q\overline{M}A'\widehat{M}\widehat{\phi}\sigma_{12} + m\phi\sigma_{12} \\ &= \overline{M}(\nabla'\widehat{\phi}' + qA'\widehat{\phi}'\sigma_{12}) + m\phi\sigma_{12} \end{aligned} \tag{61}$$

Dire que l'équation de Dirac est invariante de forme sous Cl_3^*, c'est dire que l'on a

$$0 = \nabla'\widehat{\phi}' + qA'\widehat{\phi}'\sigma_{12} + m'\phi'\sigma_{12} \ ; \ \nabla'\widehat{\phi}' + qA'\widehat{\phi}'\sigma_{12} = -m'\phi'\sigma_{12} \tag{62}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{M}(-m'\phi'\sigma_{12}) + m\phi\sigma_{12} = -m'\overline{M}M\phi\sigma_{12} + m\phi\sigma_{12} \\ &= (-m're^{i\theta} + m)\phi\sigma_{12} \end{aligned} \tag{63}$$

On obtient donc l'invariance de l'équation d'onde sous le groupe Cl_3^* si et seulement si

$$m = m're^{i\theta} \tag{64}$$

Bien entendu, dans le cas où l'on se restreint à $r = 1$ et $\theta = 0$ on obtient $m' = m$.

4 - Les tenseurs de la théorie de Dirac

En ce qui concerne les tenseurs sans dérivées, le formalisme complexe obtient 16 grandeurs, à savoir le scalaire :

$$\Omega_1 = \overline{\psi}\psi \ ; \quad \overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0 = (\eta^\dagger \ \xi^\dagger). \tag{65}$$

Les quatre J^μ tels que

$$J^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{66}$$

sont les composantes d'un vecteur conservatif de l'espace-temps. Ensuite les six

$$S^{\mu\nu} = i\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi \tag{67}$$

sont les composantes d'un tenseur antisymétrique de rang deux. Les quatre K^μ

$$K^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \ ; \quad \gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{68}$$

sont les composantes d'un pseudo-vecteur d'espace-temps, dual d'un tenseur antisymétrique de rang 3. Enfin

$$\Omega_2 = -i\overline{\psi}\gamma_5\psi \tag{69}$$

est un pseudo-scalaire et permet de définir l'invariant ρ et l'angle d'Yvon-Takabayasi β, qui est l'angle de phase de la jauge magnétique de G. Lochak [5] :

$$\Omega_1 = \rho\cos\beta \ ; \quad \Omega_2 = \rho\sin\beta \ ; \quad \Omega_1 + i\Omega_2 = \rho e^{i\beta} \tag{70}$$

On a, avec les spineurs de Weyl :

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \xi^\dagger\eta + \eta^\dagger\xi \ ; \quad \Omega_2 = i(\xi^\dagger\eta - \eta^\dagger\xi) \\
\rho e^{i\beta} &= \Omega_1 + i\Omega_2 = 2\eta^\dagger\xi = 2(\eta_1^*\xi_1 + \eta_2^*\xi_2) \\
\rho e^{-i\beta} &= \Omega_1 - i\Omega_2 = 2\xi^\dagger\eta = 2(\eta_1\xi_1^* + \eta_2\xi_2^*)
\end{aligned} \tag{71}$$

Mais avec (50) et (51) on a :

$$\begin{aligned}
\phi\overline{\phi} &= \overline{\phi}\phi = \det(\phi) = 2(\eta_1^*\xi_1 + \eta_2^*\xi_2) = \rho e^{i\beta} \\
\widehat{\phi}\phi^\dagger &= \phi^\dagger\widehat{\phi} = \det(\widehat{\phi}) = 2(\eta_1\xi_1^* + \eta_2\xi_2^*) = \rho e^{-i\beta}
\end{aligned} \tag{72}$$

Donc l'angle d'Yvon-Takabayasi β est l'argument et ρ est le module du déterminant de ϕ, qui est donc inversible si et seulement si ρ n'est pas nul. [4] En posant :

$$D_0 = J = J^\mu\sigma_\mu \ ; \quad D_3 = K = K^\mu\sigma_\mu \tag{73}$$

le calcul des composantes, à l'aide de ξ et η, donne :

$$D_0 = \phi\sigma_0\phi^\dagger \ ; \quad D_3 = \phi\sigma_3\phi^\dagger \tag{74}$$

