

## Mécanique Quantique Non-Relativiste d'une Particule Individuelle

LAURENT BINDEL

800 rés. « Le parc des Eaux Vives », Palaiseau 91120, France

**ABSTRACT.** The object of this communication is to show that a mathematical description of a new kind of wave obeying the Schrödinger equation is able to unify with the same formalism some physical situations as different as the diffraction by a screen and the scattering by a potential. A diffraction pattern is calculated for material particles obeying the Schrödinger equation without analogy with light transport. The same formalism allow to calculate the cross section for the scattering by a Coulomb potential. The approach brings a new insight into the Non-Relativistic Quantum Mechanics and has the potential to appease the interpretational debate about the completeness of the description of a single particle.

**RESUME.** L'objet de cette communication est de montrer qu'une description mathématique d'une onde d'un type nouveau se conformant à l'équation de Schrödinger permet d'unifier par le même formalisme des situations physiques aussi différentes que la diffraction par un écran et la diffusion par un potentiel. Un calcul de figure de diffraction de particules matérielles obéissant à l'équation de Schrödinger est explicitement mené sans analogie avec la lumière. Le même formalisme permet de calculer la section efficace de la diffusion par un potentiel de Coulomb. La nouveauté réside dans l'introduction d'une description d'un système individuel. L'approche apporte un éclairage nouveau à la Mécanique Quantique Non-Relativiste qui est de nature à apaiser le débat relatif à son interprétation dans les questions relatives à sa complétude vis-à-vis de la description d'un système individuel.

## 1 INTRODUCTION

Les travaux d'Erwin Schrödinger ont ouvert la perspective quantique en donnant à l'intuition géniale de Louis de Broglie une équation de mouvement. Les nombreuses vérifications expérimentales des conséquences de ces "illuminations" comme les appelait Tullio Levi-Civita, ont, depuis, rendu le fait quantique irréversible. Cependant la description ainsi offerte a, comme les frères de Broglie le notent en 1934, le caractère d'une « sorte d'artifice de calcul » conduisant à une description essentiellement statistique inapte à renseigner sur le mouvement d'une seule particule [1]. Le débat qui a traversé le XX<sup>ième</sup> siècle, à savoir la Mécanique Quantique ne traite-t-elle que de l'aspect statistique (interprétation d'ensemble) ou prétend-elle traiter la particule individuelle (interprétation « orthodoxe » ou de « Copenhague »), reste ouvert. L'aspect interprétatif de la Mécanique Quantique est, pour le physicien professionnel, une question secondaire puisque le formalisme offre tout ce qui est utile pour calculer et comparer à l'expérience. Cependant, expliquer à des non-spécialistes les expériences de type diffraction ou interférence dans lesquelles une seule particule est présente à la fois reste une gageure. L'explication de ces expériences invoque traditionnellement l'auto-interférence de la particule ou encore la multiplicité des chemins empruntés laquelle, si non mesurée, conduit à l'interférence de la fonction d'onde représentative jusqu'à son collapsus sur l'appareil de mesure. En d'autres termes la description quantique de la diffraction symbolise le mystère quantique à admettre comme horizon indépassable, ainsi que Paul Dirac le suggère dans l'introduction de son fameux traité. Nous proposons dans cette communication d'entrouvrir cette porte fermée depuis 85 ans.

Au début des années 90, Asim Barut a attiré l'attention sur le fait que l'équation d'onde de Schrödinger possède une solution non-dispersive. Dans [2], Barut donne son programme et traite ce qui peut être considéré comme l'ébauche d'une nouvelle théorie de la diffraction de particules matérielles. Le fait marquant de son travail réside dans la perspective que peut apporter une nouvelle représentation mathématique d'une particule isolée.

L'objet de cette communication est de montrer que la reprise et l'extension du programme de Barut conduisent à envisager la Mécanique Quantique non-relativiste sous une forme permettant de comprendre de manière unifiée la diffraction dans l'espace-temps des particules matérielles et leur diffusion par un champs de potentiel donné. En particulier dans cette communication, nous démontrons dans le cas non-relativiste de particules massives sans spin que :

- leur diffraction par une ouverture circulaire donne la figure d'Airy [3],
- leur diffusion par un potentiel Coulombien donne la section efficace de Rutherford [4],

et ce, avec le même formalisme.

L'emphase est portée sur le fait que la répartition spatiale d'une figure de diffraction pour des particules matérielles est obtenue de manière consistante et sans approximation sujette à caution ni analogie avec la lumière. Ce point est important techniquement et historiquement même si les preuves expérimentales de la diffraction de particules matérielles (électrons, protons, neutrons, atomes et molécules) portent essentiellement sur la vérification de la fameuse loi de de Broglie [1] et plus rarement sur la répartition d'intensité sur l'écran.

Dans cette communication les calculs sont détaillés à un niveau inhabituel du fait de la nouveauté de l'approche et afin de les faire mieux comprendre. Une tentative d'explication des raisons pour lesquelles la majeure partie des théoriciens, hormis quelques-uns, ont renoncé à la description d'une particule individuelle vers 1926-1927 est donnée en conclusion.

## 2 SOLUTION SANS DISPERSION DE BARUT

L'équation de Schrödinger d'une particule libre admet des solutions de type onde plane. Ces solutions sont bien connues pour exhiber un comportement dispersif ( $\omega/k \neq d\omega/dk$  où  $\omega$  est la pulsation et  $k$  le module du vecteur d'onde). La considération de paquets d'ondes est par conséquent également sujette au phénomène de dispersion. Il est considéré en général que seules des équations non-linéaires possèdent des solutions non-dispersives, c'est-à-dire se propageant sans déformation. Barut [2] a attiré l'attention sur le fait que l'équation de Schrödinger linéaire possède une telle solution. La démonstration donnée ici est différente de celle de Barut en ceci qu'elle ne fait pas intervenir de fréquence interne injectée dans l'équation de d'Alembert et, donc par là, évite toute référence à des paramètres 'cachés' trop sujets à controverses.

Partant de l'équation de Schrödinger libre :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi \tag{1}$$

et cherchant une solution du type  $\psi(\vec{r}, t) = F(\vec{r}, t) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - E.t)}$  où  $\vec{p}$  est l'impulsion ( $\vec{p} = m\vec{v}$ ) et  $E$  est l'énergie totale ( $E = mc^2$ ), il vient, après

avoir simplifié l'exponentielle, séparé les parties réelle et imaginaire et employé l'approximation des faibles impulsions  $E = \frac{\vec{p}^2}{2m_0} + m_0 c^2$  où  $m_0$  est la masse propre de la particule :

$$\Delta F + 2\left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 F = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_0} \cdot \vec{\nabla} F = 0 \quad (3)$$

L'équation (2) est une équation de Helmholtz faisant apparaître la longueur de Compton de la particule considérée et différant de celle obtenue par Barut par le facteur 2. L'équation (3) est une équation de structure montrant que la fonction  $F$  modulant l'onde de phase de de Broglie est de la forme  $F(\vec{r}, t) = \mathbf{F}(\vec{r} - \vec{v}t)$  où  $\vec{v} = \vec{p}/m_0$ .

En conséquence, une nouvelle solution possible de l'équation de Schrödinger est une onde plane de de Broglie modulée en amplitude par une onde progressive solution d'une équation de Helmholtz :

$$\psi(\vec{r}, t) = \mathbf{F}(\vec{r} - \vec{v}t) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)} \quad (4)$$

Il sera démontré qu'une telle solution possède la propriété remarquable de se propager sans déformation dans l'espace.

## 2.1 Interprétation

La forme (4) ainsi définie présente un caractère particulier en ceci qu'elle permet une description à la fois particulière (terme  $\mathbf{F}$ ) et ondulatoire (phase de de Broglie), en même temps. En effet, la solution régulière de (2) à symétrie sphérique, est :

$$\mathbf{F}(\vec{r}) = N \sin\left(\frac{\sqrt{2}m_0 c}{\hbar} |\vec{r}|\right) \Big/ \frac{\sqrt{2}m_0 c}{\hbar} |\vec{r}| \quad (5)$$

D'autres solutions existent et peuvent doter la description quantique d'une structure plus riche mais ce développement ne fait pas l'objet de cette communication.

Quelle que soit la solution de (2) le point intéressant est que l'onde  $\psi$  occupe tout l'espace, à l'instar des solutions en onde plane, mais ceci de manière localisée, c'est-à-dire non-uniforme, contrairement aux ondes planes. Cela confère à (4), que nous nommerons onde de Barut, une nature à

la fois locale et étendue : la particule peut 'faire sentir sa présence' par l'intermédiaire de  $\mathbf{F}$  avant que sa phase n'entre en jeu, en particulier aux hautes énergies. Aux basses énergies qui font l'objet de cette communication, la longueur d'onde de de Broglie est plus grande que la longueur de Compton (divisée par  $2\sqrt{2}\pi$ ), aussi c'est la phase qui fait 'sentir' sa présence avant l'arrivée de la particule.

