Résolution d'une équation d'onde de Dirac non linéaire homogène pour l'atome d'hydrogène.

Claude Daviau

email : claude.daviau@nordnet.fr
Le Moulin de la Lande, 44522 Pouillé-les-coteaux

Résumé : Pour l'atome d'hydrogène, on calcule les solutions de l'équation de Dirac et les solutions d'une équation homogène non linéaire, dont l'équation de Dirac est l'approximation linéaire. On utilise une méthode de séparation des variables, et les opérateurs du moment cinétique total. On calcule toutes les solutions, ainsi que l'angle d'Yvon-Takabayasi, et on précise celles des solutions qui peuvent être les approximations des solutions de l'équation non linéaire. On résoud par approximation l'équation non linéaire et on retrouve la formule des niveaux d'énergie. On discute la possibilité d'obtenir l'effet Lamb et les avantages physiques de la non linéarité.

ABSTRACT. For the hydrogen atom, we calculate the solutions of the Dirac equation, and the solutions of a homogeneous non-linear wave equation, that has the Dirac equation as linear approximation. We use a method separating spherical variables and we use total cinetic momentum operators. We calculate each solution, and the Yvon-Takabayasi's angle, we precise which solution can be an approximation of a solution for the non-linear wave equation. We solve by approximation the non-linear equation, and we find again the good formula for the energy levels. We discuss the possibility to find the Lamb effect, and physical advantages of the non linearity.

1 - Introduction

L'équation d'onde étudiée ici a été obtenue à partir de l'équation d'onde du monopôle magnétique de G. Lochak [1], dont on a repris le terme de masse non linéaire, dans un cas particulier, de telle sorte que l'équation linéaire de Dirac est l'approximation linéaire de l'équation d'onde non linéaire [2].

Les solutions de l'équation de Dirac, calculées par C. G. Darwin [3], que l'on peut trouver dans des exposés plus modernes [4] [5], sont valeurs propres d'un opérateur ad-hoc, issu de la théorie non relativiste, opérateur qui n'est pas le moment cinétique total. Elle n'ont donc comme justification physique que de donner le nombre d'états attendu, et la bonne formule pour les niveaux d'énergie, et d'avoir les approximations non relativistes attendues, ce qui a été jugé éminemment satisfaisant. Elles ont l'inconvénient d'avoir, pour la plupart d'entre elles, un angle d'Yvon-Takabayasi qui n'est ni partout défini, ni partout petit. Les solutions de C. G. Darwin ne peuvent donc pas être les approximations linéaires des solutions de l'équation non linéaire.

On a obtenu précédemment [6] d'autres solutions de l'équation de Dirac, qui ont un angle d'Yvon-Takabayasi partout défini et partout petit, et qui peuvent donc être, elles, les approximations linéaires des solutions de l'équation non linéaire.

Puis la transposition de la théorie de Dirac en algèbre de Clifford de l'espace physique à trois dimensions [7], a amené à étudier l'invariance relativiste de la théorie [8], ce qui a remis en évidence les avantages de l'équation homogène non linéaire.

On utilisera ici ces derniers travaux et l'algèbre d'espace, ce qui revient, pour résoudre les équations d'onde, à utiliser non pas la représentation usuelle [3]-[5], mais les spineurs de Weyl, qui, comme l'a souvent montré G. Lochak dans sa théorie du monopôle, sont bien plus fondamentaux que ceux de la représentation usuelle. Avec les spineurs de Weyl, à deux composantes complexes :

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

on forme la matrice 2×2 à coefficients complexes :

$$\phi = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \xi & -i\sigma_2\eta^* \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix} \tag{2}$$

où l'on note z^* le nombre complexe conjugué de z. ϕ est une fonction de l'espace-temps à valeur dans l'algèbre de Pauli des matrices complexes 2×2, qui est isomorphe, en tant qu'algèbre sur le corps des réels, à l'algèbre de Clifford de l'espace physique. On y utilise une conjugaison, qui associe à ϕ le $\widehat{\phi}$ tel que :

$$\widehat{\phi} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \eta & -i\sigma_2\xi^* \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \eta_1 & -\xi_2^* \\ \eta_2 & \xi_1^* \end{pmatrix} \tag{3}$$

Cette conjugaison vérifie, pour tout A et tout B de l'algèbre de Pauli :

$$\widehat{A+B} = \widehat{A} + \widehat{B} \quad ; \quad \widehat{AB} = \widehat{A}\widehat{B} \tag{4}$$

L'angle d'Yvon-Takabayasi β vérifie :

$$\rho e^{i\beta} = \Omega_1 + i\Omega_2 = 2\eta^\dagger \xi = \det(\phi). \tag{5}$$

L'équation d'onde homogène non linéaire, qui est à résoudre, s'écrit [7] :

$$\nabla\widehat{\phi} + qA\widehat{\phi}\sigma_{12} + me^{-i\beta}\phi\sigma_{12} = 0 \tag{6}$$

où l'on a :

$$\begin{aligned} &\nabla = \partial_0 - \vec{\partial}\ ; \quad \vec{\partial} = \sigma_1\partial_1 + \sigma_2\partial_2 + \sigma_3\partial_3\ ; \quad \sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 \\ &A = A^0 + \vec{A}\ ; \quad \vec{A} = A^1\sigma_1 + A^2\sigma_2 + A^3\sigma_3. \end{aligned} \tag{7}$$

Les σ_j sont les matrices de Pauli, A^0 est le potentiel électrique et les A^j sont les composantes du potentiel vecteur. Lorsque β est nul, ou assez petit pour être négligeable, l'équation non linéaire (6) se réduit à :

$$\nabla\widehat{\phi} + qA\widehat{\phi}\sigma_{12} + m\phi\sigma_{12} = 0 \tag{8}$$

qui est la forme prise, en algèbre de Pauli, par l'équation de Dirac, avec :

$$q = \frac{e}{\hbar c}\ ; \quad m = \frac{m_0 c}{\hbar} \tag{9}$$

2 - Séparation des variables en coordonnées sphériques.

Pour résoudre les équations (6) ou (8), dans le cas de l'atome d'hydrogène, on utilise la méthode de séparation des variables de H. Krüger [9], en coordonnées sphériques :

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi \quad ; \quad x^2 = r\sin\theta\sin\varphi \quad ; \quad x^3 = r\cos\theta \tag{10}$$

On utilise les notations suivantes :

$$i_1 = \sigma_{23} = i\sigma_1\ ; \quad i_2 = \sigma_{31} = i\sigma_2\ ; \quad i_3 = \sigma_{12} = i\sigma_3 \tag{11}$$

$$S = e^{-\frac{\varphi}{2}i_3}e^{-\frac{\theta}{2}i_2}\ ; \quad \Omega = r^{-1}(\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}S \tag{12}$$

$$\vec{\partial}' = \sigma_3\partial_r + \frac{1}{r}\sigma_1\partial_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\sigma_2\partial_\varphi \tag{13}$$

H. Krüger a obtenu l'identité remarquable :

$$\vec{\partial} = \Omega \vec{\partial}' \Omega^{-1} \tag{14}$$

qui, avec :

$$\nabla' = \partial_0 - \vec{\partial}' = \partial_0 - (\sigma_3 \partial_r + \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \sigma_2 \partial_\varphi) \tag{15}$$

donne aussi

$$\Omega^{-1} \nabla = \nabla' \Omega^{-1} \tag{16}$$

Dans les équations d'onde (6) ou (8), on sépare la variable temporelle $x^0 = ct$ et la variable angulaire φ de la variable radiale r et de la variable angulaire θ en posant :

$$\phi = \Omega X e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta) i_3} \tag{17}$$

où X est une fonction, à valeur dans l'algèbre de Pauli, de r et θ seuls, $\hbar cE$ est l'énergie de l'électron, δ est une phase arbitraire fixe qui ne joue aucun rôle puisque les équations (6) et (8) sont invariantes de jauge électrique. λ est une constante réelle. On a alors :

$$\Omega^{-1} \phi = X e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta) i_3} \tag{18}$$

$$\Omega^{-1} \widehat{\phi} = \widehat{X} e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta) i_3} \tag{19}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \rho e^{i\beta} &= \det(\phi) = \det(\Omega) \det(X) \det[e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta) i_3}] \\ \det(\Omega) &= r^{-2} (\sin\theta)^{-1} \ ; \quad \det[e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta) i_3}] = 1 \\ \rho e^{i\beta} &= \frac{\det(X)}{r^2 \sin\theta} \end{aligned} \tag{20}$$