Mais on voit maintenant immédiatement que ces deux vecteurs d'espace-temps, que l'on savait orthogonaux et de carrés opposés, font partie d'une liste (D_0, D_1, D_2, D_3) de quatre vecteurs d'espace-temps :

$$D_1 = \phi\sigma_1\phi^\dagger \ ; \quad D_2 = \phi\sigma_2\phi^\dagger \tag{75}$$

[4] Ce n'est pas toujours le cas : pour la plupart des solutions de Darwin pour l'atome d'hydrogène, il existe des cercles sur lesquels ρ est nul.

Ces vecteurs ne font pas partie des 16 grandeurs connues avec le formalisme complexe. Dans une dilatation de Lorentz R définie par la matrice M, tous ces vecteurs se transforment de la même manière :

$$D'_\mu = \phi'\sigma_\mu\phi'^\dagger = (M\phi)\sigma_\mu(M\phi)^\dagger = M\phi\sigma_\mu\phi^\dagger M^\dagger = MD_\mu M^\dagger \tag{76}$$

Donc les D_μ se comportent comme les vecteurs d'espace-temps x. Ce sont des vecteurs de même longueur, et en outre orthogonaux, formant une base de l'espace-temps :

$$\begin{aligned}
2D_\mu \cdot D_\nu &= D_\mu\widehat{D}_\nu + D_\nu\widehat{D}_\mu \\
&= \phi\sigma_\mu\phi^\dagger\widehat{\phi}\widehat{\sigma}_\nu\phi^\dagger + \phi\sigma_\nu\phi^\dagger\widehat{\phi}\widehat{\sigma}_\mu\phi^\dagger \\
&= \phi\sigma_\mu\rho e^{-i\beta}\widehat{\sigma}_\nu\phi^\dagger + \phi\sigma_\nu\rho e^{-i\beta}\widehat{\sigma}_\mu\phi^\dagger \\
&= \rho e^{-i\beta}\phi(\sigma_\mu\widehat{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\widehat{\sigma}_\mu)\phi^\dagger = \rho e^{-i\beta}\phi 2g_{\mu\nu}\phi^\dagger \\
&= 2g_{\mu\nu}\rho e^{-i\beta}\phi\phi^\dagger = 2g_{\mu\nu}\rho e^{-i\beta}\rho e^{i\beta} \\
D_\mu \cdot D_\nu &= g_{\mu\nu}\rho^2
\end{aligned} \tag{77}$$

Avec, bien sûr, puisqu'on utilise l'espace-temps de la relativité restreinte :

$$g_{00} = 1 \ ; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \ ; \quad g_{\mu\nu} = 0 \ , \ \mu \neq \nu \tag{78}$$

Pour apprécier les simplifications qu'apporte l'algèbre d'espace, il suffit de chercher à établir les dix relations (77) en n'utilisant que l'algèbre de Dirac.

En ce qui concerne le tenseur $S^{\mu\nu}$, on pose :

$$S_3 = S^{23}\sigma_1 + S^{31}\sigma_2 + S^{12}\sigma_3 + S^{10}i\sigma_1 + S^{20}i\sigma_2 + S^{30}i\sigma_3 \tag{79}$$

Et l'on obtient :

$$S_3 = \phi\sigma_3\overline{\phi} \tag{80}$$

Et l'on voit immédiatement que S_3 fait partie de quatre termes analogues

$$S_\mu = \phi\sigma_\mu\overline{\phi} \tag{81}$$

Nous avons déjà rencontré S_0 :

$$S_0 = \phi\sigma_0\overline{\phi} = \phi\overline{\phi} = \rho e^{i\beta} \tag{82}$$

Avec les 4 D_μ à 4 composantes, S_0 à 2 composantes et les 3 S_j à 6 composantes, nous avons 36 composantes de tenseurs sans dérivées, au lieu de 16 avec le formalisme complexe.