Le double aspect dont il est question permet une séparation entre les domaines essentiellement ondulatoire et particulaire. Pour un électron par exemple, cette limite se situe vers l'énergie cinétique de 374 keV.

## 2.2 Propagation sans déformation

Les fonctions d'onde définies par (4) possèdent la propriété de se transporter sans déformation en champ libre. Cette propriété se démontre plus facilement à partir de la forme intégrale de l'équation de Schrödinger (1).

### 2.2.1. Forme intégrale de l'équation de Schrödinger

La solution formelle de (1) est (m est la masse propre) :

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{\frac{i\hbar(t-\tau)}{2m}\Delta} \psi(\vec{r}, \tau) \tag{6}$$

où  $\tau$  est un temps quelconque.

En vertu de l'identité  $e^{u^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-p^2+2pu}$  qui, en 3 dimensions s'écrit

$$e^{\vec{u}^2} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \iiint d^3\vec{p} e^{-\vec{p}^2+2\vec{p}\cdot\vec{u}},$$

l'équation (6) prend une forme linéarisée faisant apparaître le gradient comme racine du laplacien :

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \iiint d^3\vec{p} e^{-\vec{p}^2+\sqrt{\frac{2i\hbar(t-\tau)}{m}}\vec{p}\cdot\vec{\nabla}} \psi(\vec{r}, \tau).$$

Comme  $e^{+\sqrt{\frac{2i\hbar(t-\tau)}{m}}\vec{p}\cdot\vec{v}}$   $\psi(\vec{r},\tau) = \psi(\vec{r} + \sqrt{\frac{2i\hbar(t-\tau)}{m}}\vec{p},\tau)$ , il vient après le changement de variable  $\vec{\lambda} = \vec{r} + \sqrt{\frac{2i\hbar(t-\tau)}{m}}\vec{p}$  la forme intégrale bien connue de l'équation de Schrödinger :

$$\psi(\vec{r},t) = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(t-\tau)} \right)^{3/2} \iiint d^3\vec{\lambda} e^{-\frac{m}{2i\hbar(t-\tau)}(\vec{r}-\vec{\lambda})^2} \psi(\vec{\lambda},\tau) \quad (7)$$

Il est instructif de noter, sachant que l'action de Hamilton d'une particule libre de masse  $m$  est  $S = \frac{m}{2} \frac{(\vec{r}-\vec{\lambda})^2}{(t-\tau)}$  [6], que l'équation (7) s'écrit :

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{A^3} \iiint d^3\vec{\lambda} e^{i\frac{S(\vec{r}-\vec{\lambda},t-\tau)}{\hbar}} \psi(\vec{\lambda},\tau) \text{ avec } A = \left( \frac{2i\pi\hbar(t-\tau)}{m} \right)^{1/2} \quad (8)$$

Ces équations sont les mêmes que celles obtenues par Feynman, cependant sous forme infinitésimale en  $\epsilon = t - \tau$  [7]. Elles seront généralisées au cas de la présence d'un potentiel au paragraphe 4.1.

### 2.2.2. Propagation libre des ondes de Barut

Propageons la fonction d'onde définie par l'équation (4) avec  $\mathbf{F}$  satisfaisant (2) dans un espace libre de tout écran et de tout champ selon l'équation (7). La question est donc de savoir ce que vaut :

$$I = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(t-\tau)} \right)^{3/2} \iiint d^3\vec{\lambda} e^{-\frac{m}{2i\hbar(t-\tau)}(\vec{r}-\vec{\lambda})^2} \mathbf{F}(\vec{\lambda} - \vec{v}\tau) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{\lambda} - E\tau)} .$$

En posant  $\vec{\lambda} - \vec{v}\tau = \vec{r} - \vec{v}t + \vec{w}$  (transfert vers la phase),  $I$  s'écrit

$$I = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(t-\tau)} \right)^{3/2} \iiint d^3\vec{w} e^{-\frac{m}{2i\hbar(t-\tau)}(\vec{v}(t-\tau) - \vec{w})^2} \mathbf{F}(\vec{r} - \vec{v}t + \vec{w}) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot(\vec{r}+\vec{w}) - \vec{p}\cdot\vec{v}(t-\tau) - E\tau)} ,$$

c'est-à-dire :

$$I = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(t-\tau)} \right)^{3/2} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-\vec{p}\cdot\vec{v}t)} \iiint d^3\vec{w} e^{-\frac{m}{2i\hbar(t-\tau)}(\vec{v}^2(t-\tau)^2-2\vec{w}\cdot\vec{v}(t-\tau)+\vec{w}^2)} \mathbf{F}(\vec{r}-\vec{v}t+\vec{w}) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{w}+E_c\tau-mc^2\tau)},$$

puis en combinant ( $\vec{p} = m\vec{v}$  et  $E = \vec{p}^2/2m + mc^2$ ) :

$$I = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(t-\tau)} \right)^{3/2} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_c t)} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2\tau} \\ \times \iiint d^3\vec{w} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2(t-\tau)}\vec{w}^2 - \frac{i}{\hbar}\vec{w}\cdot(m\vec{v}-\vec{p})} \mathbf{F}(\vec{r}-\vec{v}t+\vec{w})$$

Comme de par l'identité de Taylor déjà utilisée plus haut

$\mathbf{F}(\vec{r}-\vec{v}t+\vec{w}) = e^{+\vec{w}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}-\vec{v}t}} \mathbf{F}(\vec{r}-\vec{v}t)$ ,  $I$  devient :

$$I = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(t-\tau)} \right)^{3/2} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_c t)} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2\tau} \\ \times \left( \iiint d^3\vec{w} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2(t-\tau)}\vec{w}^2 - \frac{i}{\hbar}\vec{w}\cdot(m\vec{v}-\vec{p}-\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_{\vec{r}-\vec{v}t})} \right) \mathbf{F}(\vec{r}-\vec{v}t)$$

La B-transformation de Barut [2] donne :

$$\iiint d^3\vec{w} e^{+\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m}{2(t-\tau)}\vec{w}^2 - (m\vec{v}-\vec{p}-\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_{\vec{r}-\vec{v}t})\cdot\vec{w} \right)} = \left( \frac{2i\pi\hbar(t-\tau)}{m} \right)^{3/2} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{(m\vec{v}-\vec{p}-\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_{\vec{r}-\vec{v}t})^2}{2m}} ,$$

donc,

$$I = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_c t)} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2\tau} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{(m\vec{v}-\vec{p}-\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_{\vec{r}-\vec{v}t})^2}{2m}(t-\tau)} \mathbf{F}(\vec{r}-\vec{v}t),$$

soit, en développant :

$$I = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_c t)} e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2\tau} e^{+\frac{i}{\hbar} \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{r}-\vec{v}t}(t-\tau)} \mathbf{F}(\vec{r}-\vec{v}t).$$

Or, d'après (2) et (3),

$$\Delta_{\vec{r}-\vec{v}t} F = -2 \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 F \quad \text{d'où} \quad e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{r}-\vec{v}t} (t-\tau)} \mathbf{F}(\vec{r}-\vec{v}t) = e^{\frac{i}{\hbar} mc^2 (t-\tau)} \mathbf{F}(\vec{r}-\vec{v}t)$$

et au final

$$I = e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \mathbf{F}(\vec{r}-\vec{v}t).$$

Ainsi,

$$\mathbf{F}(\vec{r}-\vec{v}t) e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(t-\tau)} \right)^{3/2} \iiint d^3\vec{\lambda} e^{-\frac{m}{2i\hbar(t-\tau)} (\vec{r}-\vec{\lambda})^2} \mathbf{F}(\vec{\lambda}-\vec{v}\tau) e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{\lambda} - E\tau)}. \quad (9)$$

C'est-à-dire qu'une particule décrite par (4) et l'équation de Schrödinger libre aboutit au point  $(\vec{r}, t)$  en partant du point d'espace-temps  $(\vec{\lambda}, \tau)$ , et ce sans déformation. A noter que la conjuguée complexe de (9) correspond à un transport remontant le temps.

Ce résultat ne fait appel à aucune approximation et doit donc être regardé comme une conséquence de la Mécanique Quantique non-relativiste.

Il reste à montrer que cette individualité perdue lors d'interactions avec des écrans et des potentiels. Ce sera l'objet des paragraphes 3 et 4. Avant, il convient d'analyser les propriétés de  $\mathbf{F}$  plus avant.

### 2.3. Propriétés

Les propriétés fondamentales de l'onde de Barut sont décrites dans ce paragraphe.

