Astres chargés électriquement Sur l'exactitude de la solution de Reissner-Nordström

Pierre Marx

102, les bois du cerf, F – 91450 Etiolles, France
email: marx.p@wanadoo.fr

RÉSUMÉ. L'examen de la solution de Reissner-Nordström pour un astre chargé conduit à corriger très légèrement la masse prise en compte. Cet écart, pour infime qu'il soit en pratique, a pour conséquence de ramener l'horizon externe d'un trou noir chargé à celui de Schwarzschild.

ABSTRACT. Examination of the Reissner-Nordström solution for a charged celestial body leads to modify very slightly the mass taking in account. As a result, the difference, however insignificant it may be in practice, is bringing the external horizon of a charged black hole to the Schwarzschild one.

1 Introduction

Comme pour la métrique de Schwarzschild, la solution de Reissner-Nordström identifie la constante d'intégration des équations d'Einstein à la masse M de l'astre ″[3]. La "masse" du champ électrostatique (*i.e.* son énergie divisée par c^2) n'est pas prise en compte, probablement du fait qu'elle est extrêmement faible comme on le montre ci-après.

2 Métrique de Reissner-Nordström modifiée

2.1 Via l'approximation newtonienne

A grande distance, la masse totale M'qui crée le champ de gravitation est la somme de la masse M de l'astre central et de celle que représente le champ électrostatique créé par sa charge Q, soit:

$$M' = M + \frac{QV_a}{2c^2} = M + \frac{QV_p}{2c^2}\frac{r_Q}{r_a} \tag{1}$$

où V_a est le potentiel à la surface de l'astre, r_a son rayon, V_p le potentiel de Planck et r_Q le rayon de l'équipotentielle V_p..

Le rayon de Schwarzschild devient alors:

$$r'_s = \frac{2GM'}{c^2} = \frac{2G}{c^2}\left(M + \frac{1}{2c^2}QV_p\frac{r_Q}{r_a}\right) = r_s + \left(\frac{4\pi\varepsilon_0 G}{c^4}\right)\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_Q}\right)V_p\frac{r_Q^2}{r_a}$$

d'où:

$$r'_s = r_s + \frac{r_Q^2}{r_a} \tag{2}$$

ou avec la convention habituelle sur les unités ($G = c = 4\pi\varepsilon_0 = 1$):

$$M' = M + \frac{Q^2}{2r_a} \tag{3}$$

Les composantes temporelle et spatiale radiale de la métrique s'écrivent alors:

$$g_{00} = -g^{11} = 1 - 2\left(M + \frac{Q^2}{2r_a}\right)\frac{1}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \tag{4}$$

2.2 Via l'intégration des équations d'Einstein

En coordonnées Schwarzschildiennes, la métrique a pour expression ″[1]:

$$ds^2 = e^{-\lambda}c^2dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2d\Omega^2 \tag{5}$$

L'équation d'Einstein dont le second membre est la composante temporelle du tenseur d'énergie-impulsion, s'écrit alors:

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4}T_0^0 \tag{6}$$

Ou encore:

$$\frac{d}{dr}\left(re^{-\lambda}\right) = 1 - \frac{8\pi G}{c^4}r^2T_0^0 \tag{7}$$

Pour $r > r_a$, il vient:

$$\begin{aligned} re^{-\lambda} &= r - \frac{8\pi G}{c^4}\left(\int_0^{r_a}\mu c^2u^2du + \int_{r_a}^{r}\frac{\varepsilon_0}{2}E^2u^2du\right) \\ &= r - r_s - r_Q^2\int_{r_a}^{r}\frac{du}{u^2} = r - r_s - r_Q^2\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

d'où:

$$g_{00} = 1 - \left(r_s + \frac{r_Q^2}{r_a}\right)\frac{1}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \tag{8}$$

résultat identique au précédent (2).

2.3 Conséquence

Ecrivant (4) sous la forme:

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\left(1 - \frac{r}{r_a}\right) \tag{9}$$

on voit que la correction proposée s'annule à la surface de l'astre et donc ne joue pas dans son voisinage, ce qui est naturel puisqu'à cette distance, seule la masse de l'astre crée de la gravitation. Aux grandes distances, à l'approximation newtonienne, l'écart relatif de l'accélération gravitationnelle a_N est constant et vaut:

$$\frac{\delta a_N}{a_N} = \frac{Q^2}{2Mr_a}\left(= \frac{r_Q^2}{r_s r_a}\right) \tag{10}$$

Etant donné que le rapport Q/M est extrêmement petit, la correction l'est encore plus, de sorte qu'on peut considérer ce qui précède comme sans conséquence pratique en astrophysique.

3 Cas d'un trou noir chargé

Dans le cas d'un trou noir chargé, la correction précédente ramène l'horizon extérieur à celui de Schwarzschild, *quelle que soit la charge.* En effet, pour $r_a = 2M$, l'expression (4) s'écrit:

$$g_{00} = -g^{11} = 1 - \left(2M + \frac{Q^2}{2M}\right)\frac{1}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \tag{11}$$

qui s'annule pour $r = 2M$ qui est donc le rayon de l'horizon externe du trou noir. L'autre est *exactement* situé à $Q^2/2M$. Toutefois, contrairement à un astre visible, on ne détecte un trou noir que par ses effets gravitationnels à relativement grande distance sans que l'on puisse alors distinguer les parts respectives de la masse et de l'énergie électrostatique. On ne peut donc définir que le rayon (3): $M' = M + Q^2/2M$, ce qui ramène à la métrique classique de Reissner-Nordström.

4 Conclusion

La modification proposée distingue encore moins la métrique de Reissner-Nordström de celle de Schwarzschild et donc rend la charge d'un astre encore plus négligeable vis-à-vis de sa masse. Son seul intérêt, probablement purement académique, est le fait que l'horizon externe d'un trou noir électrique ne dépend que de sa masse mais que celle-ci n'est déterminée que si l'on connaît sa charge.

Références

[1] L. Landau, E. Lifchitz, *Théorie des Champs*, Ed. Mir, Moscou, $3^{\text{è}me}$ édition (1970)

[2] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman & co, New York (1973)

[3] C. Schomblond, *Eléments de la théorie classique des trous noirs*, Université Libre de Bruxelles (2003)

[4] J.P. Luminet, *Les trous noirs*, Editions du Seuil - Collection Points, Série Sciences (2002)

(Manuscrit reçu le 3 février 2012)