Sous une dilatation R de matrice M, les S_μ sont transformés en :

$$S'_\mu = \phi'\sigma_\mu\overline{\phi}' = M\phi\sigma_\mu\overline{M\phi} = M\phi\sigma_\mu\overline{\phi}\;\overline{M} = MS_\mu\overline{M} \tag{83}$$

En particulier on a :

$$\begin{aligned} \rho' e^{i\beta'} &= S'_0 = MS_0\overline{M} = M\rho e^{i\beta}\overline{M} = \rho e^{i\beta}M\overline{M} = \rho e^{i\beta} r e^{i\theta} \\ \rho' &= r\rho \; ; \quad \beta' = \beta + \theta \end{aligned} \tag{84}$$

Entre les 36 composantes de tenseurs sans dérivées, qui ne dépendent que des 8 paramètres réels de l'onde ϕ, existent de nombreuses relations, assez difficiles à obtenir avec le formalisme des matrices complexes, et presque immédiates avec l'algèbre d'espace, comme, pour $j = 1, 2, 3$:

$$S_j^2 = (\Omega_1 + i\Omega_2)^2 \; ; \; D_0\widehat{S}_j = (-\Omega_1 + i\Omega_2)D_j \; ; \; D_j\widehat{S}_j = (-\Omega_1 + i\Omega_2)D_0 \tag{85}$$

Les formules de transformation (83) sont tout à fait différentes des formules de transformation des tenseurs antisymétriques de rang 2, $S'^{\rho\sigma} = R^\rho_\mu R^\sigma_\nu S^{\mu\nu}$. Car R^ν_μ est quadratique par rapport à M et multiplie toutes les longueurs d'espace-temps par r. La présence de deux facteurs R signifie une multiplication par r^2, alors que (83) est quadratique en M et ne multiplie les longueurs que par r. On ne peut considérer les deux formalismes comme équivalents que si on se limite à l'invariance sous les groupes $\mathcal{L}_+^\uparrow$ et $SL(2,\mathbb{C})$. Prendre en considération l'invariance sous le groupe plus vaste, donc plus contraignant, Cl_3^*, implique l'abandon du formalisme des matrices de Dirac.

5 - L'équation d'onde non linéaire homogène

Il est possible d'emprunter à la théorie du monopôle magnétique de G. Lochak [5] son terme de masse, de sorte que l'équation linéaire (1) est remplacée [9] par :

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im(\frac{\Omega_1}{\rho} - \frac{\Omega_2}{\rho}\gamma_{0123})]\psi = 0 \; ; \quad \gamma_{0123} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{86}$$

qui donne, pour les spineurs de Weyl :

$$(\nabla + iqA)\eta + ime^{-i\beta}\xi = 0 \tag{87}$$

$$(\widehat{\nabla} + iq\widehat{A})\xi + ime^{i\beta}\eta = 0 \tag{88}$$

Le procédé décrit au paragraphe 3 permet de transformer ce système en une seule équation matricielle :

$$\nabla\widehat{\phi} + qA\widehat{\phi}\sigma_{12} + me^{-i\beta}\phi\sigma_{12} = 0 \tag{89}$$

On obtient l'équation de Dirac en annulant le terme en β, donc l'équation de Dirac est une approximation linéaire de l'équation non linéaire dans le cas où l'angle d'Yvon-Takabayasi β est nul ou très petit.

Comme ϕ est une matrice carrée, on peut multiplier cette équation à gauche par $\overline{\phi}$, ce qui donne

$$\overline{\phi}(\nabla\widehat{\phi}) + q\overline{\phi}A\widehat{\phi}\sigma_{12} + me^{-i\beta}\overline{\phi}\phi\sigma_{12} = 0 \tag{90}$$

Compte-tenu de (72), et en multipliant à droite par σ_{21}, on obtient :

$$\overline{\phi}(\nabla\widehat{\phi})\sigma_{21} + q\overline{\phi}A\widehat{\phi} + m\rho = 0 \tag{91}$$

Avec (58) et (60) on obtient

$$\overline{\phi}(\nabla\widehat{\phi}) = \overline{\phi}(\overline{M}\nabla'\widehat{M}\widehat{\phi}) = \overline{M\phi}(\nabla'\widehat{M\phi}) = \overline{\phi}'(\nabla'\widehat{\phi}') \tag{92}$$