#### 2.3.1. Représentation intégrale de l'onde de Barut

La transformée de Fourier de (4) est définie par (la notation 4-dimensionnelle est utilisée :  $qr = q_0 ct - \vec{q} \cdot \vec{r}$ ) :

$$\begin{aligned} \Psi(q) &= \int d^4x e^{iqr} \psi(\vec{r}, t) = \int d^4r e^{iqr} \mathbf{F}(\vec{r} - \vec{v}t) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)} \\ &= \int d^4r e^{i\left[(q_0 - \frac{E}{\hbar c})ct - (\vec{q} - \frac{\vec{p}}{\hbar})\vec{r}\right]} \mathbf{F}(\vec{r} - \vec{v}t) \end{aligned}$$

Donc, 
$$\Psi(q) = \mathfrak{Z}\left(q - \frac{P}{\hbar}\right) \tag{10}$$

C'est-à-dire que la transformée de Fourier de la fonction d'onde de Barut est la translatée de la transformée de Fourier de la fonction enveloppe (ceci définissant la notation).

Note : Si  $\mathbf{F}$  est égal à 1, c'est-à-dire si une onde plane ordinaire est considérée, alors :

$$\Psi_{op}(q) = \delta^{(4)}\left(q - \frac{P}{\hbar}\right).$$

C'est cette relation qui en Mécanique Quantique conventionnelle permet d'identifier les paramètres de la phase de de Broglie avec le 4-vecteur de l'espace de Fourier :

$$\psi_{op}(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}p \cdot x} = \iiint \int d^4q e^{-iq \cdot x} \delta^{(4)}\left(q - \frac{P}{\hbar}\right).$$

La transformée de Fourier tri-dimensionnelle de  $\mathbf{F}$  est définie par

$$\mathfrak{Z}(\vec{q}) = \iiint d^3\vec{r} e^{-i\vec{q}(\vec{r} - \vec{v}t)} \mathbf{F}(\vec{r} - \vec{v}t) .$$

La transformée inverse est 
$$\mathbf{F}(\vec{r} - \vec{v}t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d^3\vec{q} e^{i\vec{q}(\vec{r} - \vec{v}t)} \mathfrak{Z}(\vec{q}) .$$

On a aussi l'identité 
$$e^{-i\vec{q} \cdot \vec{v}t} = \int dq_0 \delta(q_0 - \vec{q} \cdot \vec{\beta}) e^{-iq_0 ct} , \text{ où } \vec{\beta} = \vec{v}/c .$$

Donc, 
$$\mathbf{F}(\vec{r} - \vec{v}t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint \int d^4q (2\pi) \delta(q_0 - \vec{q} \cdot \vec{\beta}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r} - iq_0 ct} \mathfrak{Z}(\vec{q})$$
 et il en est

déduit que la transformée de Fourier quadri-dimensionnelle de  $\mathbf{F}$  est donnée en fonction de la transformée tri-dimensionnelle par 
$$\mathfrak{Z}(q_0, \vec{q}) = 2\pi \delta(q_0 - \vec{q} \cdot \vec{\beta}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r} - iq_0 ct} \mathfrak{Z}(\vec{q}) .$$

En vertu de (2),  $\left[ -\vec{q}^2 + 2\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \right] \mathfrak{S}(\vec{q}) = 0$ , c'est-à-

dire  $\mathfrak{S}(\vec{q}) = C \delta\left(\vec{q}^2 - 2\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)$ , et en utilisant l'identité :

$\delta\left(\vec{q}^2 - 2\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \iint_{S_1} d^2\vec{\Omega} \delta^{(3)}\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}mc}\vec{q} - \vec{n}\right)$  où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire parcourant la sphère unité  $S_1$ , il vient :

$$\mathfrak{S}(q_0, \vec{q}) = \pi C \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \delta(q_0 - \vec{q} \cdot \vec{\beta}) \iint_{S_1} d^2\vec{\Omega} \delta^{(3)}\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}mc}\vec{q} - \vec{n}\right).$$

Comme la transformée de Fourier inverse de l'onde de Barut est en vertu de (10) :

$$\psi_B(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint \int d^4 q e^{i(\vec{q} \cdot \vec{r} - q_0 ct)} \mathfrak{S}(q_0 - \frac{p_0}{\hbar}, \vec{q} - \frac{\vec{p}}{\hbar})$$

soit, en posant  $q' = q - p/\hbar$  :

$$\begin{aligned} \psi_B(\vec{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \pi C \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - p_0 ct)} \\ &\quad \times \iiint \int d^4 q' e^{i(\vec{q}' \cdot \vec{r} - q'_0 ct)} \delta(q'_0 - \vec{q}' \cdot \vec{\beta}) \iint_{S_1} d^2\vec{\Omega} \delta^{(3)}\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}mc}\vec{q}' - \vec{n}\right) \end{aligned}$$

donc :

$$\psi_B(\vec{r}, t) = \frac{C}{(2\pi)^3} \left(\frac{\sqrt{2}mc}{\hbar}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - p_0 ct)} \iint_{S_1} d^2\vec{\Omega} e^{i\frac{\sqrt{2}mc}{\hbar}\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{\beta} ct)}.$$

Il est conclu qu'une représentation intégrale de  $\mathbf{F}$  est :

$$\mathbf{F}(\vec{r}, t) = \frac{C}{(2\pi)^3} \left(\frac{\sqrt{2}mc}{\hbar}\right) \iint_{S_1} d^2\vec{\Omega} e^{i\frac{\sqrt{2}mc}{\hbar}\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{\beta} ct)} \quad (11)$$

$C$  est une constante à déterminer. Cette expression est une intégrale de Debye [3] exprimant l'onde de Barut comme une superposition d'ondes progressives isotropes sur la sphère unité.

2.3.2. Normalisation de l'onde de Barut

$\mathbf{F}$  est solution d'une équation linéaire (2), elle est de ce fait définie à constante près (11) qui pour être déterminée doit être issue d'une condition supplémentaire non contenue dans (2). Une condition naturelle est de requérir que l'intégrale sur tout l'espace du module au carré de l'onde de Barut vaille un pour exprimer qu'une telle onde représente une particule et une seule :

$$\iiint_{\text{espace}} d^3\vec{r} |\psi_B(\vec{r}, t)|^2 = 1$$

Cela donne :

$$\iiint_{\text{espace}} d^3\vec{r} |\mathbf{F}(\vec{r}, t)|^2 = 1 \quad \text{soit}$$

$$\frac{C^2}{(2\pi)^6} \left( \frac{\sqrt{2}mc}{\hbar} \right)^2 \iint_{S_1} d^2\vec{\Omega} \iint_{S_1} d^2\vec{\Omega}' e^{-i\frac{\sqrt{2}mc}{\hbar}(\vec{n}-\vec{n}')\cdot\vec{v}t} \iiint d^3\vec{r} e^{i\frac{\sqrt{2}mc}{\hbar}(\vec{n}-\vec{n}')\cdot\vec{r}} = 1$$

L'intégrale spatiale vaut  $(2\pi)^3 \left( \frac{\hbar}{\sqrt{2}mc} \right)^3 \delta^{(3)}(\vec{n}-\vec{n}')$ , d'où

$$\frac{C^2}{(2\pi)^3} \left( \frac{\hbar}{\sqrt{2}mc} \right) 4\pi = 1, \text{ soit : } C = \sqrt{2\pi^2 \frac{\sqrt{2}mc}{\hbar}}$$

D'où :

$$\mathbf{F}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\sqrt{2}mc}{\hbar} \right)^3} \iint_{S_1} d^2\vec{\Omega} e^{i\frac{\sqrt{2}mc}{\hbar}\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{\beta}ct)} \quad \text{et}$$

$$\iiint_{\text{espace}} d^3\vec{r} |\mathbf{F}(\vec{r}, t)|^2 = 1 \quad (12)$$

2.3.3. Conclusion

Pour une onde de Barut il n'y a pas identité entre l'espace de Fourier et la quadri-impulsion.

Une onde plane ordinaire de la Mécanique Quantique occupe tout l'espace et a en conséquence pour représentation dans l'espace de Fourier un point identifié avec sa quadri-impulsion. Au contraire, une onde de Barut possède une localisation de l'ordre de la longueur de Compton de la particule envisagée, et en conséquence sa représentation de Fourier est une sphère de rayon  $(2\pi\sqrt{2})mc/h$  centrée sur la quadri-impulsion.

Une onde de Barut est normée. Cette propriété est d'une importance capitale pour les applications.