Donc, si l'on pose :

$$\rho_X e^{i\beta_X} = \det(X) \tag{21}$$

on obtient :

$$\rho = \frac{\rho_X}{r^2 \sin\theta} \ ; \quad \beta = \beta_X \tag{22}$$

Ainsi, avec la forme (17) pour l'onde, l'angle d'Yvon-Takabayasi ne dépend pas du temps ni de l'angle φ, seulement de r et de θ. C'est pourquoi la séparation des variables, pour le cas linéaire ou pour le cas non linéaire, peut commencer de la même manière. On a :

$$\nabla'\Omega^{-1}\widehat{\phi} = (\partial_0 - \sigma_3\partial_r - \frac{1}{r}\sigma_1\partial_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\sigma_2\partial_\varphi)[\widehat{X}e^{(\lambda\varphi - Ex^0+\delta)i_3}] \quad (23)$$

$$\partial_0(\widehat{X}e^{(\lambda\varphi - Ex^0+\delta)i_3}) = -E\widehat{X}i_3e^{(\lambda\varphi - Ex^0+\delta)i_3} \quad (24)$$

$$\partial_r(\widehat{X}e^{(\lambda\varphi - Ex^0+\delta)i_3}) = (\partial_r\widehat{X})e^{(\lambda\varphi - Ex^0+\delta)i_3} \quad (25)$$

$$\partial_\theta(\widehat{X}e^{(\lambda\varphi - Ex^0+\delta)i_3}) = (\partial_\theta\widehat{X})e^{(\lambda\varphi - Ex^0+\delta)i_3} \quad (26)$$

$$\partial_\varphi(\widehat{X}e^{(\lambda\varphi - Ex^0+\delta)i_3}) = \lambda\widehat{X}i_3e^{(\lambda\varphi - Ex^0+\delta)i_3} \quad (27)$$

On obtient donc :

$$\nabla\widehat{\phi} = \Omega(-E\widehat{X}i_3 - \sigma_3\partial_r\widehat{X} - \frac{1}{r}\sigma_1\partial_\theta\widehat{X} - \frac{\lambda}{r\sin\theta}\sigma_2\widehat{X}i_3)e^{(\lambda\varphi - Ex^0+\delta)i_3}. \quad (28)$$

Pour l'atome d'hydrogène, on a :

$$qA = qA^0 = -\frac{\alpha}{r}\ ;\quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (29)$$

où α est la constante de structure fine. On a :

$$\begin{aligned} qA\widehat{\phi}\sigma_{12} &= -\frac{\alpha}{r}\widehat{\phi}i_3 = -\frac{\alpha}{r}\Omega\widehat{X}e^{(\lambda\varphi - Ex^0+\delta)i_3}i_3 \\ &= \Omega(-\frac{\alpha}{r}\widehat{X}i_3)e^{(\lambda\varphi - Ex^0+\delta)i_3} \end{aligned} \quad (30)$$

L'équation homogène non linéaire (6) devient donc

$$-E\widehat{X}i_3 - \sigma_3\partial_r\widehat{X} - \frac{1}{r}\sigma_1\partial_\theta\widehat{X} - \frac{\lambda}{r\sin\theta}\sigma_2\widehat{X}i_3 - \frac{\alpha}{r}\widehat{X}i_3 + me^{-i\beta}Xi_3 = 0 \quad (31)$$

c'est-à-dire :

$$(E + \frac{\alpha}{r})\widehat{X}i_3 + \sigma_3\partial_r\widehat{X} + \frac{1}{r}\sigma_1\partial_\theta\widehat{X} + \frac{\lambda}{r\sin\theta}\sigma_2\widehat{X}i_3 = me^{-i\beta}Xi_3 \quad (32)$$

tandis que l'équation de Dirac donne :

$$(E + \frac{\alpha}{r})\widehat{X}i_3 + \sigma_3\partial_r\widehat{X} + \frac{1}{r}\sigma_1\partial_\theta\widehat{X} + \frac{\lambda}{r\sin\theta}\sigma_2\widehat{X}i_3 = mXi_3 \quad (33)$$

On pose maintenant :

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b}^* \\ \mathbf{c} & \mathbf{d}^* \end{pmatrix} \quad (34)$$

où **a**, **b**, **c**, **d** sont des fonctions à valeur complexe des variables réelles r et θ. On a alors :

$$\widehat{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{d} & -\mathbf{c}^* \\ \mathbf{b} & \mathbf{a}^* \end{pmatrix} \tag{35}$$

On obtient ensuite :

$$e^{-i\beta} X i_3 = i e^{-i\beta} X \sigma_3 = i e^{-i\beta} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{c} & -\mathbf{d}^* \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$\widehat{X} i_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{d} & -\mathbf{c}^* \\ \mathbf{b} & \mathbf{a}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\mathbf{d} & i\mathbf{c}^* \\ i\mathbf{b} & -i\mathbf{a}^* \end{pmatrix} \tag{37}$$

$$\sigma_3 \partial_r \widehat{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_r \mathbf{d} & -\partial_r \mathbf{c}^* \\ \partial_r \mathbf{b} & \partial_r \mathbf{a}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_r \mathbf{d} & -\partial_r \mathbf{c}^* \\ -\partial_r \mathbf{b} & -\partial_r \mathbf{a}^* \end{pmatrix} \tag{38}$$

$$\sigma_1 \partial_\theta \widehat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\theta \mathbf{d} & -\partial_\theta \mathbf{c}^* \\ \partial_\theta \mathbf{b} & \partial_\theta \mathbf{a}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\theta \mathbf{b} & \partial_\theta \mathbf{a}^* \\ \partial_\theta \mathbf{d} & -\partial_\theta \mathbf{c}^* \end{pmatrix} \tag{39}$$

$$\sigma_2 \widehat{X} i_3 = i_2 \widehat{X} \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} & -\mathbf{c}^* \\ \mathbf{b} & \mathbf{a}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} & -\mathbf{a}^* \\ -\mathbf{d} & -\mathbf{c}^* \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Donc l'équation non linéaire (32) devient :

$$\begin{aligned} &(E + \frac{\alpha}{r}) \begin{pmatrix} i\mathbf{d} & i\mathbf{c}^* \\ i\mathbf{b} & -i\mathbf{a}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_r \mathbf{d} & -\partial_r \mathbf{c}^* \\ -\partial_r \mathbf{b} & -\partial_r \mathbf{a}^* \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \partial_\theta \mathbf{b} & \partial_\theta \mathbf{a}^* \\ \partial_\theta \mathbf{d} & -\partial_\theta \mathbf{c}^* \end{pmatrix} \\ &+ \frac{\lambda}{r \sin\theta} \begin{pmatrix} \mathbf{b} & -\mathbf{a}^* \\ -\mathbf{d} & -\mathbf{c}^* \end{pmatrix} = i m e^{-i\beta} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{c} & -\mathbf{d}^* \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{41}$$

En conjuguant les équations avec *, on obtient le système :

$$\begin{aligned} i(E + \frac{\alpha}{r})\mathbf{d} + \partial_r \mathbf{d} + \frac{1}{r}(\partial_\theta + \frac{\lambda}{\sin\theta})\mathbf{b} &= i m e^{-i\beta} \mathbf{a} \\ -i(E + \frac{\alpha}{r})\mathbf{c} - \partial_r \mathbf{c} + \frac{1}{r}(\partial_\theta - \frac{\lambda}{\sin\theta})\mathbf{a} &= -i m e^{i\beta} \mathbf{b} \\ i(E + \frac{\alpha}{r})\mathbf{b} - \partial_r \mathbf{b} + \frac{1}{r}(\partial_\theta - \frac{\lambda}{\sin\theta})\mathbf{d} &= i m e^{-i\beta} \mathbf{c} \\ -i(E + \frac{\alpha}{r})\mathbf{a} + \partial_r \mathbf{a} + \frac{1}{r}(\partial_\theta + \frac{\lambda}{\sin\theta})\mathbf{c} &= -i m e^{i\beta} \mathbf{d} \end{aligned} \tag{42}$$

En outre, on a :

$$\rho e^{i\beta} = \det(\phi) = \frac{\det(X)}{r^2 \sin\theta} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{d}^* + \mathbf{c}\mathbf{b}^*}{r^2 \sin\theta} \tag{43}$$

donc on obtient :

$$e^{i\beta} = \frac{\mathbf{ad}^* + \mathbf{cb}^*}{|\mathbf{ad}^* + \mathbf{cb}^*|} \tag{44}$$

Pour les quatre équations (42) il y a seulement deux opérateurs angulaires, donc on pose :

$$\mathbf{a} = AU \ ; \quad \mathbf{b} = BV \ ; \quad \mathbf{c} = CV \ ; \quad \mathbf{d} = DU \tag{45}$$

où A, B, C et D sont des fonctions de r tandis que U et V sont des fonctions de θ. Le système (42) devient :

$$\begin{aligned} i(E+\frac{\alpha}{r})DU + D'U + \frac{1}{r}(V' + \frac{\lambda}{\sin\theta}V)B &= ime^{-i\beta}AU \\ -i(E+\frac{\alpha}{r})CV - C'V + \frac{1}{r}(U' - \frac{\lambda}{\sin\theta}U)A &= -ime^{i\beta}BV \\ i(E+\frac{\alpha}{r})BV - B'V + \frac{1}{r}(U' - \frac{\lambda}{\sin\theta}U)D &= ime^{-i\beta}CV \\ -i(E+\frac{\alpha}{r})AU + A'U + \frac{1}{r}(V' + \frac{\lambda}{\sin\theta}V)C &= -ime^{i\beta}DU \end{aligned} \tag{46}$$