Et de même

$$\overline{\phi}A\widehat{\phi} = \overline{\phi}\ \overline{M}A'\widehat{M}\widehat{\phi} = \overline{M\phi}A'\widehat{M\phi}) = \overline{\phi}'A'\widehat{\phi}' \tag{93}$$

Donc l'équation non linéaire (91) est invariante sous le groupe Cl_3^* si et seulement si

$$m\rho = m'\rho' \tag{94}$$

Les deux invariants relativistes que sont la masse propre et ρ ne sont plus séparément invariants si l'on prend en compte le groupe plus vaste Cl_3^*, c'est seulement le produit $m\rho$ qui est invariant sous le groupe Cl_3^*. Comme ρ est multiplié par le rapport de dilatation, m est proportionnel à l'inverse du rapport de dilatation, donc à l'inverse d'une longueur d'espace-temps, ce qui est très exactement ce que nous dit l'existence de la constante de Planck.

6 - Aspects particulaires de l'onde

Il n'y a pas de différence de structure entre la matrice M définissant la dilatation R et l'onde ϕ, qui sont toutes deux des matrices complexes 2×2, c'est-à-dire des éléments de l'algèbre d'espace Cl_3. Plus précisément, ϕ est une fonction de l'espace-temps à valeur dans Cl_3. Par conséquent

ϕ, comme M, peut définir une dilatation de Lorentz D, de rapport ρ, par :

$$D : y \mapsto x = \phi y \phi^\dagger \tag{95}$$

Et les composantes D_μ^ν des quatre vecteurs D_μ sont les termes de la matrice de cette dilatation D [6].

Il n'y a pas non plus de différence entre le produit $M'M$ des matrices qui donne la composée $R' \circ R$ des dilatations, et le produit $M\phi$ qui donne la transformation de l'onde sous une dilatation, et qui induit donc une composition des dilatations $R \circ D$:

$$x' = MxM^\dagger = M\phi y \phi^\dagger M^\dagger = (M\phi)y(M\phi)^\dagger = \phi' y \phi'^\dagger \tag{96}$$

Ceci signifie que le y introduit en (95) ne change pas, qu'il soit vu par l'observateur de x ou par l'observateur de x'. Il est indépendant de l'observateur, intrinsèque à l'onde. Mais comme ϕ est fonction de x, la dilatation D est aussi fonction de x, et varie d'un point à un autre de l'espace-temps : y n'appartient pas à l'espace-temps global, seulement à l'espace-temps local. On doit donc voir y comme l'élément général de l'espace-temps tangent, en x, à une variété d'espace-temps qui ne dépend que de l'onde, pas de l'observateur, et qu'on appelera **variété intrinsèque**. La dilatation, par contre, dépend de l'observateur, celui de x voit D, celui de x' voit $D' = R \circ D$.

En chaque point de l'espace-temps on est donc en présence, non pas d'une variété d'espace-temps, mais de **deux variétés d'espace-temps**, et de **deux connexions affines différentes** : la variété des x et des x', variété pour laquelle chaque observateur relativiste est associé à un espace-temps tangent lorentzien. Et la variété des y, qui est une variété non isotrope, avec la direction $n°3$ privilégiée pour l'équation de Dirac, et dont la structure globale est gouvernée par la **torsion** [6] [8] [10].

Maintenant il faut voir que les deux espace-temps tangents, en un même point d'espace-temps, sont d'autant plus faciles à confondre qu'ils sont isomorphes. Et il faut rappeler un théorème de géométrie plane : dans un plan, toute similitude directe admet un point invariant unique et se réduit à la composée d'une rotation autour de ce point et d'une homothétie de rapport positif ayant le point invariant pour centre. Ce centre de similitude est un point au sens mathématique du terme, infiniment petit, sans sous-structure.