### 3 DIFFRACTION

Ordinairement, la diffraction est le résultat du passage d'un rayonnement à travers une ouverture ayant une taille de même ordre de grandeur que la longueur d'onde du rayonnement considéré. Dans le cas de la lumière, les théories bicentenaires de Fraunhofer et de Fresnel expliquent de manière satisfaisante les figures de diffraction observées expérimentalement dans les régimes respectifs. Dans le cas d'une particule matérielle, la loi de de Broglie attache à la particule une longueur d'onde, la rendant par là susceptible d'être soumise à diffraction. Les preuves expérimentales concernant les électrons [1], les protons [1], les neutrons, les atomes et les molécules se sont amoncelées au fil du temps, rendant la loi incontournable. Ces preuves expérimentales concernent essentiellement la loi de de Broglie et la figure de diffraction, quand elle est considérée, est issue d'une analogie avec la lumière. L'objet de cette section est de montrer qu'il est possible de calculer une figure de diffraction pour des particules matérielles. Avant cela, nous passons en revue les propriétés bien connues du propagateur défini par l'équation (9).

#### 3.1. Propriétés du propagateur

L'expression (7) définit un propagateur libre :

$$K^{(0)}(\vec{r} - \vec{\lambda}, t - \tau) = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(t - \tau)} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2i\hbar(t - \tau)}(\vec{r} - \vec{\lambda})^2} \quad (13)$$

En vertu de l'identité mentionnée au § 2.2.1, (13) peut également, comme il est connu, s'écrire sous forme intégrale :

$$K^{(0)}(\vec{r} - \vec{\lambda}, t - \tau) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint d^3\vec{p} e^{\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{\lambda}) - \frac{\vec{p}^2}{2m}(t-\tau)\right)} \quad (14)$$

On note que c'est l'énergie cinétique qui intervient ici. L'énergie totale est recouverte par l'adjonction d'une phase *ad hoc*.

Il est important de noter que  $K^{(0)}$  est un propagateur sans cependant être un noyau de Green de l'équation de Schrödinger. En fait, le propagateur  $K^{(0)}$  est une solution de l'équation de Schrödinger d'une particule libre :

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{r}} \right) K^{(0)}(\vec{r} - \vec{\lambda}, t - \tau) = 0 \quad (15)$$

De plus,  $K^{(0)}(\vec{r} - \vec{\lambda}, t - \tau) = K^{(0)}(\vec{\lambda} - \vec{r}, \tau - t)$ , propriété de réversibilité,  $K^{(0)}(\vec{r} - \vec{\lambda}, 0) = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\lambda})$  et  $\int K^{(0)}(\vec{r} - \vec{\lambda}, t) d^3\vec{r} = 1$ , propriétés montrant que  $K^{(0)}$  est une distribution de Dirac généralisée. Ces propriétés sont connues, voir par exemple [8].

Avec la forme (14) du propagateur, il est aisé de démontrer la propriété d'auto-reproduction dans laquelle le temps s'ajuste automatiquement lors de l'intégration spatiale :

$$K^{(0)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) = \iiint d^3\vec{x} K^{(0)}(\vec{r}_2 - \vec{x}, t_2 - t) K^{(0)}(\vec{x} - \vec{r}_1, t - t_1) \quad (16)$$

### 3.2. Diffraction dans l'espace $\mathfrak{R}^3$

En injectant la forme (13) du propagateur dans l'équation (16) tout en supposant que l'intégration spatiale est restreinte par un écran définissant un domaine ouvert que l'on notera  $D_x$ , il vient :

$$K^{(D)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar\sqrt{(t_2-t)(t-t_1)}} \right)^3 \iiint_{D_x} d^3\vec{x} e^{\frac{im}{2\hbar}\left[\frac{(\vec{r}_2-\vec{x})^2}{(t_2-t)} + \frac{(\vec{x}-\vec{r}_1)^2}{(t-t_1)}\right]} \quad (17)$$

Puis, posant :

$$\left. \begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{m}{2\hbar} \left\{ \frac{1}{t_2-t} + \frac{1}{t-t_1} \right\} \\ \vec{\beta}(t) &= \frac{m}{2\hbar} \left\{ \frac{\vec{r}_2}{t_2-t} + \frac{\vec{r}_1}{t-t_1} \right\} \\ \gamma(t) &= \frac{m}{2\hbar} \left\{ \frac{\vec{r}_2^2}{t_2-t} + \frac{\vec{r}_1^2}{t-t_1} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

L'exponentielle dans (17) s'écrit comme un polynôme de degré 2 en  $\vec{x}$  et  $K^{(D)}$  devient :

$$K^{(D)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) = \frac{1}{(i\pi)^3} \left( \frac{m}{2\hbar} \frac{\alpha(t)}{t_2 - t_1} \right)^{3/2} \iiint_{D_x} d^3\vec{x} e^{i\{\alpha(t)\vec{x}^2 - 2\vec{\beta}(t)\cdot\vec{x} + \gamma(t)\}} \quad (19)$$

où le terme normant l'intégrale fait apparaître  $\alpha(t)$ .

Faisant le changement de variable  $\vec{\xi}(\vec{x}, t) = \sqrt{\alpha(t)} \vec{x} - \frac{\vec{\beta}(t)}{\sqrt{\alpha(t)}}$

( $d^3\vec{x} = d^3\vec{\xi} / \alpha(t)^{3/2}$ ), et tout calcul fait pour le terme exponentiel sortant de

l'intégrale  $\exp\left(\gamma(t) - \frac{\vec{\beta}(t)^2}{\alpha(t)}\right) = \exp\left(\frac{m}{2\hbar} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2}{t_2 - t_1}\right)$ , l'on obtient la forme

suivante pour le propagateur dans un espace restreint par un écran ou un obstacle :

$$K^{(D)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) = K^{(0)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) \frac{1}{(i\pi)^{3/2}} \iiint_{D_\xi} d^3\vec{\xi} e^{i\vec{\xi}^2} \quad (20)$$

A un facteur  $(i\pi)^{-1}$  près, l'équation (20) est la formule que Barut détermine dans [2].

Cette formule montre que la propagation dans un espace restreint par un écran quelconque est une propagation libre, comme s'il n'y avait pas d'écran, pondérée par une intégrale de Fresnel tridimensionnelle prise sur le domaine image  $D_\xi$ .

Bien sûr, si le domaine initial est confondu avec tout l'espace ( $D_x = \mathfrak{R}^3$  et donc  $D_\xi = \mathfrak{R}^3$ ), alors  $K^{(D)} = K^{(0)}$  en vertu de  $\iiint_{]-\infty, +\infty[} d^3\vec{\xi} e^{i\vec{\xi}^2} = (i\pi)^{3/2}$  et l'on

retrouve la propriété d'auto-reproduction (16).

Comme il est plus aisé de calculer dans l'espace usuel ( $D_x$ ) dans lequel l'écran (ou l'obstacle) est défini que dans l'espace image ( $D_{\xi}$ ), la formule (15) est ré-écrite dans l'espace usuel écranté comme ( $J$  est un jacobien) :

$$K^{(D)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) = K^{(0)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) \frac{1}{(i\pi)^{3/2}} \iiint_{D_x} d^3\vec{x} J\left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{x}}\right) e^{i[\xi(\vec{x})]^2} \quad (21)$$

La formule (21) synthétise tous les problèmes de diffraction par un écran (ou un obstacle) des particules matérielles dans l'approximation non-relativiste. Elle permet le calcul effectif des figures de diffraction des particules matérielles sans passer par l'analogie avec la lumière. S'il y a deux écrans et/ou obstacles successifs, il convient de partir de la propriété d'auto-reproduction des propagateurs à l'ordre 2. Ce point ne fait l'objet de la présente communication mais étant de nature à apporter des résultats nouveaux vérifiables expérimentalement, il fera l'objet d'une communication séparée.

### 3.3. Diffraction par une ouverture circulaire

Soit une particule partant du point 1 en direction d'un écran percé d'un trou circulaire de centre  $O$  et de rayon  $a$ . La distance entre 1 et  $O$  est notée  $d$  et est par convenance alignée sur l'axe de repérage du laboratoire ( $1,x$ ). Soit un point 2 sur un écran de détection parallèle à l'écran percé. Les coordonnées polaires de 2 par rapport au point de repérage  $O'$  aligné sur l'axe ( $1,O$ ) sont le rayon  $w$  et l'angle  $\psi$  par rapport à un axe ( $O',y$ ) perpendiculaire à l'axe ( $1,x$ ). L'angle  $\theta$  est  $(2,O,O')$  et  $D$  est la distance ( $O,2$ ) (cf. Figure 1). La distance ( $O,O'$ ) est notée  $d'$ .

