

*QUANTUM MECHANICS
IN THE GEOMETRY OF SPACE-TIME*

NOTES DE LECTURE

Quantum Mechanics in the Geometry of Space-Time, Elementary Theory – ROGER BOUDET, Springer Briefs in Physics, Berlin and Heidelberg, 2011 – 131 pages, ISBN: 978-3642191985 : 34 euros.

Tandis que la thèse de Louis de Broglie de 1924, introduisant l'onde associée au mouvement de toute particule matérielle, partait de considérations relativistes, la mécanique quantique s'est construite, sur le plan théorique, essentiellement à partir de l'équation d'onde non relativiste de Schrödinger (1926). La même année était faite l'hypothèse du spin de l'électron. Les progrès de la jeune mécanique quantique furent extrêmement rapides. Dès 1928 P.A.M. Dirac, partant de l'équation de Pauli, non relativiste, pour un électron à spin, trouva une équation d'onde relativiste. Cette équation d'onde, non seulement rend compatible la mécanique ondulatoire de l'électron avec la relativité restreinte, mais rend aussi compte du spin de l'électron. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, elle permet d'obtenir tous les nombres quantiques attendus par la spectroscopie, le bon nombre des états et les bons niveaux d'énergie.

Du point de vue mathématique l'onde de Dirac est une fonction de l'espace-temps à valeur dans C^4 : il y a quatre fonctions à valeur complexe de l'espace-temps, alors que l'onde de Schrödinger n'en comporte qu'une, et l'onde de Pauli n'en comporte que deux. L'algèbre de Clifford d'espace-temps, que Roger Boudet nous présente dans ce livre, permet d'écrire de façon nettement plus élégante l'onde de Dirac. Dans une telle algèbre il existe de nombreux objets de carré -1 , notamment des bivecteurs et un pseudo-scalaire. Il est assez remarquable que le i de la mécanique quantique se traduise ici par un bivecteur. Ce même bivecteur se retrouve présent dans l'invariance de jauge électrique.

La plupart des tenseurs de la théorie ont été étudiés d'abord par les élèves de Louis de Broglie, que Boudet cite abondamment. La rotation présente dans l'onde de Dirac a été aperçue par Georges Lochak en 1956, dix ans avant les premiers travaux d'Hestenes sur le sujet.

Boudet présente ensuite un certain nombre des aspects de la théorie de Dirac dans le cadre de l'algèbre d'espace-temps : le courant conservatif de probabilité, le tenseur d'impulsion-énergie de Tétrode et son lien avec la force de Lorentz agissant sur l'électron. Puis il aborde ses propres apports à la théorie : la forme invariante de l'équation d'onde, le passage de l'électron au positron, et surtout l'extension à $SU(2)$ de l'invariance de jauge, puis au groupe $SU(2) \times U(1)$ de la théorie des interactions faibles.

Un peu plus loin, Boudet présente aussi ce que devient l'électromagnétisme en algèbre d'espace-temps, en lien avec la théorie de Dirac, et explique donc comment il a pu calculer l'effet Lamb dans ce cadre.

En annexes, on trouve une présentation des algèbres de Clifford, la relation entre le spineur complexe et sa forme d'espace-temps, une étude du mouvement du repère mobile défini par l'onde, un calcul détaillé de la liaison entre le tenseur de Tétrode et la force de Lorentz. Le livre se termine par une critique de la méthode de calcul de l'effet Lamb par la théorie quantique des champs.

Un livre donc à recommander à ceux qui croient tout connaître de la physique quand ils n'ont eu que le modèle standard à se mettre sous la main.

Le lien entre le tenseur d'impulsion-énergie et la force de Lorentz est un argument puissant en faveur du tenseur de Tétrode. O. Costa de Beauregard était aussi en faveur de ce tenseur, malgré le fait qu'il n'est pas symétrique, et que cela pose un sérieux problème quand on veut faire le lien avec la gravitation : les tenseurs utilisés par Einstein en relativité générale sont essentiellement symétriques. Einstein n'a utilisé des tenseurs non symétriques que dans ses tentatives d'unification de l'électromagnétisme et de la gravitation utilisant une variété d'espace-temps à torsion.

La principale critique que l'on peut faire à ce livre vient du fait que la forme (3.1) que Boudet donne pour le spineur n'est pas générale : dans un anneau qui n'est pas un corps il existe des éléments non nuls qui ne sont pas inversibles, et c'est le cas lorsque les deux invariants de la théorie de Dirac sont nuls. L'équation d'onde étant linéaire, tandis que les invariants sont quadratiques par rapport à l'onde, on peut difficilement éviter le cas particulier des éléments non inversibles. Le repère mobile n'est donc pas si général que cela, et on peut le voir sur les solutions de Darwin pour l'atome d'hydrogène : pour la plupart des solutions, il existe des cercles, dans le plan $z=0$, sur lesquels les deux invariants sont nuls, et où les vecteurs d'espaces-temps permettant de définir ailleurs la base mobile sont sur le cône de lumière de l'observateur.

Claude Daviau
Fondation Louis de Broglie
23 rue Marsoulan
75012 Paris, France