Donc s'il existe une constante κ telle que :

$$U' - \frac{\lambda}{\sin\theta}U = -\kappa V \ ; \quad V' + \frac{\lambda}{\sin\theta}V = \kappa U \tag{47}$$

le système (46) devient :

$$\begin{aligned} i(E+\frac{\alpha}{r})D + D' + \frac{\kappa}{r}B &= ime^{-i\beta}A \\ -i(E+\frac{\alpha}{r})C - C' - \frac{\kappa}{r}A &= -ime^{i\beta}B \\ i(E+\frac{\alpha}{r})B - B' - \frac{\kappa}{r}D &= ime^{-i\beta}C \\ -i(E+\frac{\alpha}{r})A + A' + \frac{\kappa}{r}C &= -ime^{i\beta}D \end{aligned} \tag{48}$$

Pour obtenir le système d'équations issu de l'équation de Dirac, par le même procédé, il suffit de remplacer β par 0, ce qui ne change pas le système angulaire (47), tandis qu'à la place de (48) on obtient le système :

$$\begin{aligned} i(E+\frac{\alpha}{r})D+D'+\frac{\kappa}{r}B &= imA \\ -i(E+\frac{\alpha}{r})C-C'-\frac{\kappa}{r}A &= -imB \\ i(E+\frac{\alpha}{r})B-B'-\frac{\kappa}{r}D &= imC \\ -i(E+\frac{\alpha}{r})A+A'+\frac{\kappa}{r}C &= -imD \end{aligned} \tag{49}$$

3 - Opérateurs de moment cinétique et système angulaire.

On a établi en [6] la forme que prennent, en algèbre d'espace-temps, les opérateurs de moment cinétique. En algèbre d'espace (ou de Pauli), on a :

$$J_1\phi = (d_1+\frac{1}{2}\sigma_{23})\phi\sigma_{21} \ ; \quad d_1 = x^2\partial_3 - x^3\partial_2 = -\sin\varphi\ \partial_\theta - \frac{\cos\varphi}{\tan\theta}\partial_\varphi \tag{50}$$

$$J_2\phi = (d_2+\frac{1}{2}\sigma_{31})\phi\sigma_{21} \ ; \quad d_2 = x^3\partial_1 - x^1\partial_3 = \cos\varphi\ \partial_\theta - \frac{\sin\varphi}{\tan\theta}\partial_\varphi \tag{51}$$

$$J_3\phi = (d_3+\frac{1}{2}\sigma_{12})\phi\sigma_{21} \ ; \quad d_3 = x^1\partial_2 - x^2\partial_1 = \partial_\varphi \tag{52}$$

Et l'on a bien sûr par ailleurs

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2. \tag{53}$$

On obtient alors :

$$J_3\phi = m\phi \Longleftrightarrow \phi = \phi(x^0,\ r,\ \theta)e^{m\varphi i_3} \tag{54}$$

Donc l'onde ϕ ayant la forme (17) est vecteur propre de l'opérateur J_3 et λ est le nombre quantique magnétique. De plus, toujours pour une onde ϕ ayant la forme (17), on a :

$$J^2\phi = j(j+1)\phi \Longleftrightarrow \partial^2_{\theta\theta}X + [(j+\frac{1}{2})^2 - \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta}]X - \lambda\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\sigma_{12}X\sigma_{12} = 0 \tag{55}$$

Or (47) implique, au second ordre

$$0 = U'' + (\kappa^2 - \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta})U + \lambda\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}U \tag{56}$$

$$0 = V'' + (\kappa^2 - \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta})V - \lambda\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}V \tag{57}$$

$$0 = \partial^2_{\theta\theta}X + (\kappa^2 - \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta})X - \lambda\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\sigma_{12}X\sigma_{12} \tag{58}$$

Par conséquent ϕ est une valeur propre de J^2, avec la valeur propre $j(j+1)$, si et seulement si :

$$\kappa^2 = (j + \frac{1}{2})^2 \ ; \quad |\kappa| = j + \frac{1}{2} \ ; \quad j = |\kappa| - \frac{1}{2} \tag{59}$$

Avec (12) et (17) nous pouvons voir que le changement de φ en $\varphi + 2\pi$ conserve la valeur de l'onde si et seulement si λ est à valeur demi-impaire. Les résultats généraux sur les opérateurs de moment cinétique imposent alors :

$$j = \frac{1}{2}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{5}{2}, \ \cdots \ ; \quad \kappa = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \cdots \ ; \quad \lambda = -j, \ -j+1, \ \cdots \ j-1, \ j. \tag{60}$$

Pour résoudre le système angulaire, si $\lambda > 0$ on pose, avec $C = C(\theta)$:

$$\begin{aligned} U &= \sin^\lambda\theta[\sin(\frac{\theta}{2})C' - (\kappa + \frac{1}{2} - \lambda)\cos(\frac{\theta}{2})C] \\ V &= \sin^\lambda\theta[\cos(\frac{\theta}{2})C' + (\kappa + \frac{1}{2} - \lambda)\sin(\frac{\theta}{2})C] \end{aligned} \tag{61}$$

Si $\lambda < 0$ on pose :

$$\begin{aligned} U &= \sin^{-\lambda}\theta[\cos(\frac{\theta}{2})C' + (\kappa + \frac{1}{2} + \lambda)\sin(\frac{\theta}{2})C] \\ V &= \sin^{-\lambda}\theta[-\sin(\frac{\theta}{2})C' + (\kappa + \frac{1}{2} + \lambda)\cos(\frac{\theta}{2})C] \end{aligned} \tag{62}$$

Le système angulaire (47) est alors équivalent [2] à l'équation différentielle :

$$0 = C'' + \frac{2|\lambda|}{\tan\theta}C' + [(\kappa + \frac{1}{2})^2 - \lambda^2]C \tag{63}$$

Le changement de variable :

$$z = \cos\theta \ ; \quad f(z) = C[\theta(z)] \tag{64}$$

donne alors l'équation différentielle des polynômes de Gegenbauer :

$$0 = f''(z) - \frac{1+2|\lambda|}{1-z^2} z f'(z) + \frac{(\kappa+\frac{1}{2})^2 - \lambda^2}{1-z^2} f(z) \tag{65}$$

Et on obtient, comme seule solution intégrable :

$$\frac{C(\theta)}{C(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2})_n (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_n}{(\frac{1}{2} + |\lambda|)_n n!} \sin^{2n}(\frac{\theta}{2}) \tag{66}$$

avec :

$$(a)_0 = 1\,, \qquad (a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1) \tag{67}$$

Le facteur $C(0)$ est un facteur de U et V, donc sa phase peut être absorbée par le δ de (17), et son amplitude peut être reportée sur les fonctions radiales. Donc on peut prendre $C(0) = 1$, ce qui donne :

$$C(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2})_n (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_n}{(\frac{1}{2} + |\lambda|)_n n!} \sin^{2n}(\frac{\theta}{2})\,. \tag{68}$$

Etant donné les conditions (60) sur λ et κ, il existe toujours un entier n tel que

$$|\lambda| + n = |\kappa + \frac{1}{2}| \tag{69}$$

ce qui fait de la série dans (68) une somme finie, donc U et V sont intégrables. Et comme U et V sont à valeur réelle, on a :

$$e^{i\beta} = \frac{AD^*U^2 + CB^*V^2}{|AD^*U^2 + CB^*V^2|} \tag{70}$$

4 - Résolution du système radial linéaire

On effectue le changement de variable radiale :

$$x = mr\ ; \quad \epsilon = \frac{E}{m}\ ; \quad a(x) = A(r) = A(\frac{x}{m}) \tag{71}$$
$$b(x) = B(r)\ ; \quad c(x) = C(r)\ ; \quad d(x) = D(r)$$

de sorte que le système radial (49) devient :

$$\begin{aligned} i(\epsilon+\frac{\alpha}{x})d+d'+\frac{\kappa}{x}b&=ia\\ -i(\epsilon+\frac{\alpha}{x})c-c'-\frac{\kappa}{x}a&=-ib\\ i(\epsilon+\frac{\alpha}{x})b-b'-\frac{\kappa}{x}d&=ic\\ -i(\epsilon+\frac{\alpha}{x})a+a'+\frac{\kappa}{x}c&=-id \end{aligned} \tag{72}$$

En ajoutant et en retranchant, on obtient :

$$\begin{aligned} i(\epsilon+\frac{\alpha}{x})(d-c)+(d-c)'-\frac{\kappa}{x}(a-b)&=i(a-b)\\ -i(\epsilon+\frac{\alpha}{x})(a-b)+(a-b)'-\frac{\kappa}{x}(d-c)&=-i(d-c)\\ i(\epsilon+\frac{\alpha}{x})(c+d)+(c+d)'+\frac{\kappa}{x}(a+b)&=i(a+b)\\ i(\epsilon+\frac{\alpha}{x})(a+b)-(a+b)'-\frac{\kappa}{x}(c+d)&=i(c+d) \end{aligned} \tag{73}$$