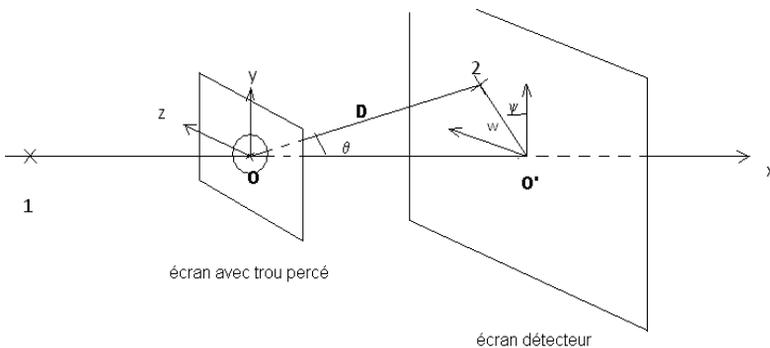


Fig. 1. Configuration géométrique de la diffraction par un trou circulaire.

Le point  $\vec{x}$  est un point courant sur l'ouverture circulaire dans l'écran percé repéré par les coordonnées polaires  $(\rho, \varphi)$ . Donc,

$$\vec{x} = \rho \cos \varphi \vec{u}_y + \rho \sin \varphi \vec{u}_z$$

Pour les points 1 et 2 relativement à O :

$$\vec{r}_1 = -d \vec{u}_x$$

$$\vec{r}_2 = d' \vec{u}_x + w \cos \psi \vec{u}_y + w \sin \psi \vec{u}_z$$

Si  $r$  est la distance entre 1 et le point courant sur l'ouverture circulaire et  $r'$  la distance entre le point courant sur l'ouverture circulaire et le point 2 sur l'écran de détection, alors :

$$r^2 = \|\vec{x} - \vec{r}_1\|^2 = \rho^2 + d^2,$$

$$r'^2 = \|\vec{r}_2 - \vec{x}\|^2 = d'^2 + (w \cos \psi - \rho \cos \varphi)^2 + (w \sin \psi - \rho \sin \varphi)^2.$$

Comme l'écran est infiniment massif par rapport à une seule particule, il n'y a pas de raison de penser que la vitesse d'une particule matérielle soit modifiée par la traversée de l'écran. Aussi en transformant les différences de temps en distances spatiales,  $\alpha$  et  $\bar{\beta}$  deviennent :

$$\alpha(\rho, \varphi, w, \psi) = \frac{m v}{2\hbar} \left\{ \frac{1}{r'} + \frac{1}{r} \right\}, \quad \bar{\beta}(\rho, \varphi, w, \psi) = \frac{m v}{2\hbar} \left\{ \frac{\vec{r}_1}{r} + \frac{\vec{r}_2}{r'} \right\}.$$

Du fait que le rayon  $a$  de l'ouverture circulaire est très petit (de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de de Broglie de la particule mobile), nous ferons les calculs à l'ordre 1 en  $\rho$ .

Dans ce cas :

$$1/r = 1/d + o(\rho^2)$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{D} \left( 1 + \frac{w\rho}{D^2} \cos(\varphi - \psi) \right) + o(\rho^2) \quad \text{où} \quad D^2 = d'^2 + w^2.$$

A cet ordre,  $\alpha$  devient :

$$\alpha(\rho, \varphi, w, \psi) = \frac{m v}{2\hbar} \left\{ \frac{1}{\Delta} + \frac{w\rho}{D^3} \cos(\varphi - \psi) \right\} \quad \text{où} \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{d} + \frac{1}{D},$$

donc,

$$\sqrt{\alpha(\rho, \varphi, w, \psi)} \vec{x} = \sqrt{\frac{m v}{2\hbar \Delta}} (\rho \cos \varphi \vec{u}_y + \rho \sin \varphi \vec{u}_z) + o(\rho^2)$$

et  $\bar{\beta}$  devient, si l'étendue de diffraction est également supposée suffisamment petite pour que  $w^2$  soit négligé ( $d' = D + o(w^2)$ ), ce qui est expérimentalement le cas. En effet, les tâches de diffraction électroniques sont très petites et doivent être magnifiées pour être rendues visibles à l'œil nu [9]. Alors :

$$\vec{\beta}(\rho, \phi, w, \psi) = \frac{mv}{2\hbar} \left\{ \frac{w\rho}{D^2} \cos(\phi - \psi) \vec{u}_x + \frac{w}{D} [\cos\psi \vec{u}_y + \sin\psi \vec{u}_z] \right\} + o(\rho^2) + o(w^2)$$

D'où, à l'ordre 2 en  $\rho$  et  $w$  :

$$\vec{\xi}(\rho, \phi, w, \psi) = \sqrt{\frac{mv}{2\hbar}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\rho \cos\phi \vec{u}_y + \rho \sin\phi \vec{u}_z) - \sqrt{\Delta} \left[ \frac{w\rho}{D^2} \cos(\phi - \psi) \vec{u}_x + \frac{w}{D} [\cos\psi \vec{u}_y + \sin\psi \vec{u}_z] \right] \right\} + o(\rho^2) + o(w^2)$$

puis,

$$\vec{\xi}^2 = -\frac{mv}{\hbar} \frac{w\rho}{D} \cos(\phi - \psi) + o(\rho^2) + o(w^2)$$

L'ouverture étant dans le plan (yOz) et  $J\left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{x}}\right) = [\alpha(\rho, \phi, w, \psi)]^{3/2}$ ,

l'intégration sur la coordonnée non-restreinte transforme le propagateur (21) en (le facteur  $\sqrt{i\pi}$  vient de l'intégration sur la coordonnée non-restreinte) :

$$K^{(D)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) = K^{(0)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) \frac{1}{i\pi} \iint_{\text{ouverture}} d^2\vec{x} \alpha(\vec{x}) e^{i[\vec{\xi}(\vec{x})]^2}$$

Alors l'intégrale double s'écrit en coordonnées polaires (notant, cf. Fig. 1,  $\sin\theta = w/D$ ) :

$$\iint_{D_x} d^2\vec{x} \alpha(\vec{x}) e^{i[\vec{\xi}(\vec{x})]^2} = \left( \frac{mv}{2\hbar\Delta} \right) \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \left( 1 + \frac{\rho\Delta}{D^2} \sin\theta \cos(\phi - \psi) \right) e^{-\frac{mv}{\hbar} \rho \sin\theta \cos(\phi - \psi)}$$

L'intégration angulaire fait apparaître les deux premières fonctions de Bessel [10] et conduit à :

$$\int_0^{2\pi} d\phi \left( 1 + \frac{\rho\Delta}{D^2} \sin\theta \cos(\phi - \psi) \right) e^{-\frac{mv}{\hbar} \rho \sin\theta \cos(\phi - \psi)} = 2\pi \left\{ J_0\left(\frac{mv}{\hbar} \rho \sin\theta\right) + i \frac{\rho\Delta}{D^2} \sin\theta J_1\left(\frac{mv}{\hbar} \rho \sin\theta\right) \right\}$$

Puis selon la formule d'intégration classique des fonctions de Bessel [10],

$$\int_0^a \rho^n d\rho J_{n-1}(k\rho) = \frac{a^n}{k} J_n(ka) :$$

$$\iint_{D_x} d^2\vec{x} \alpha(\vec{x}) e^{i[\vec{\xi}(\vec{x})]^2} = 2\pi \frac{\hbar}{mv} \left( \frac{mv}{2\hbar\Delta} \right) \left\{ \frac{a}{\sin\theta} J_1\left(\frac{mv}{\hbar} a \sin\theta\right) + i \frac{a^2\Delta}{D^2} J_2\left(\frac{mv}{\hbar} a \sin\theta\right) \right\}$$

Le deuxième terme peut complètement être négligé du fait qu'il est d'ordre 2 en  $a$  et il vient après quelques simplifications et en posant  $k=mv/\hbar (=2\pi/\lambda)$  :

$$\iint_{D_x} d^2\vec{x} \alpha(\vec{x}) e^{i[\vec{k}(\vec{x})]^2} = \frac{\pi a^2}{\Delta} k \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta}$$

Le propagateur devient :

$$K^{(D)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) = K^{(0)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) \frac{a^2}{i\Delta} k \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta}$$

Le propagateur prenant en compte la restriction de l'espace par l'ouverture circulaire se présente comme le produit d'un propagateur libre, comme s'il n'y avait pas d'écrans, par un terme (que nous notons  $\mathfrak{R}$ ) de diffraction par l'ouverture.