Prenons l'exemple des ondes planes pour l'équation non linéaire, qui devient, en l'absence de champ extérieur :

$$\nabla\widehat{\phi} + me^{-i\beta}\phi\sigma_{12} = 0 \tag{97}$$

Si l'on considère une onde plane vérifiant

$$\phi = \phi_0 e^{-\varphi\sigma_{12}} \ ; \quad \varphi = mv_\mu x^\mu \ ; \quad v = \sigma^\mu v_\mu. \tag{98}$$

où la vitesse d'univers v et ϕ_0 sont des termes fixes, on a :

$$\nabla\widehat{\phi} = \sigma^\mu\partial_\mu(\widehat{\phi}_0 e^{-\varphi\sigma_{12}}) = -mv\widehat{\phi}\sigma_{12}. \tag{99}$$

Par conséquent (97) est équivalent à

$$\phi_0 = e^{i\beta}v\widehat{\phi}_0 \tag{100}$$

ou à

$$\widehat{\phi}_0 = e^{-i\beta}\widehat{v}\phi_0 \tag{101}$$

ce qui implique

$$\phi_0 = e^{i\beta}v(e^{-i\beta}\widehat{v}\phi_0) = v\widehat{v}\phi_0 = v\cdot v\phi_0. \tag{102}$$

Donc, si ϕ_0 est inversible, on doit prendre

$$1 = v\cdot v = v_0^2 - \vec{v}^{\,2} \tag{103}$$

$$v_0^2 = 1 + \vec{v}^{\,2} \ ; \quad v_0 = \pm\sqrt{1+\vec{v}^{\,2}}. \tag{104}$$

qui est la relation attendue pour la vitesse de l'électron. De plus, avec l'équation non linéaire, on a aussi :

$$D_0 = \phi\phi^\dagger = \phi_0\phi_0^\dagger = e^{i\beta}v\widehat{\phi}_0\phi_0^\dagger = e^{i\beta}v\rho e^{-i\beta} = v\rho \tag{105}$$

Donc on obtient

$$D_0^0 = \rho v^0 \tag{106}$$

et comme D_0^0 et ρ sont toujours positifs, (106) n'est obtenu que si

$$v_0 = \sqrt{1+\vec{v}^2} \tag{107}$$

Ceci signifie que, pour les ondes planes du type (98), seules les énergies positives sont autorisées, en conformité avec ce qui se passe pour une particule.

Considérons le cas le plus simple possible, dans lequel on choisit une vitesse dans la direction $n°3$:

$$v = e^{a\sigma_3} \ ; \quad \phi_0 = e^{\frac{a}{2}\sigma_3} \tag{108}$$

On obtient alors

$$\rho e^{i\beta} = \det(\phi) = \det(\phi_0)\det(e^{i\beta}) = \det(\phi_0) = 1. \tag{109}$$

On a donc choisi un cas très particulier. On a aussi

$$D_0 = \phi_0\phi_0^\dagger = v \ ; \quad D_3 = \phi_0\sigma_3\phi_0^\dagger = v\sigma_3 \tag{110}$$

Les deux autres vecteurs sont variables :

$$\begin{aligned} D_1 &= \cos(2\varphi)\sigma_1 + \sin(2\varphi)\sigma_2 \\ D_2 &= -\sin(2\varphi)\sigma_1 + \cos(2\varphi)\sigma_2 \\ \varphi &= m(v_0x^0 + v_3x^3) = m\mathrm{ch}(a)x^0 + m\mathrm{sh}(a)x^3 \end{aligned} \tag{111}$$

Par conséquent, au cours du temps, chaque point de l'espace est centre d'une rotation de D_1 et D_2 autour de ce point, avec un axe de rotation dans la direction $n°3$.

En dehors de ce cas très particulier, les choses sont beaucoup moins simples, dès que l'on sort des ondes planes, ou dès que l'on regarde ailleurs que dans la direction $n°3$. Il faudrait notamment pouvoir regarder, pour les solutions très précises de l'équation de Dirac dans l'atome d'hydrogène, ce que deviennent ces centres de similitudes.