Puis on pose :

$$\begin{aligned} a-b=F_-+iG_-\ ;\quad a+b=F_++iG_+\\ d-c=F_--iG_-\ ;\quad c+d=F_+-iG_+ \end{aligned} \tag{74}$$

En ajoutant et en retranchant les équations de (73), puis en divisant par i les équations où i est en facteur, on obtient les deux systèmes séparés :

$$\begin{aligned} (-1+\epsilon+\frac{\alpha}{x})F_--G'_--\frac{\kappa}{x}G_-&=0\\ (1+\epsilon+\frac{\alpha}{x})G_-+F'_--\frac{\kappa}{x}F_-&=0 \end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned} (-1+\epsilon+\frac{\alpha}{x})F_+-G'_++\frac{\kappa}{x}G_+&=0\\ (1+\epsilon+\frac{\alpha}{x})G_++F'_++\frac{\kappa}{x}F_+&=0 \end{aligned} \tag{76}$$

Ces deux systèmes s'échangent en remplaçant $-$ par $+$ et en changeant κ en $-\kappa$, donc il suffit d'étudier l'un des deux systèmes. On pose maintenant :

$$F_-=\sqrt{1+\epsilon}\ e^{-\Lambda x}(\varphi_1+\varphi_2)\ ;\quad \Lambda=\sqrt{1-\epsilon^2} \tag{77}$$

$$G_-=\sqrt{1-\epsilon}\ e^{-\Lambda x}(\varphi_1-\varphi_2)$$

En divisant la première des deux équations (75) par $\sqrt{1-\epsilon}\ e^{-\Lambda x}$ et la seconde par $\sqrt{1+\epsilon}\ e^{-\Lambda x}$, on obtient :

$$\begin{aligned} -\Lambda(\varphi_1+\varphi_2)+\frac{\alpha}{x}\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}(\varphi_1+\varphi_2)+\Lambda(\varphi_1-\varphi_2)-\varphi_1'+\varphi_2'-\frac{\kappa}{x}(\varphi_1-\varphi_2)=0 \\ \Lambda(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{\alpha}{x}\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}(\varphi_1-\varphi_2)-\Lambda(\varphi_1+\varphi_2)+\varphi_1'+\varphi_2'-\frac{\kappa}{x}(\varphi_1+\varphi_2)=0 \end{aligned} \tag{78}$$

Or on a :

$$\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}=\frac{1+\epsilon}{\Lambda}\ ;\quad \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}=\frac{1-\epsilon}{\Lambda} \tag{79}$$

et on pose :

$$c_1=\frac{\alpha}{\Lambda}\ ;\quad c_2=\frac{\alpha\epsilon}{\Lambda}. \tag{80}$$

On obtient alors, en ajoutant et en retranchant les équations de (78) :

$$\begin{aligned} -2\Lambda\varphi_2+\frac{c_1-\kappa}{x}\varphi_1+\frac{c_2}{x}\varphi_2+\varphi_2'=0 \\ \frac{c_1+\kappa}{x}\varphi_2+\frac{c_2}{x}\varphi_1-\varphi_1'=0 \end{aligned} \tag{81}$$

On effectue ensuite le changement de variable :

$$z=2\Lambda x\ ;\quad f_1(z)=\varphi_1(x)\ ;\quad f_2(z)=\varphi_2(x) \tag{82}$$

ce qui met le système (81) sous la forme :

$$\begin{aligned} -f_2+\frac{c_1-\kappa}{z}f_1+\frac{c_2}{z}f_2+f_2'=0 \\ \frac{c_1+\kappa}{z}f_2+\frac{c_2}{z}f_1-f_1'=0 \end{aligned} \tag{83}$$

Puis on développe en séries :

$$f_1(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m\ ;\quad f_2(z)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m z^m \tag{84}$$

Le système (83) donne, pour les coefficients de z^{-1} :

$$\begin{aligned} (c_1-\kappa)a_0+(c_2+s)b_0=0 \\ (c_2-s)a_0+(c_1+\kappa)b_0=0 \end{aligned} \tag{85}$$

Il n'y a de solution non nulle que si le déterminant de ce système est nul :

$$0 = \begin{vmatrix} c_1 - \kappa & c_2 + s \\ c_2 - s & c_1 + \kappa \end{vmatrix} = c_1^2 - \kappa^2 - c_2^2 + s^2 \tag{86}$$

Or on a, avec (77) et (80) :

$$c_1^2 - c_2^2 = \alpha^2 \tag{87}$$

Donc on obtient :

$$0 = \alpha^2 + s^2 - \kappa^2 \ ; \quad s^2 = \kappa^2 - \alpha^2 \tag{88}$$

On doit prendre :

$$s = \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2} \tag{89}$$

pour que l'onde soit intégrable à l'origine. Dans ce cas le système (85) se réduit à :

$$b_0 = \frac{\kappa - c_1}{c_2 + s} a_0 = \frac{s - c_2}{c_1 + \kappa} a_0 \tag{90}$$

Le système (83) donne, pour les coefficients de z^{m-1}, le système :

$$\begin{aligned} -b_{m-1} + (c_1 - \kappa) a_m + (c_2 + s + m) b_m &= 0 \\ (c_1 + \kappa) b_m + (c_2 - s - m) a_m &= 0 \end{aligned} \tag{91}$$

Cette dernière équation donne :

$$a_m = \frac{c_1 + \kappa}{-c_2 + s + m} b_m \tag{92}$$

donc la première devient :

$$\begin{aligned} &- b_{m-1} + (c_1 - \kappa) \frac{c_1 + \kappa}{-c_2 + s + m} b_m + (c_2 + s + m) b_m = 0 \\ &[(c_1 - \kappa)(c_1 + \kappa) + (s + m)^2 - c_2^2]) b_m = (-c_2 + s + m) b_{m-1} \end{aligned} \tag{93}$$

ce qui, avec (86), nous donne :

$$b_m = \frac{-c_2 + s + m}{(2s + m)m} b_{m-1} = \frac{(-c_2 + s + 1)_m}{(2s + 1)_m m!} b_0 \tag{94}$$

Et on a donc :

$$f_2(z) = b_0 z^s \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-c_2 + s + 1)_m}{(2s + 1)_m m!} z^m = b_0 z^s F(1 + s - c_2, \ 2s + 1, \ z) \tag{95}$$

où F est la fonction hypergéométrique. On a aussi :

$$b_m = \frac{-c_2+s+m}{c_1+\kappa}a_m \ ; \quad b_{m-1} = \frac{-c_2+s+m-1}{c_1+\kappa}a_{m-1} \tag{96}$$

La première des deux équations (91) devient :

$$-\frac{-c_2+s+m-1}{c_1+\kappa}a_{m-1}+(c_1-\kappa)a_m+(c_2+s+m)\frac{-c_2+s+m}{c_1+\kappa}a_m = 0 \tag{97}$$

qui entraîne :

$$a_m = \frac{-c_2+s-1+m}{(2s+m)m}a_{m-1} = \frac{(-c_2+s)_m}{(2s+1)_m m!}a_0 \tag{98}$$

Et on a donc :

$$f_1(z) = a_0 z^s \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-c_2+s)_m}{(2s+1)_m m!} z^m = a_0 z^s F(s-c_2,\ 2s+1,\ z) \tag{99}$$

Cette fonction hypergéométrique n'est intégrable que si la série est un polynôme, (à un coefficient près, c'est un polynôme de Laguerre) de degré n, c'est-à-dire s'il existe un entier n telque :

$$-c_2+s+n = 0 \tag{100}$$

$$s+n = \frac{\epsilon\alpha}{\Lambda} \tag{101}$$

ce qui donne, en élevant au carré ;

$$\begin{aligned} &(s+n)^2(1-\epsilon^2) = \epsilon^2\alpha^2 \\ &(s+n)^2 = [(s+n)^2+\alpha^2]\epsilon^2 \\ &\epsilon^2 = \frac{1}{1+\dfrac{\alpha^2}{(s+n)^2}} \end{aligned} \tag{102}$$

Et donc on obtient la formule des niveaux d'énergie de Sommerfeld :

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2}{(s+n)^2}}} \ ; \quad s = \sqrt{\kappa^2-\alpha^2} \ ; \quad |\kappa| = j+\frac{1}{2} \tag{103}$$

Avec (82), (90), (95) et (99), on obtient ensuite :

$$\varphi_1(x) = a_0(2\Lambda x)^s F(-n,\ 2s+1,\ 2\Lambda x) \tag{104}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{-na_0}{c_1+\kappa}(2\Lambda x)^s F(1-n,\ 2s+1,\ 2\Lambda x) \tag{105}$$

On pose maintenant, si $n > 0$:

$$P_1 = F(1-n,\ 2s+1,\ 2\Lambda x)\ ;\quad P_2 = F(-n,\ 2s+1,\ 2\Lambda x). \tag{106}$$

Et l'on obtient :

$$F_- = \frac{\sqrt{1+\epsilon}}{c_1+\kappa}a_0 e^{-\Lambda x}(2\Lambda x)^s[(c_1+\kappa)P_2 - nP_1] \tag{107}$$

$$G_- = \frac{\sqrt{1-\epsilon}}{c_1+\kappa}a_0 e^{-\Lambda x}(2\Lambda x)^s[(c_1+\kappa)P_2 + nP_1] \tag{108}$$

Posons ensuite :

$$a_1 = \frac{\sqrt{1+\epsilon}}{c_1+\kappa}a_0(2\Lambda)^s \tag{109}$$

On obtient finalement :

$$F_- = a_1 e^{-\Lambda x}x^s[(c_1+\kappa)P_2 - nP_1] \tag{110}$$

$$G_- = \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}a_1 e^{-\Lambda x}x^s[(c_1+\kappa)P_2 + nP_1] \tag{111}$$

Comme on passe de F_-, G_- à F_+, G_+ en remplaçant κ par $-\kappa$, on a de même :

$$F_+ = a_2 e^{-\Lambda x}x^s[(c_1-\kappa)P_2 - nP_1] \tag{112}$$

$$G_+ = \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}a_2 e^{-\Lambda x}x^s[(c_1-\kappa)P_2 + nP_1] \tag{113}$$

où a_2 est, comme a_1, une constante complexe quelconque.