Utilisant ce propagateur pour calculer la fonction d'onde sur le détecteur :

$$\Psi(\vec{r}_2, t_2) = \iiint d^3\vec{r}_1 K^{(D)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) \mathbf{F}(\vec{r}_1 - \vec{v}t_1) \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r}_1 - Et_1)},$$

la particule  $y$  est retrouvée avec une amplitude de probabilité donnée par :

$$\Psi(\vec{r}_2, t_2) = \mathbf{F}(\vec{r}_2 - \vec{v}t_2) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r}_2 - Et_2)} \mathfrak{R}(\theta) \quad \text{où} \quad \mathfrak{R}(\theta) = \frac{a^2}{i\Delta} k \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta}.$$

La densité de probabilité de trouver la particule sur l'écran de détection est égale à  $|\Psi(\vec{r}_2, t_2)|^2$  conformément au postulat statistique de Born donc la probabilité est égale à  $|\mathfrak{R}(\theta)|^2$ , où :

$$|\mathfrak{R}(\theta)|^2 = \left( \frac{\sigma}{\lambda \Delta} \right)^2 \left[ \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2 \quad (22)$$

expression dans laquelle  $\lambda$  est la longueur d'onde de de Broglie de la particule et  $\sigma$  la surface de l'ouverture circulaire dans l'écran percé (et  $\Delta$  peut être assimilé à  $D$  dans la limite de Fraunhofer  $d \rightarrow +\infty$ ).

L'on retrouve ainsi avec une méthode de calcul très différente la figure de diffraction d'Airy caractérisée par la distribution  $[2J_1(ka \cdot \sin \theta) / ka \cdot \sin \theta]^2$

comme indiqué dans le traité [3]. Le facteur de normalisation est ici calculé exactement sans référence à l'énergie incidente sur l'ouverture.

Bien évidemment, le résultat est aussi valable pour une onde plane ordinairement considérée en Mécanique Quantique. Cependant l'interprétation est toute différente. Ici, une seule particule est considérée et impacte le détecteur d'une trace ponctuelle unique à une position sur le détecteur compatible avec la loi de distribution calculée. C'est l'accumulation statistique de tels impacts ponctuels qui construit petit à petit la figure de diffraction comme dans la célèbre expérience de Merli, Missiroli et Pozzi [9].

#### 4 DIFFUSION

La diffusion d'une particule par un potentiel quelconque est un processus soumis à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\vec{r}, t) \psi \quad (23)$$

Cette équation ne possède pas, en général, de solution non-dispersive contrairement à la version libre. Par contre, elle possède un propagateur. Avant de calculer un processus de diffusion dans un potentiel de Coulomb, nous allons établir l'expression exacte de ce propagateur, puis en déduire le premier terme de son développement en série.

##### 4.1. Propagateur de l'équation de Schrödinger

En présence d'un potentiel dépendant de l'espace et du temps, la solution formelle (6) de l'équation de Schrödinger libre est la base de départ pour appliquer la méthode de variation de constante de Lagrange :

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{\frac{i\hbar(t-\tau)}{2m} \Delta} f(\vec{r}, \tau, t).$$

Alors 
$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \Delta \psi + e^{\frac{i\hbar(t-\tau)}{2m} \Delta} \frac{\partial f}{\partial t},$$

et par identification 
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} e^{-\frac{i\hbar(t-\tau)}{2m} \Delta} V(\vec{r}, t) e^{\frac{i\hbar(t-\tau)}{2m} \Delta} f. \quad (24)$$

En définissant l'opérateur Energie Cinétique par

$$\hat{E}_c(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\vec{r}}$$

et l'opérateur Potentiel par

$$\hat{V}(\vec{r}, t, \tau) = e^{+\frac{i}{\hbar}\hat{E}_c(\vec{r})(t-\tau)} V(\vec{r}, t) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{E}_c(\vec{r})(t-\tau)},$$

la solution formelle de (24) est  $(\phi(\vec{r}, \tau))$  est une fonction arbitraire du point  $(\vec{r}, \tau)$  :

$$f(\vec{r}, t, \tau) = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{\tau}^t \hat{V}(\vec{r}, t', \tau) dt'} \phi(\vec{r}, \tau).$$

En injectant cette solution dans la solution (7) du problème libre, il vient :

$$\psi(\vec{r}, t) = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(t-\tau)} \right)^{3/2} \iiint d^3\vec{\lambda} e^{-\frac{m}{2i\hbar(t-\tau)}(\vec{r}-\vec{\lambda})^2 - \frac{i}{\hbar}\int_{\tau}^t \hat{V}(\vec{r}, t', \tau) dt'} \psi(\vec{\lambda}, \tau). \quad (25)$$

C'est-à-dire que le propagateur en présence d'un potentiel est :

$$K^{(V)}(\vec{r}, t, \vec{\lambda}, \tau) = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(t-\tau)} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2i\hbar(t-\tau)}(\vec{r}-\vec{\lambda})^2 - \frac{i}{\hbar}\int_{\tau}^t \hat{V}(\vec{r}, t', \tau) dt'}. \quad (26)$$

Ainsi, comme annoncé au § 2.2.1, faisant le chemin inverse de celui de Feynman [7], nous obtenons le propagateur non-relativiste à partir de l'équation de Schrödinger. Cependant, ici le propagateur est valable à tous les ordres en temps et l'on notera qu'il fait intervenir l'opérateur Potentiel en lieu et place du potentiel scalaire.

Ce résultat est, à la connaissance de l'auteur, nouveau et offre une alternative à l'approche fonctionnelle par les intégrales de chemin.

## 4.2. Développement en série du propagateur de l'équation de Schrödinger

Le propagateur (26) entre les points  $(\vec{r}_i, t_i)$  et  $(\vec{r}_f, t_f)$  s'écrit :

$$K^{(V)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) = K^{(0)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \hat{V}(\vec{r}_f, \tau, t_i) d\tau},$$

et en développant l'exponentielle en série (si l'intégrale temporelle de l'opérateur Potentiel est petite devant  $\hbar$ ) :

$$K^{(V)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) = K^{(0)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \hat{V}(\vec{r}_f, \tau, t_i) d\tau + \dots \right\}.$$

Le terme d'ordre 1 de  $K^{(V)}$ , noté  $K^{(1)}$  est :

$$K^{(1)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) = -\frac{i}{\hbar} K^{(0)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) \int_{t_i}^{t_f} e^{+\frac{i}{\hbar} \hat{E}_c(\vec{r}_f)(\tau-t_i)} V(\vec{r}_f, \tau) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{E}_c(\vec{r}_f)(\tau-t_i)} d\tau$$

L'intégration de ce propagateur sur la coordonnée initiale donne :

$$\iiint d^3\vec{r}_i K^{(1)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) = -\frac{i}{\hbar} \iiint d^3\vec{r}_i K^{(0)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) \int_{t_i}^{t_f} e^{+\frac{i}{\hbar} \hat{E}_c(\vec{r}_f)(\tau-t_i)} V(\vec{r}_f, \tau) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{E}_c(\vec{r}_f)(\tau-t_i)} d\tau.$$

En vertu de (6) et (7), la relation suivante entre opérateurs :

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{E}_c(\vec{x})(t_a-t_b)} = \iiint d^3\vec{y} K^{(0)}(\vec{x}, t_a; \vec{y}, t_b),$$

conduit à :

$$\iiint d^3\vec{r}_i K^{(1)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} e^{+\frac{i}{\hbar} \hat{E}_c(\vec{r}_f)(\tau-t_f)} V(\vec{r}_f, \tau) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{E}_c(\vec{r}_f)(\tau-t_i)} d\tau$$

puis :

$$\iiint d^3\vec{r}_i K^{(1)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \iiint d^3\vec{\lambda} K^{(0)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{\lambda}, \tau) V(\vec{\lambda}, \tau) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{E}_c(\vec{\lambda})(\tau-t_i)}$$

et, ré-introduisant la coordonnée initiale (qui est une variable muette de par l'intégration) au membre de droite :

$$\iiint d^3\vec{r}_i K^{(1)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \iiint d^3\vec{\lambda} K^{(0)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{\lambda}, \tau) V(\vec{\lambda}, \tau) \iiint d^3\vec{r}_i K^{(0)}(\vec{\lambda}, \tau; \vec{r}_i, t_i)$$

Donc au final :

$$K^{(1)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \iiint d^3\vec{\lambda} K^{(0)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{\lambda}, \tau) V(\vec{\lambda}, \tau) K^{(0)}(\vec{\lambda}, \tau; \vec{r}_i, t_i). \quad (27)$$

L'on retrouve par un nouveau moyen la formule bien connue donnant le propagateur à l'ordre un du potentiel scalaire [4].