Références

[1] L. de Broglie : *Recherches sur la théorie des quantas*, thèse, Paris 1924, rééditée : Ann. Fond. Louis de Broglie, **17** $n°1$ 1992.
[2] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) **117**, 610 (1928)
[3] Louis de Broglie, *L'électron magnétique*, Hermann, Paris 1934
Louis de Broglie, La théorie des particules de spin 1/2 (électrons de Dirac) Gauthier-Villars, Paris 1952.
[4] L. de Broglie : *La mécanique du photon, Une nouvelle théorie de la Lumière : tome 1 La Lumière dans le vide*, Hermann, Paris 1940
tome 2 Les interactions entre les photons et la matière, Hermann, Paris 1942.
L. de Broglie : *Théorie générale des particules à spin (méthode de fusion)*, Gauthier-Villars, Paris 1954
L. de Broglie : *Ondes électromagnétiques et photons*, Gauthier-Villars, Paris 1968

[5] G. Lochak : *Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin* $\frac{1}{2}$. Ann. Fond. Louis de Broglie, **8** n° 4 1983 et **9** n° 1 1984

G. Lochak : *The symmetry between electricity and magnetism and the wave equation of a spin* $\frac{1}{2}$ *magnetic monopole.* Proceedings of the 4-th International Seminar on the Mathematical Theory of dynamical systems and Microphysics. CISM 1985

G. Lochak : *Wave equation for a magnetic monopole.* Int. J. of Th. Phys. **24** n°10 1985

G. Lochak : *Un monopôle magnétique dans le champ de Dirac (Etats magnétiques du champ de Majorana)* Ann. Fond. Louis de Broglie, **17** n°2 1992

G. Lochak : *L'équation de Dirac sur le cône de lumière : Électrons de Majorana et monopôles magnétiques*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **28** n° 3-4, 2003.

G. Lochak : *The equation of a light leptonic monopole and its experimental aspects*, Z. Naturforschung, **62a**, 231-246, 2007

G. Lochak : *Sur la présence d'un second photon dans la théorie de la lumière de Louis de Broglie*, **17**, p203, 1992.

[6] C. Daviau : *Interprétation cinématique de l'onde de l'électron*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **30** $n^\circ 3-4$ 2005.

[7] M.A. Naïmark, *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*, Dunod, Paris 1962.

[8] C. Daviau : *Dirac equation in the Clifford algebra of space*, in Clifford Algebras and their Application in Mathematical Physics, Aachen 1996, Kluwer, Dordrecht,

C. Daviau : *Sur l'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **22** n° 1 1997.

C. Daviau : *Sur les tenseurs de la théorie de Dirac en algèbre d'espace*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **23** n° 1 1998

C. Daviau : *Application à la théorie de la lumière de Louis de Broglie d'une réécriture de l'équation de Dirac*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **23** n° 3 - 4, 1998

C. Daviau : *Equations de Dirac et fermions fondamentaux*, première partie : Ann. Fond. Louis de Broglie, **24** n° 1 - 4, 1999 ; deuxième partie : **25** n° 1, 2000.

C. Daviau : *Chiral Dirac Equation*, in Clifford Algebras, Applications to Mathematics, Physics and Engineering, Rafal Ablamowicz Editor, Birkhäuser Boston 2004, p. 431-450

C. Daviau : *Equations de Dirac et fermions fondamentaux*, première partie : Ann. Fond. Louis de Broglie, **24** n° 1 - 4, 1999 ; deuxième partie : **25** n° 1, 2000.

C. Daviau, *Vers une mécanique quantique sans nombre complexe*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **26** n° 1-3 2001

C. Daviau : *On the electromagnetism's invariance* Ann. Fond. Louis de Broglie, **33** n° 1-2 2008.

[9] C. Daviau et G.Lochak : *Sur un modèle d'équation spinorielle non linéaire*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **16** n° 1 1991

C. Daviau : *Equation de Dirac non linéaire*, (Thèse de doctorat, Université de Nantes), 1993

C. Daviau : *Linear and Nonlinear Dirac Equation*, Found. of Phys., **23** n° 11, 1993

C. Daviau : *Remarques sur une équation de Dirac non linéaire*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **19** n° 4, 1994

C. Daviau : *Sur la résolution de l'équation de Dirac pour l'atome d'hydrogène*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **20** n° 1, 1995

C. Daviau : *Solutions of the Dirac equation and of a nonlinear Dirac equation for the Hydrogen Atom,* Int. Conference on the Theory of the Electron, Mexico 1995

[10] V.I. Rodichev, (1961) Soviet Physics JETP, **13**, 1029

(Manuscrit reçu le 11 juillet 2008, révisé le 16 septembre 2009)