5 - Calcul de l'angle d'Yvon-Takabayasi

On a, avec (70) et (71) :

$$e^{i\beta} = \frac{ad^*U^2 + cb^*V^2}{|ad^*U^2 + cb^*V^2|} \tag{114}$$

Avec (74) on obtient :

$$\begin{aligned} 2a &= F_+ + F_- + i(G_+ + G_-)\ ; \quad 2b = F_+ - F_- + i(G_+ - G_-) \\ 2d &= F_+ + F_- - i(G_+ + G_-)\ ; \quad 2c = F_+ - F_- - i(G_+ - G_-) \end{aligned} \tag{115}$$

Et l'on obtient :

$$\begin{aligned} &4(ad^*U^2 + cb^*V^2) \\ &= (F_+F_+^* + F_-F_-^* - G_+G_+^* - G_-G_-^*)(U^2 + V^2) \\ &+ (F_+F_-^* + F_-F_+^* - G_+G_-^* - G_-G_+^*)(U^2 - V^2) \\ &+ i(F_+G_+^* + F_-G_-^* + G_+F_+^* + G_-F_-^*)(U^2 - V^2) \\ &+ i(F_+G_-^* + F_-G_+^* + G_+F_-^* + G_-F_+^*)(U^2 + V^2) \end{aligned} \tag{116}$$

Avec (110) à (113), on obtient ensuite, si $n > 0$:

$$\begin{aligned} &F_+F_+^* + F_-F_-^* - G_+G_+^* - G_-G_-^* \\ &= \frac{2}{1+\epsilon}e^{-2\Lambda x}x^{2s}\begin{pmatrix} (|a_1|^2 + |a_2|^2)[\epsilon(c_1^2 + \kappa^2)P_2^2 + \epsilon n^2P_1^2 - 2nc_1P_1P_2] \\ +(|a_2|^2 - |a_1|^2)2\kappa P_2(-\epsilon c_1P_2 + nP_1) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{117}$$

$$\begin{aligned} &F_+F_-^* + F_-F_+^* - G_+G_-^* - G_-G_+^* \\ &= e^{-2\Lambda x}x^{2s}(a_1a_2^* + a_2a_1^*)\begin{pmatrix} [(c_1 - \kappa)P_2 - nP_1][(c_1 + \kappa)P_2 - nP_1] \\ -\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}([(c_1 - \kappa)P_2 + nP_1][(c_1 + \kappa)P_2 + nP_1] \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{118}$$

$$\begin{aligned} &F_+G_+^* + F_-G_-^* + G_+F_+^* + G_-F_-^* \\ &= 2\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}e^{-2\Lambda x}x^{2s}\begin{pmatrix} |a_2|^2[(c_1 - \kappa)^2P_2^2 - n^2P_1^2] \\ +|a_1|^2[(c_1 + \kappa)^2P_2^2 - n^2P_1^2] \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{119}$$

$$\begin{aligned} &F_+G_-^* + F_-G_+^* + G_+F_-^* + G_-F_+^* \\ &= e^{-2\Lambda x}x^{2s}(a_1a_2^* + a_2a_1^*)\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\begin{pmatrix} [(c_1 - \kappa)P_2 - nP_1][(c_1 + \kappa)P_2 + nP_1] \\ +[(c_1 + \kappa)P_2 - nP_1][(c_1 - \kappa)P_2 + nP_1] \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{120}$$

Il y a une simplification importante, que l'on fera désormais, si :

$$a_1a_2^* + a_2a_1^* = 0 \tag{121}$$

Par ailleurs nous avons :

$$c_2 = s+n = \frac{\alpha\epsilon}{\Lambda}\ ;\quad c_1 = \frac{\alpha}{\Lambda} = \frac{s+n}{\epsilon} = \sqrt{(s+n)^2+\alpha^2} \tag{122}$$

On a : $s \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, donc $(s+n)^2 \geqslant s^2$, donc :

$$c_1 = \sqrt{(s+n)^2+\alpha^2} \geqslant \sqrt{s^2+\alpha^2} = \sqrt{\kappa^2} = |\kappa| \geqslant \pm\kappa \tag{123}$$

On a donc toujours :

$$c_1 - \kappa \geqslant 0\ ;\quad c_1+\kappa \geqslant 0 \tag{124}$$

Si l'on choisit de prendre :

$$|a_1|^2 = (c_1-\kappa)k\ ;\quad |a_2|^2 = (c_1+\kappa)k \tag{125}$$

où k est une constante réelle positive, on obtient :

$$\begin{aligned}&F_+F_+^* + F_-F_-^* - G_+G_+^* - G_-G_-^*\\ &= \frac{2k}{1+\epsilon}e^{-2\Lambda x}x^{2s}[2\epsilon c_1(c_1^2-\kappa^2)P_2^2 + 2\epsilon c_1 n^2 P_1^2 - 4n(c_1^2-\kappa^2)P_1P_2]\end{aligned} \tag{126}$$

Et comme :

$$c_1^2-\kappa^2 = n(n+2s)\ ;\quad \epsilon c_1 = s+n \tag{127}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}&F_+F_+^* + F_-F_-^* - G_+G_+^* - G_-G_-^*\\ &= \frac{4nk}{1+\epsilon}e^{-2\Lambda x}x^{2s}\Big((n+2s)[(s+n)P_2^2 - 2nP_1P_2] + n(s+n)P_1^2\Big)\\ &= \frac{4nk}{1+\epsilon}e^{-2\Lambda x}x^{2s}\left[(n+2s)(\sqrt{s+n}P_2 - \frac{n}{\sqrt{s+n}}P_1)^2 + \frac{ns^2}{s+n}P_1^2\right]\end{aligned} \tag{128}$$

Et ce terme, qui est une somme de deux carrés, est toujours positif, deux polynômes de Laguerre successifs n'ayant pas de zéro commun. Puis on obtient :

$$\begin{aligned}
&F_+G_+^* + F_-G_-^* + G_+F_+^* + G_-F_-^* \\
&= \frac{2\sqrt{1-\epsilon^2}}{1+\epsilon} e^{-2\Lambda x} x^{2s} \begin{pmatrix} |a_2|^2[(c_1-\kappa)^2P_2^2 - n^2P_1^2] \\ +|a_1|^2[(c_1+\kappa)^2P_2^2 - n^2P_1^2] \end{pmatrix} \\
&= \frac{4c_1\Lambda k}{1+\epsilon} e^{-2\Lambda x} x^{2s}[(c_1^2-\kappa^2)P_2^2 - n^2P_1^2] \\
&= \frac{4\alpha nk}{1+\epsilon} e^{-2\Lambda x} x^{2s}[(n+2s)P_2^2 - nP_1^2]
\end{aligned} \tag{129}$$

Ceci nous permet de mettre l'angle d'Yvon-Takabayasi sous la forme :

$$\tan\beta = \frac{\alpha[(2s+n)P_2^2 - nP_1^2]}{(n+2s)(\sqrt{s+n}P_2 - \frac{n}{\sqrt{s+n}}P_1)^2 + \frac{ns^2}{s+n}P_1^2} \times \frac{U^2-V^2}{U^2+V^2} \tag{130}$$

Le dénominateur ne contient que des sommes de carrés, qui ne s'annullent pas simultanément. Par conséquent, pour tous les états de nombre quantique $n > 0$, il existe une solution pour laquelle l'angle d'Yvon-Takabayasi β est partout défini. En outre, la présence, en facteur, de la constante de structure fine, qui est petite, fait que l'angle β est partout petit. On peut de plus établir que $U^2 - V^2$ est identiquement nul, pour toutes les valeurs possibles de κ et λ, dans le plan x^1Ox^2 [2]. Donc les solutions de l'équation linéaire de Dirac vérifiant les conditions (121) et (125) peuvent être les approximations linéaires des solutions de l'équation non linéaire.