L'ordre suivant se traite de manière analogue et conduit à écrire le propagateur comme la série de Born suivante avec son interprétation graphique bien connue :

$$K^{(V)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) = K^{(0)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) + K^{(1)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) + \dots$$

Dans un processus de diffusion par un potentiel, une onde de Barut entrante  $\psi_i(\vec{r}_i, t_i)$  d'impulsion  $\vec{p}_i = m\vec{v}_i$  et d'énergie  $E_i = \vec{p}_i^2/2m + mc^2$  est transformée en une onde de Barut sortante  $\psi_f^{(V)}(\vec{r}_f, t_f)$  d'impulsion  $\vec{p}_f = m\vec{v}_f$  et d'énergie  $E_f = \vec{p}_f^2/2m + mc^2$  par le propagateur :

$$\psi_f^{(V)}(\vec{r}_f, t_f) = \iiint d^3\vec{r}_i K^{(V)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) \psi_i(\vec{r}_i, t_i). \quad (28)$$

#### 4.3. Amplitude de diffusion par un potentiel scalaire

L'amplitude de diffusion entre un état initial  $\psi_i(\vec{r}_i, t_i)$  et un état final  $\psi_f(\vec{r}_f, t_f)$  est l'intégrale de recouvrement, ou matrice S, suivante :

$$S = \iiint d^3\vec{r}_f \psi_f^*(\vec{r}_f, t_f) \psi_f^{(V)}(\vec{r}_f, t_f)$$

où  $\psi_f^{(V)}(\vec{r}_f, t_f)$  est donné par (28).

En développant :

$$S = \iiint d^3\vec{r}_f \psi_f^*(\vec{r}_f, t_f) \iiint d^3\vec{r}_i K^{(0)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) \psi_i(\vec{r}_i, t_i) \\ + \iiint d^3\vec{r}_f \psi_f^*(\vec{r}_f, t_f) \iiint d^3\vec{r}_i K^{(1)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) \psi_i(\vec{r}_i, t_i) + \dots$$

En vertu de la propriété de translation sans déformation du § 2.2.2 pour une onde de Barut et de la propriété de normalisation du § 2.3.2, le premier terme vaut 1 et correspond à une onde n'ayant pas subi de collision. Le second terme est l'amplitude de diffusion (notée  $A_{\vec{n}}$ ) :

$$A_{\bar{n}} = \iiint \iiint d^3 \vec{r}_f d^3 \vec{r}_i \psi^*(\vec{r}_f, t_f) K^{(1)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) \psi(\vec{r}_i, t_i) \quad (29)$$

Alors en injectant l'expression (27) et réarrangeant :

$$A_{\bar{n}} = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \iiint d^3 \vec{x} \left\{ \iiint d^3 \vec{r}_f \psi^*(\vec{r}_f) K^{(0)}(\vec{r}_f, t_f; \vec{x}, t) \right\} \\ \times [V(\vec{x}, t)] \left\{ \iiint d^3 \vec{r}_i K^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{r}_i, t_i) \psi(\vec{r}_i) \right\}$$

Puis, toujours en vertu de la propriété de translation sans déformation du § 2.2.2 pour une onde de Barut :

$$A_{\bar{n}} = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \iiint d^3 \vec{x} \psi_f^*(\vec{x}, t) V(\vec{x}, t) \psi_i(\vec{x}, t) .$$

Dans cette équation les fonctions d'onde sont des ondes de Barut agrégeant un caractère d'onde de phase de de Broglie, c'est-à-dire un comportement ondulatoire et d'onde progressive (**F**), c'est-à-dire un comportement particulière :

$$\psi_a(\vec{x}, t) = \exp(i(\vec{p}_a \cdot \vec{x} - E_a t) / \hbar) \mathbf{F}(\vec{x} - \vec{v}_a t) .$$

Le caractère progressif (particulaire) permet d'écrire  $\mathbf{F}(\vec{x} - \vec{v}_a t) = \mathbf{F}(\vec{r}_a)$  puisque la particule non soumise à interaction se déplace sans se déformer conformément à l'équation de structure (3) sur la droite  $\vec{x} - \vec{v}_a t = \vec{r}_a$  .

Alors, l'amplitude de diffusion devient :

$$A_{\bar{n}} = -\frac{i}{\hbar} \mathbf{F}^*(\vec{r}_f) \left\{ \int_{t_i}^{t_f} dt \iiint d^3 \vec{x} V(\vec{x}, t) e^{-\frac{i}{\hbar}[(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{x} - (E_f - E_i)t]} \right\} \mathbf{F}(\vec{r}_i) \quad (30)$$

Et l'on reconnaît à l'intérieur des crochets l'expression de la transformée de Fourier du potentiel. C'est le résultat standard à ceci près qu'il est obtenu ici avec des ondes de Barut en lieu et place d'ondes planes normées dans une boîte de taille arbitraire. On verra dans le paragraphe suivant que ce point permet d'éviter deux écueils de l'approche conventionnelle.

#### 4.4. Section efficace de Rutherford

La probabilité de transition de l'état initial *i* à l'état final *f* est proportionnelle au module au carré de (30) conformément au postulat statistique de Born. Le coefficient de proportionnalité est le rapport du volume d'espace de

phase de l'état final et de la constante de Planck au cube. La probabilité par unité de temps vaut donc :

$$\frac{1}{t_f - t_i} \iiint \iiint |\mathbf{A}_{\text{fi}}|^2 \frac{d^3 r_f d^3 p_f}{h^3}$$

Le flux de particules incidentes est  $|\mathbf{F}(\vec{r}_i)|^2 |\vec{v}_i|$  et, par définition, la section efficace est le quotient des deux. Cependant comme notre approche garde trace du temps, contrairement à l'approche conventionnelle qui manipule des fonctions d'ondes planes asymptotiques, il convient de prendre en plus la limite aux deux extrémités de l'axe du temps.

Ainsi nous avons à évaluer :

$$\sigma = \lim_{t_f \rightarrow -\infty, t_i \rightarrow +\infty} \frac{1}{(t_f - t_i) |\mathbf{F}(\vec{r}_i)|^2 |\vec{v}_i|} \iiint \iiint |\mathbf{A}_{\text{fi}}|^2 \frac{d^3 r_f d^3 p_f}{h^3}.$$

Comme

$$|\mathbf{A}_{\text{fi}}|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \mathbf{F}^*(\vec{r}_f) \right|^2 \left| \mathbf{F}(\vec{r}_i) \right|^2 \left| \int_{t_i}^{t_f} dt \iiint d^3 \vec{x} V(\vec{x}, t) e^{-\frac{i}{\hbar}[(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{x} - (E_f - E_i)t]} \right|^2$$

la fonction d'onde progressive incidente se simplifie et en vertu de la relation de normalisation (12) du § 2.3.2  $\iiint |\mathbf{F}(\vec{r}_f)|^2 d^3 r_f = 1$ , il reste :

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^3 \hbar^5 |\vec{v}_i|} \lim_{t_f \rightarrow -\infty, t_i \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_f - t_i} \iiint d^3 p_f \left| \int_{t_i}^{t_f} dt e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} \iiint d^3 \vec{x} V(\vec{x}, t) e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{x}} \right|^2$$

Dans le cas du potentiel de Coulomb indépendant du temps, l'intégration temporelle peut être réalisée séparément :

$$\left| \int_{t_i}^{t_f} dt e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} \right|^2 = \left| \frac{\hbar}{E_f - E_i} \left( e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t_f} - e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t_i} \right) \right|^2 = 2 \frac{1 - \cos[(E_f - E_i)(t_f - t_i)/\hbar]}{((E_f - E_i)/\hbar)^2}$$

Comme

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos(\omega X)}{\omega^2 X} = \pi \delta(\omega),$$

la conservation de l'énergie est retrouvée :

$$\lim_{t_f \rightarrow -\infty, t_i \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_f - t_i} \left| \int_{t_i}^{t_f} dt e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} \right|^2 = 2\pi \delta\left(\frac{E_f - E_i}{\hbar}\right).$$

Comme il est connu [4] :

$$\iiint d^3\vec{x} \frac{1}{|\vec{x}|} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \frac{4\pi}{\vec{q}^2},$$

donc,

$$\left| \iiint d^3\vec{x} \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|} e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_f - \vec{p}_i)\cdot\vec{x}} \right|^2 = \left( \frac{Z e^2}{\epsilon_0} \frac{\hbar^2}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^2} \right)^2$$

Rassemblant les deux termes, la section efficace devient :

$$\sigma = \frac{(Z e^2)^2}{(2\pi\epsilon_0)^2 |\vec{v}_i|} \iiint d^3 p_f \frac{\delta(E_f - E_i)}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4}$$

Le procédé pour aboutir est connu : la conservation de l'énergie assure que

$$|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| = p \quad \text{et} \quad \text{comme} \quad d^3 p_f = p_f^2 dp_f d\Omega_f,$$

$$p_f^2 dp_f = p^2 dp = 2mp dE_f, \quad 1/|\vec{v}_i| = m/p \quad \text{et}$$

$$|\vec{p}_f - \vec{p}_i| = 2p \sin(\theta/2) \quad \text{où } \theta \text{ est l'angle entre les deux vecteurs impulsion,}$$

la section efficace différentielle vaut

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{(Z e^2)^2}{(2\pi\hbar\epsilon_0)^2} \frac{m}{p} \int_{mc^2}^{+\infty} m p dE_f \frac{\delta(E_f - E_i)}{16p^4 \sin^4(\theta/2)}$$

soit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \left( \frac{Z e^2}{8\pi\epsilon_0 m v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \tag{31}$$

C'est la section efficace de Rutherford obtenue ici avec des ondes de Barut. La dérivation présentée ici est techniquement plus simple que la dérivation conventionnelle [4] puisqu'elle évite l'hypothèse adiabatique liée à l'emploi d'ondes planes remplissant tout l'espace. Gardant trace du temps et ne passant à la limite qu'après mise au carré de l'amplitude, la conservation de l'énergie émerge naturellement et évite l'anomalie connue ( $[\delta(E_f - E_i)]^2$ ) également présente avec l'emploi de paquets d'ondes.