6 - Cas particuliers des polynômes radiaux de degré zéro

Pour l'étude des solutions telles que les polynômes radiaux sont réduits à des constantes, on repartira directement de (72), en posant :

$$a = a_0e^{-\Lambda x}x^s \ ; \quad b = b_0e^{-\Lambda x}x^s \ ; \quad c = c_0e^{-\Lambda x}x^s \ ; \quad d = d_0e^{-\Lambda x}x^s \tag{131}$$

On obtient, à partir de (72) :

$$\begin{aligned}
&e^{-\Lambda x}(i\epsilon d_0x^s + i\alpha d_0x^{s-1} - \Lambda d_0x^s + sd_0x^{s-1} + \kappa b_0x^{s-1}) = ia_0e^{-\Lambda x}x^s \\
&e^{-\Lambda x}(-i\epsilon c_0x^s - i\alpha c_0x^{s-1} + \Lambda c_0x^s - sc_0x^{s-1} - \kappa a_0x^{s-1}) = -ib_0e^{-\Lambda x}x^s \\
&e^{-\Lambda x}(i\epsilon b_0x^s + i\alpha b_0x^{s-1} + \Lambda b_0x^s - sb_0x^{s-1} - \kappa d_0x^{s-1}) = ic_0e^{-\Lambda x}x^s \\
&e^{-\Lambda x}(-i\epsilon a_0x^s - i\alpha a_0x^{s-1} - \Lambda a_0x^s + sa_0x^{s-1} + \kappa c_0x^{s-1}) = -id_0e^{-\Lambda x}x^s
\end{aligned} \tag{132}$$

Ceci équivaut à l'ensemble formé par les quatre systèmes suivants :

$$\begin{aligned} \kappa b_0 + (i\alpha + s)d_0 &= 0 \\ (i\alpha - s)b_0 - \kappa d_0 &= 0 \end{aligned} \tag{133}$$

$$\begin{aligned} -\kappa a_0 - (i\alpha + s)c_0 &= 0 \\ -(i\alpha - s)a_0 + \kappa c_0 &= 0 \end{aligned} \tag{134}$$

$$\begin{aligned} -ia_0 + (i\epsilon - \Lambda)d_0 &= 0 \\ -(i\epsilon + \Lambda)a_0 + id_0 &= 0 \end{aligned} \tag{135}$$

$$\begin{aligned} ib_0 - (i\epsilon - \Lambda)c_0 &= 0 \\ (i\epsilon + \Lambda)b_0 - ic_0 &= 0 \end{aligned} \tag{136}$$

La nullité des déterminants de (133) et (134) nous redonne (88) et (89). La nullité des déterminants de (135) et (136) équivaut simplement à $\Lambda^2 = 1 - \epsilon^2$, qui découle de la définition de Λ. Chacun des systèmes (133) à (136) se réduit donc à une seule équation :

$$\begin{aligned} \kappa d_0 &= (i\alpha - s)b_0 \\ \kappa c_0 &= (i\alpha - s)a_0 \\ d_0 &= (\epsilon - i\Lambda)a_0 \\ b_0 &= (\epsilon + i\Lambda)c_0 \end{aligned} \tag{137}$$

On obtient alors :

$$\kappa d_0 = \kappa(\epsilon - i\Lambda)a_0 = (i\alpha - s)b_0 = (i\alpha - s)(\epsilon + i\Lambda)c_0 = \frac{(i\alpha - s)^2(\epsilon + i\Lambda)}{\kappa}a_0 \tag{138}$$

On n'a de solution non nulle que si :

$$\begin{aligned} \kappa(\epsilon - i\Lambda) &= \frac{(i\alpha - s)^2(\epsilon + i\Lambda)}{\kappa} \\ \kappa^2(\epsilon - i\Lambda)^2 &= (s - i\alpha)^2 \\ \kappa(\epsilon - i\Lambda) &= \pm(s - i\alpha) \end{aligned} \tag{139}$$

Comme ϵ, s, Λ et α sont positifs, on obtient finalement

$$|\kappa| = \frac{s}{\epsilon} = \frac{\alpha}{\Lambda} \tag{140}$$

Cette dernière égalité redonne la formule des niveaux d'énergie (103) avec $n = 0$. Mais comme κ intervient par sa valeur absolue, on peut aussi bien avoir $\kappa < 0$ que $\kappa > 0$. Or le calcul des solutions de C. G. Darwin, qui travaillait avec des constantes réelles, et non des constantes complexes à cet endroit du calcul, interdisait à κ d'être négatif, et c'était cela qui permettait, pour un nombre quantique principal $\mathbf{n} = n + |\kappa|$ donné, d'obtenir $\mathbf{n}(\mathbf{n}+1) + \mathbf{n}(\mathbf{n}-1) = 2\mathbf{n}^2$ états. Ce qui se passe en fait, c'est que changer κ de signe revient, dans le système angulaire (47) à changer V en $-V$. Or si l'on change de signe κ et V, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ sont invariants si $n = 0$, et l'onde est inchangée. Donc changer de signe κ n'apporte pas plus de solutions, et l'on peut donc se contenter des solutions avec $\kappa > 0$, dans le cas $n = 0$, ce qui permet d'obtenir le bon nombre d'états. Calculons maintenant l'angle β. On a :

$$ad^*U^2 + cb^*V^2 = e^{-2\Lambda x}x^{2s}(a_0d_0^*U^2 + c_0b_0^*V^2) \tag{141}$$

$$e^{i\beta} = \frac{a_0d_0^*U^2 + c_0b_0^*V^2}{|a_0d_0^*U^2 + c_0b_0^*V^2|} \tag{142}$$

Les égalités :

$$1 = (\frac{s}{\kappa})^2 + (\frac{\alpha}{\kappa})^2 \ ; \quad 1 = \epsilon^2 + \Lambda^2 \tag{143}$$

impliquent l'existence de deux angles θ_1 et θ_2 tels que :

$$s + i\alpha = \kappa e^{i\theta_1} \ ; \quad \epsilon + i\Lambda = e^{i\theta_2} \tag{144}$$

Les égalités (137) s'écrivent :

$$d_0 = -\kappa e^{-i\theta_1}b_0 = e^{-i\theta_2}a_0 \ ; \quad c_0 = -\kappa e^{-i\theta_1}a_0 = e^{-i\theta_2}b_0 \tag{145}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} a_0d_0^*U^2 + b_0c_0^*V^2 &= a_0(-\kappa e^{i\theta_1}b_0^*)U^2 + (-\kappa e^{-i\theta_1}a_0)b_0^*V^2 \\ &= -a_0b_0^*[(s+i\alpha)U^2 + (s-i\alpha)V^2] \\ &= -a_0b_0^*[s(U^2+V^2) + i\alpha(U^2-V^2)] \end{aligned} \tag{146}$$

En outre on a :

$$\begin{aligned} -a_0b_0^* &= -a_0(e^{i\theta_2}c_0)^* = -a_0e^{-i\theta_2 c_0} = -e^{-i\theta_2}a_0(-\kappa e^{-i\theta_1}a_0)^* \\ &= \kappa e^{-i\theta_2}a_0e^{i\theta_1}a_0^* = \kappa|a_0|^2e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned} \tag{147}$$

$$a_0 d_0^* U^2 + c_0 b_0^* V^2 = \kappa |a_0|^2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)} [s(U^2 + V^2) + i\alpha(U^2 - V^2)] \quad (148)$$

$$e^{i\beta} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \frac{s(U^2 + V^2) + i\alpha(U^2 - V^2)}{|s(U^2 + V^2) + i\alpha(U^2 - V^2)|} \quad (149)$$

Soit β_0 l'angle défini par :

$$\tan \beta_0 = \frac{\alpha}{s} \frac{U^2 - V^2}{U^2 + V^2} \quad (150)$$

On obtient :

$$\beta = \beta_0 + \theta_1 - \theta_2 \quad (151)$$

Chacun de ces angles est petit, donc l'angle d'Yvon-Takabayasi est, là aussi, partout défini et partout petit.

7 - Résolution approchée du système radial (48)

On effectue le changement de variable (71), donc (48) devient :

$$\begin{aligned} i(\epsilon + \frac{\alpha}{x})d + d' + \frac{\kappa}{x} b &= iae^{-i\beta} \\ -i(\epsilon + \frac{\alpha}{x})c - c' - \frac{\kappa}{x} a &= -ibe^{i\beta} \\ i(\epsilon + \frac{\alpha}{x})b - b' - \frac{\kappa}{x} d &= ice^{-i\beta} \\ -i(\epsilon + \frac{\alpha}{x})a + a' + \frac{\kappa}{x} c &= -ide^{i\beta} \end{aligned} \quad (152)$$

Puis on développe en série :

$$\begin{aligned} &a = e^{-\Lambda x} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{s+m} \; ; \quad b = e^{-\Lambda x} \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{s+m} \\ &c = e^{-\Lambda x} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{s+m} \; ; \quad d = e^{-\Lambda x} \sum_{m=0}^{\infty} d_m x^{s+m} \; ; \quad \Lambda = \sqrt{1 - \epsilon^2} \end{aligned} \quad (153)$$

Les coefficients de x^{s-1} donnent le système :

$$\begin{aligned} \kappa b_0 + (i\alpha + s)d_0 &= 0 \\ (i\alpha - s)b_0 - \kappa d_0 &= 0 \\ -\kappa a_0 - (i\alpha + s)c_0 &= 0 \\ -(i\alpha - s)a_0 - \kappa c_0 &= 0 \end{aligned} \quad (154)$$

Donc on obtient, comme précédemment, (89). Les coefficients de x^{s+m} donnent le système :

$$\begin{aligned}(i\epsilon-\Lambda)d_m+(i\alpha+s+m+1)d_{m+1}+\kappa b_{m+1}&=ie^{-i\beta}a_m\\(-i\epsilon+\Lambda)c_m-(i\alpha+s+m+1)c_{m+1}-\kappa a_{m+1}&=-ie^{i\beta}b_m\\(i\epsilon+\Lambda)b_m+(i\alpha-s-m-1)b_{m+1}-\kappa d_{m+1}&=ie^{-i\beta}c_m\\(-i\epsilon-\Lambda)a_m+(-i\alpha+s+m+1)a_{m+1}+\kappa c_{m+1}&=-ie^{i\beta}d_m\end{aligned}\tag{155}$$

ce qui donne les systèmes matriciels :

$$\begin{pmatrix}-\kappa & -(s+i\alpha+m+1)\\ s-i\alpha+m+1 & \kappa\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{m+1}\\ c_{m+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(i\epsilon-\Lambda)c_m-ie^{i\beta}b_m\\ (i\epsilon+\Lambda)a_m-ie^{i\beta}d_m\end{pmatrix}\tag{156}$$

$$\begin{pmatrix}-\kappa & -(s+i\alpha+m+1)\\ s-i\alpha+m+1 & \kappa\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{m+1}\\ d_{m+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(i\epsilon-\Lambda)d_m-ie^{-i\beta}a_m\\ (i\epsilon+\Lambda)b_m-ie^{-i\beta}c_m\end{pmatrix}\tag{157}$$

Soit

$$M=\begin{pmatrix}-\kappa & -(s+i\alpha+m+1)\\ s-i\alpha+m+1 & \kappa\end{pmatrix}\tag{158}$$

On a alors :

$$M^{-1}=\frac{1}{(m+1)(2s+m+1)}\begin{pmatrix}\kappa & s+i\alpha+m+1\\ -(s-i\alpha+m+1) & -\kappa\end{pmatrix}\tag{159}$$

En multipliant (156) et (157) par M^{-1}, on obtient :

$$\begin{aligned}a_{m+1}&=\frac{\kappa[(i\epsilon-\Lambda)c_m-ie^{i\beta}b_m]+(s+i\alpha+m+1)[(i\epsilon+\Lambda)a_m-ie^{i\beta}d_m]}{(m+1)(2s+m+1)}\\c_{m+1}&=\frac{-(s-i\alpha+m+1)[(i\epsilon-\Lambda)c_m-ie^{i\beta}b_m]-\kappa[(i\epsilon+\Lambda)a_m-ie^{i\beta}d_m]}{(m+1)(2s+m+1)}\end{aligned}\tag{160}$$

$$\begin{aligned}b_{m+1}&=\frac{\kappa[(i\epsilon-\Lambda)d_m-ie^{-i\beta}a_m]+(s+i\alpha+m+1)[(i\epsilon+\Lambda)b_m-ie^{-i\beta}c_m]}{(m+1)(2s+m+1)}\\d_{m+1}&=\frac{-(s-i\alpha+m+1)[(i\epsilon-\Lambda)d_m-ie^{-i\beta}a_m]-\kappa[(i\epsilon+\Lambda)b_m-ie^{-i\beta}c_m]}{(m+1)(2s+m+1)}\end{aligned}$$

Les séries de (153) sont finies, et les fonctions intégrables, s'il existe un entier m tel que :

$$a_{m+1}=b_{m+1}=c_{m+1}=d_{m+1}=0\tag{161}$$

Dans ce cas, et compte-tenu du fait que $\epsilon - i\Lambda$ est l'inverse de $\epsilon + i\Lambda$, le système (155) se réduit à :

$$a_m = e^{i\beta}(\epsilon + i\Lambda)b_m \tag{162}$$

$$a_m = e^{-i\beta}(\epsilon + i\Lambda)c_m \tag{163}$$

8 - Cas où les polynômes radiaux sont de degré un.

Le cas le plus simple, où les polynômes radiaux sont réduits à des constantes, a déjà été étudié [2], et conduit à la formule de Sommerfeld pour les niveaux d'énergie. On va donc examiner maintenant le cas suivant, où les polynômes radiaux sont des fonctions affines. On dispose alors de huit équations :

$$\kappa b_0 = -(s + i\alpha)d_0 \tag{164}$$

$$\kappa a_0 = -(s + i\alpha)c_0 \tag{165}$$

$$a_1 = \frac{\kappa[(i\epsilon - \Lambda)c_0 - ie^{i\beta}b_0] + (s + i\alpha + 1)[(i\epsilon + \Lambda)a_0 - ie^{i\beta}d_0]}{2s+1} \tag{166}$$

$$c_1 = \frac{-(s - i\alpha + 1)[(i\epsilon - \Lambda)c_0 - ie^{i\beta}b_0] - \kappa[(i\epsilon + \Lambda)a_0 - ie^{i\beta}d_0]}{2s+1} \tag{167}$$

$$b_1 = \frac{\kappa[(i\epsilon - \Lambda)d_0 - ie^{-i\beta}a_0] + (s + i\alpha + 1)[(i\epsilon + \Lambda)b_0 - ie^{-i\beta}c_0]}{2s+1} \tag{168}$$

$$d_1 = \frac{-(s - i\alpha + 1)[(i\epsilon - \Lambda)d_0 - ie^{-i\beta}a_0] - \kappa[(i\epsilon + \Lambda)b_0 - ie^{-i\beta}c_0]}{2s+1} \tag{169}$$

$$a_1 = e^{i\beta}(\epsilon + i\Lambda)b_1 \tag{170}$$

$$a_1 = e^{-i\beta}(\epsilon + i\Lambda)c_1 \tag{171}$$

On a par conséquent :

$$\begin{aligned}
&\kappa[(i\epsilon - \Lambda)c_0 - ie^{i\beta}b_0] + (s + i\alpha + 1)[(i\epsilon + \Lambda)a_0 - ie^{i\beta}d_0] \\
&= (2s+1)a_1 \\
&= e^{i\beta}(\epsilon + i\Lambda)(2s+1)d_1 \\
&= e^{i\beta}(\epsilon + i\Lambda)\Big(-(s - i\alpha + 1)[(i\epsilon - \Lambda)d_0 - ie^{-i\beta}a_0] - \kappa[(i\epsilon + \Lambda)b_0 - ie^{-i\beta}c_0]\Big)
\end{aligned} \tag{172}$$

$$\begin{aligned}&\kappa[(i\epsilon-\Lambda)d_0-ie^{-i\beta}a_0]+(s+i\alpha+1)[(i\epsilon+\Lambda)b_0-ie^{-i\beta}c_0]\\&=(2s+1)b_1\\&=e^{-i\beta}(\epsilon+i\Lambda)(2s+1)c_1\\&=e^{-i\beta}(\epsilon+i\Lambda)\Big(-(s-i\alpha+1)[(i\epsilon-\Lambda)c_0-ie^{i\beta}b_0]-\kappa[(i\epsilon+\Lambda)a_0-ie^{i\beta}d_0]\Big)\end{aligned}\tag{173}$$

Comme on a :

$$(\epsilon+i\Lambda)(i\epsilon+\Lambda)=i\ ;\quad(\epsilon+i\Lambda)(i\epsilon-\Lambda)=i[2\epsilon(\epsilon+i\Lambda)-1]\tag{174}$$

(172) devient :

$$\begin{aligned}&[(s+1+i\alpha)(i\epsilon+\Lambda)-(s+1-i\alpha)(i\epsilon-\Lambda)]a_0\\&=\begin{pmatrix}-e^{i\beta}(s+1-i\alpha)[2i\epsilon(\epsilon+i\Lambda)-i]\\+ie^{i\beta}(s+1+i\alpha)\end{pmatrix}d_0\end{aligned}\tag{175}$$

tandis que (173) devient :

$$\begin{aligned}&[(s+1+i\alpha)(i\epsilon+\Lambda)-(s+1-i\alpha)(i\epsilon-\Lambda)]b_0\\&=\begin{pmatrix}-e^{-i\beta}(s+1-i\alpha)[2i\epsilon(\epsilon+i\Lambda)-i]\\+ie^{-i\beta}(s+1+i\alpha)\end{pmatrix}c_0\end{aligned}\tag{176}$$