## 5 CONCLUSIONS

Nous avons montré dans cette communication qu'un nouveau type d'onde, solution de l'équation de Schrödinger libre, se propage sans déformation à travers des écrans et des potentiels pour diffracter et diffuser tout en gardant son individualité. Cette onde possède toutes les qualités requises pour pouvoir prétendre à être la représentation des objets quantiques. En effet, cette onde de Barut, produit de deux ondes, est à la fois ondulatoire par son onde de de Broglie et corpusculaire par son onde progressive de Debye. De plus, cette onde est localisée dans l'espace et de ce fait permet une description mathématique d'une particule individuelle correspondant à ce qui est accessible de nos jours aux expériences de diffraction [9].

Nous croyons que l'emploi d'ondes de Barut à la manière décrite dans cette communication permet de satisfaire le *desideratum* d'Einstein exprimé dès 1927 questionnant la complétude de la Mécanique Quantique relativement à la description de processus individuels : *"A mon avis, on ne peut lever cette objection que de cette façon-ci, qu'on ne décrit pas seulement le processus par l'onde de Schrödinger, mais qu'en même temps on localise la particule pendant la propagation. Je pense que M. de Broglie a raison de chercher dans cette direction."* [11].

L'objection dont il est question porte sur le mécanisme d'action à distance impliqué par l'affirmation que la Mécanique Quantique est une théorie complète des processus individuels.

L'une des raisons de l'affirmation d'Einstein était peut-être connectée à ses fameux calculs de fluctuation du rayonnement du corps noir dans lesquels les aspects corpusculaire et ondulatoire ne sont pas mutuellement exclusifs mais cohabitent et apportent chacun leur contribution à la fluctuation. Les grands et rapides succès théoriques à partir de 1926 alliés à la nouveauté des calculs et des idées ont sans doute contribué à voir comme définitif le formalisme basé sur l'emploi de fonctions d'ondes planes complété par le postulat statistique de Born et par voie de conséquence à se désintéresser de toute autre approche.

Il est étonnant que l'onde de Barut n'ait pas été découverte dans les années 20. L'approche purement ondulatoire de Schrödinger et la théorie de l'onde pilote de de Broglie étaient des tentatives de restituer les événements dans l'espace-temps ordinaire. Mais la seconde quantification et la nécessité de satisfaire au principe de relativité ont tracé une toute autre voie : celle des opérateurs de champs quantiques apportant une représentation intrinsèquement multi-particulaire : superposition d'opérateurs de création et

d'annihilation associés à des ondes planes décrivant des états d'impulsions bien déterminées.

Et pourtant les physiciens expérimentateurs voyaient depuis bien longtemps des scintillations individuelles finir par former des figures comparables à la théorie (expériences de Geiger et Marsden au début du XX<sup>ième</sup> par exemple). Egalement, les explications théoriques avancées pour décrire les traces laissées dans les chambres de Wilson par des particules individuelles ont toujours eu du mal à emporter l'adhésion pour elles alors qu'avec l'onde de Barut l'explication découle d'elle-même presque sans calcul.

La nouveauté n'est pas à rechercher dans les résultats produits, sauf peut-être la figure de diffraction d'Airy pour une particule matérielle, mais plutôt dans l'interprétation qu'offre l'emploi d'ondes de Barut. La perspective apportée par une telle approche est de nature à apaiser le débat relatif à la nature duale de la description usuelle par les ondes planes. Elle offre une alternative aux paquets d'ondes dispersifs linéairement combinés à partir d'ondes planes en proposant une synthèse des concepts duaux onde/corpuscule : ni l'un ni l'autre selon le dispositif de mesure mais plutôt les deux en même temps.

En chemin, nous avons découvert une nouvelle forme du propagateur de l'équation de Schrödinger dépendante du temps établissant l'équivalence rigoureuse entre les formulations hamiltonienne et lagrangienne. Cette forme est rigoureuse à tous les ordres en temps contrairement à celle de Feynman qui n'est valable qu'à l'ordre 1 en temps. L'astucieux contournement de cette difficulté par Feynman [7] a consisté à développer l'approche fonctionnelle dite intégrale de chemin, c'est-à-dire une version de la Mécanique Quantique faite d'une infinité de parcours infinitésimaux. Dans notre approche, au contraire, les parcours sont finis grâce à l'emploi de l'onde de Barut et permettent de calculer sans grande difficulté technique deux problèmes physiques intéressants.

De par les innombrables succès de la Mécanique Quantique, beaucoup d'autres problèmes physiques restent à calculer avec l'approche proposée dans cette communication hormis les problèmes indépendants du temps, lesquels sont inscrits dans le marbre de la Science puisque, ressortant de la physique atomique, ils font intervenir des ondes stationnaires. Le traitement d'une expérience de type Stern & Gerlach et le calcul de différentes sections efficaces bien connues (Mott, Compton, Dirac et de Bremsstrahlung par Bethe et coll.) feront l'objet de communications pro-

chaines. Cela nécessitera notamment la généralisation aux particules massives douées de spin du formalisme exposé ici.

### DEDICACES

En cette année anniversaire des 120 ans de la naissance de Louis de BROGLIE, physicien ayant percé le plus grand mystère de la microphysique et ayant en sa jeunesse et sur ses vieux jours cherché sans succès une explication mathématique à la dualité onde-corpuscule, je souhaite rendre hommage à la vision optimiste que la lecture de ses écrits m'a donné.

Également, les analyses percutantes apportées par Asim BARUT sur tous les aspects de la Mécanique Quantique et de l'Electrodynamique Quantique m'ont profondément inspiré. Sans cette ouverture vers d'autres possibilités, ce travail n'aurait tout simplement pas existé.

Cette communication a bénéficié de l'intérêt et de la bienveillance de la hiérarchie de l'auteur au sein de MILLENNIUM et de NUVIA en les personnes de MM. Laurent LE CROM, Éric LEJEUNE, Bruno LANCIA et Jérôme STUBLER. Qu'ils en soient remerciés ici.

### Références

- [1] Jean-J. TRILLAT, "Les preuves expérimentales de la mécanique ondulatoire", vol. II, La Diffraction des Électrons et des particules matérielles, Hermann et Cie (sous la direction de Maurice de Broglie), 1934.
- [2] Asim O. BARUT, "Diffraction and interference of single de Broglie wavelets – Deterministic wave mechanics", dans Courants, Amers, Ecueils en Microphysique, Fondation L. de Broglie 1993, p. 27.
- [3] Max BORN & Emil WOLF, "Principles of Optics", 7th edition, Cambridge University Press, 1999, p. 439-440.
- [4] Lewis H. RYDER, "Quantum Field Theory", Cambridge University Press, 1985; Claude ITZYKSON & Jean-Bernard ZUBER, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill, 1980.
- [5] Richard P. FEYNMAN, "Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction", Phys. Rev. vol. 80, p. 440 (1950), in "Selected Papers on Quantum Electrodynamics", Edited by Julian Schwinger, Dover Publications, 1958, p. 257-274.

- [6] Élie CARTAN, "Leçons sur les invariants intégraux", Hermann, Paris, 3ième édition, 1971, p. 32.
- [7] Richard P. FEYNMAN, "La thèse de Feynman – Une nouvelle approche de la théorie quantique", Pearson Education France, 2007, p. 26-27.
- [8] Wolfgang PAULI, "Wave Mechanics", Dover Publications, 2000.
- [9] Pier MERLI, Gian Franco MISSIROLI et Giulio POZZI, "On the Statistical Aspects of Electron Interference Phenomena", Am. J. Phys., 44, p. 306-307, 1976.
- [10] Milton ABRAMOWITZ et Irene STEGUN (Eds.), "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, 1965.
- [11] Albert EINSTEIN, "Intervention au Cinquième Conseil de Physique Solvay", dans Albert Einstein – Œuvres choisies, 1, Quanta, Seuil/CNRS, 1989.

*(Manuscrit reçu le 25 mai 2012)*