Puis on obtient, pour ces deux équations :

$$[\Lambda(s+1)-\alpha\epsilon]a_0=ie^{i\beta}d_0[s+1-\epsilon(s+1-i\alpha)(\epsilon+i\Lambda)]\tag{177}$$

$$[\Lambda(s+1)-\alpha\epsilon]b_0=ie^{-i\beta}c_0[s+1-\epsilon(s+1-i\alpha)(\epsilon+i\Lambda)]\tag{178}$$

Compte-tenu de (164) et (165), ceci nous donne :

$$-[\Lambda(s+1)-\alpha\epsilon]\frac{s+i\alpha}{\kappa}c_0=ie^{i\beta}d_0[s+1-\epsilon(s+1-i\alpha)(\epsilon+i\Lambda)]\tag{179}$$

$$-[\Lambda(s+1)-\alpha\epsilon]\frac{s+i\alpha}{\kappa}d_0=ie^{-i\beta}c_0[s+1-\epsilon(s+1-i\alpha)(\epsilon+i\Lambda)]\tag{180}$$

En divisant l'une par l'autre, on obtient :

$$\frac{c_0}{d_0}=\frac{e^{i\beta}d_0}{e^{-i\beta}c_0}\ ;\quad c_0^2=d_0^2e^{2i\beta}\ ;\quad c_0=\pm e^{i\beta}d_0\tag{181}$$

Et le système (179)-(180) se réduit à :

$$-[\Lambda(s+1)-\alpha\epsilon]\frac{s+i\alpha}{\kappa}\pm e^{i\beta}d_0 = ie^{i\beta}d_0[s+1-\epsilon(s+1-i\alpha)(\epsilon+i\Lambda)] \tag{182}$$

$$[\Lambda(s+1)-\alpha\epsilon](s+i\alpha) = \pm i\kappa[s+1-\epsilon(s+1-i\alpha)(\epsilon+i\Lambda)] \tag{183}$$

Ceci donne, en séparant les parties réelles et imagninaires :

$$0 = (\kappa\epsilon \pm s)[\Lambda(s+1)-\alpha\epsilon]\ ;\quad 0 = (\kappa\Lambda \pm \alpha)[\Lambda(s+1)-\alpha\epsilon] \tag{184}$$

ce qui est automatiquement vérifié si

$$\Lambda(s+1) = \alpha\epsilon \tag{185}$$

$$(1-\epsilon^2)(s+1)^2 = \alpha^2\epsilon^2 \tag{186}$$

$$\epsilon^2 = \frac{1}{1+\dfrac{\alpha^2}{(s+1)^2}} \tag{187}$$

ce qui donne la formule de Sommerfeld pour $n = 1$:

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2}{(s+1)^2}}}\ ;\quad s = \sqrt{\kappa^2-\alpha^2} \tag{188}$$

8 - Remarques de conclusion.

Il reste bien sûr à vérifier que l'on obtient aussi la formule de Sommerfeld pour $n > 1$. Comme l'angle d'Yvon-Takabayasi diminue quand n augmente, cela ne fait guère de doute, puisqu'on se rapproche du cas linéaire.

La formule obtenue pour les niveaux d'énergie ne rend pas compte de l'effet Lamb, qui, pour $n > 0$, donne une très petite différence entre les niveaux d'énergie suivant le signe de κ. Cette différence a été calculée, en utilisant les méthodes de la théorie quantique des champs, à partir des solutions de C.G. Darwin. Une partie de l'écart entre les niveaux d'énergie vient de la différence de comportement des fonctions radiales à l'origine. Si l'équation de Dirac est l'approximation linéaire de l'équation linéaire, si les solutions physiques sont approchées par les solutiions de l'équation de Dirac présentant un angle d'Yvon-Takabayasi partout défini et partout petit, alors les fonctions d'onde à l'origine diffèrent peu et le calcul de l'effet Lamb ne tient pas. Par ailleurs, il faut voir les calculs effectués aux paragraphes 7 et 8 comme des calculs approximatifs, parce que l'angle d'Yvon-Takabayasi calculé en (130), même s'il est très petit, n'est pas nul, est une fonction compliquée de r et de θ, ce qui doit introduire des termes correctifs, certes très petits,à la fois dans le processus de séparation des variables, et dans les relations de récurrence entre coefficients. Il reste donc théoriquement possible d'obtenir l'effet Lamb à partir de l'équation d'onde homogène non linéaire, avec un calcul encore plus fin que celui effectué ici.

L'étude des solutions de l'équation non linéaire montre qu'il est raisonnable de penser qu'il existe une famille de solutions, étiquetées par les nombres quantiques apparaissant dans la théorie de Dirac, et que ces solutions sont proches des solutions de l'équation linéaire pour lesquelles l'angle d'Yvon-Takabayasi est partout défini et partout petit. Mais les combinaisons linéaires de ces solutions n'ont aucune chance de pouvoir être des solutions, ou même seulement des approximations de solutions, par suite du caractère quadratique du déterminant. Les solutions étiquetées par les nombres quantiques κ, Λ, n, sont donc plausiblement les seules possibles de l'équation non linéaire, pour les états liés de l'atome d'hydrogène.

Références

[1] G. Lochak : *Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin* $\frac{1}{2}$. Ann. Fond. Louis de Broglie, **8** n° 4 1983 et **9** n° 1 1984

G. Lochak : *The symmetry between electricity and magnetism and the wave equation of a spin* $\frac{1}{2}$ *magnetic monopole.* Proceedings of the 4-th International Seminar on the Mathematical Theory of dynamical systems and Microphysics. CISM 1985

G. Lochak : *Wave equation for a magnetic monopole.* Int. J. of Th. Phys. **24** n°10 1985

G. Lochak : *Un monopôle magnétique dans le champ de Dirac (Etats magnétiques du champ de Majorana)* Ann. Fond. Louis de Broglie, **17** n°2 1992

G. Lochak : *L'équation de Dirac sur le cône de lumière : Électrons de Majorana et monopôles magnétiques*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **28** n° 3-4, 2003.

G. Lochak : *The equation of a light leptonic monopole and its experimental aspects*, Z. Naturforschung, **62a**, 231-246, 2007

G. Lochak : *Sur la présence d'un second photon dans la théorie de la lumière de Louis de Broglie*, **17**, p203, 1992.

[2] C. Daviau et G.Lochak : *Sur un modèle d'équation spinorielle non linéaire*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **16** n° 1 1991

C. Daviau : *Equation de Dirac non linéaire*, (Thèse de doctorat, Université de Nantes), 1993

C. Daviau : *Linear and Nonlinear Dirac Equation*, Found. of Phys., **23** n° 11, 1993

C. Daviau : *Remarques sur une équation de Dirac non linéaire*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **19** n° 4, 1994

C. Daviau : *Sur la résolution de l'équation de Dirac pour l'atome d'hydrogène*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **20** n° 1, 1995

[3] C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. A, vol. 118, 1928, p. 554.

[4] Louis de Broglie, *L'électron magnétique*, Hermann, Paris 1934

[5] M. E. Rose : *Relativistic electron theory*, John Wiley and sons, New York, London 1960

[6] C. Daviau : *Solutions of the Dirac equation and of a nonlinear Dirac equation for the Hydrogen Atom,* Int. Conference on the Theory of the Electron, Mexico 1995 Advances in Applied Clifford Algebras 7 (S), 1997, p.175-194.

[7] C. Daviau : *Dirac equation in the Clifford algebra of space*, in Clifford Algebras and their Application in Mathematical Physics, Aachen 1996, Kluwer, Dordrecht,

C. Daviau : *Sur l'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **22** n° 1 1997.

C. Daviau : *Sur les tenseurs de la théorie de Dirac en algèbre d'espace*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **23** n° 1 1998

C. Daviau : *Application à la théorie de la lumière de Louis de Broglie d'une réécriture de l'équation de Dirac*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **23** n° 3 - 4, 1998

C. Daviau : *Equations de Dirac et fermions fondamentaux*, première partie : Ann. Fond. Louis de Broglie, **24** n° 1 - 4, 1999 ; deuxième partie : **25** n° 1, 2000.

C. Daviau, *Vers une mécanique quantique sans nombre complexe*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **26** n° 1-3 2001

C. Daviau, *Sur une équation d'onde relativiste et ses solutions à symétrie interne*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **26** n° 4 2001

C. Daviau : *Chiral Dirac Equation*, in Clifford Algebras, Applications to Mathematics, Physics and Engineering, Rafal Ablamowicz Editor, Birkhäuser Boston 2004, p. 431-450

[8] C. Daviau : *Interprétation cinématique de l'onde de l'électron*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **30** $n°3-4$ 2005.

C. Daviau : *On the electromagnetism's invariance* Ann. Fond. Louis de Broglie, **33** $n°$ 1-2 2008.

C. Daviau : *Aspects particulaires de l'onde de Dirac* Ann. Fond. Louis de Broglie, **34** $n°$ 1 2009.

[9] H. Krüger : *New solutions of the Dirac equation for central fields*, in *The Electron*, D. Hestenes and A. Weingartshofer eds, Kluwer Academic Publishers, 49-81.

(Manuscrit reçu le 10 février 2010)