

Morphologie de la physique : Les géométries quantiques

V. BOCVARSKI*, J. BAUDON, J. REINHARDT, M. HAMAMDA, F. PERALES,
M. DUCLOY

Laboratoire de Physique des Lasers, CNRS-UMR 7538,
Université Paris 13, 99 Av. J.B. Clément, 93430-Villetaneuse, France
(*) Permanent address : Institute of Physics Belgrade, Pregrevica 118,
11080 - Zemun (Serbie)

Corresponding author : jacques.baudon@univ-paris13.fr

RÉSUMÉ. Les rapports des mathématiques et de la géométrie avec la physique sont à la base même de toute réflexion logique sur le cosmos. Dans l'ancienne Grèce, il s'agit d'un monde de formes. L'élaboration et le devenir de ce monde sont exposés dans un texte fondamental : le *Timée* de Platon. L'on y voit comment, partant de deux triangles élémentaires irréductibles, Platon construit un ensemble de structures plus complexes (les polyèdres), dont les associations vont lui permettre, dans le cadre d'une véritable *géométrie quantique*, de reconstituer les quatre éléments (feu, air, eau et terre), leurs transformations mutuelles et de là tout le fonctionnement du monde. En raison d'un changement radical de principe ontologique, le monde de l'Europe occidentale est devenu celui du temps et de l'action, et sa description requiert un outil mathématique totalement nouveau : la fonction. Dès la Renaissance, le phénomène ondulatoire a été reconnu et son importance n'a cessé de croître jusqu'à l'aube du XX^e siècle où la notion d'onde stationnaire s'est imposée, en apportant la quantification. Ainsi, encore une fois, le monde redevient celui des formes, mais celui des formes dynamiques.

ABSTRACT. Relationships between mathematics and geometry with physics are the very basis of any logical reflection about the Cosmos. In Antique Greece, world was a world of shapes. Birth and evolution

of this world are explained in a fundamental text by Plato: Timaeous. Starting from two elementary irreducible triangles, Plato builds more complex structures (polyhedrons) whose associations allow him – in the framework of a quantum geometry – to reconstruct the traditional four elements (fire, air, water and earth) and their mutual transformations and then, from that, the complete operation of the world. Because of a drastic change of ontological principle, the world of Western Europe became the world of time and action. Its description requires an entirely new mathematical tool: the function. Since the Renaissance wave phenomena have been recognized. They became increasingly important till the dawn of the twentieth century when the concept of standing wave has been needed, bringing with itself the quantization. Then once again the world becomes a world of shapes, more exactly a world of dynamical shapes.

INTRODUCTION

Le titre de cet article sonne – à dessein – mi « Grèce Ancienne », mi « physique moderne », mettant en avant le rôle éminent de la géométrie et de son aspect quantifié présent, comme on le verra, dès Platon. Il faut y voir plus largement l'examen morphologique des rapports existant entre Mathématiques et Physique. Depuis les origines, nombres et géométrie sont intimement liés. On pourrait dire de Pythagore, quand il géométrise les nombres, qu'il se comporte en arpenteur au sens premier du mot, bien qu'à l'évidence les conséquences qu'il en tire dépassent largement le simple domaine de l'arpentage. Depuis lors, les nombres et leurs relations, ce qui constituent l'arithmétique, puis les fonctions et bien d'autres grandeurs algébriques n'ont cessé de sous-tendre la géométrie, voire de déclencher ses progrès. Même si, par une sorte de coquetterie, le traité de mécanique générale de Lagrange se voulut délibérément dépouillé de toute figure, il n'empêche que des figures géométriques, bien qu'invisibles, y étaient bel et bien aussi présentes que les équations algébriques.

Quant aux rapports mutuels entre les mathématiques et la physique naturelle, celle des objets de notre univers, ils n'ont pas cessé d'exister et de se développer. Ils sont en effet à la base même de toute réflexion logique sur le Cosmos, c'est à dire sur l'*ordre* des choses, l'entité mathématique

(arithmétique, géométrique ou algébrique) étant *a priori* et l'objet *a posteriori*. Il s'agira donc ici, une fois encore, d'examiner une démarche de la Pensée dont la structure, la *morphologie*, dirige toute l'évolution historique de la Science. Depuis Platon et ses polyèdres, la quantification a été une manière fructueuse et parfois obligée de concevoir notre monde. On pense évidemment aux quanta de Planck et aux effets considérables qu'ils ont eus sur la mécanique. Toutefois ce serait là une vue trop réductrice des choses car, à bien des reprises, des « quantifications » ont vu le jour. Il suffit pour s'en convaincre, de penser aux atomes de Leucippe et Démocrite, aux monades de Leibniz et au rôle très important qu'a joué au cours des deux derniers siècles et que joue aujourd'hui encore la théorie des groupes dans la physique (symétries et physique moléculaire, cristallographie, physique des particules, théorie de la gravitation).

1 LA GÉOMÉTRIE QUANTIQUE DE L'ANCIENNE GRÈCE

Οὐδεις ἄγεωμέτρητος εἴσῃτο

(Nul n'entre ici s'il ne connaît la géométrie)

[Phrase gravée au fronton d'entrée de l'Académie de Platon]

Recommandation en matière de lecture

En abordant les œuvres de Platon, nous devons d'abord, comme l'ont fait bien d'autres avant nous, reconnaître son immense génie poétique et philosophique, en ce qu'il réussit à harmoniser des propositions purement rationnelles avec des tensions proprement dramaturgiques, montrant que toutes ont une seule et même source, l'Homme. Mais cette double démarche, mêlant style poétique et méthode explicative, est à l'origine de confusions et d'interprétations erronées dès lors qu'on analyse ses œuvres d'un point de vue trop rationnel. Le meilleur exemple nous en est offert par le *Timée* [1]. Le thème central en est la cosmologie, et la forme adoptée celle du dialogue. Traditionnellement un dialogue s'analyse comme un discours qui se déroule dans le temps et que l'on peut donc diviser en épisodes. Dans le premier épisode, Timée parle du Chaos et du Démiurge qui, en introduisant la règle dans le Chaos, fait naître le Cosmos. Cette règle, « l'âme du Cosmos », née du Démiurge, constitue un ordre cosmique non visible, l'organisation interne et l'harmonie de l'univers. Dans l'épisode suivant, Timée explique l'essence

mathématique de cette âme du Cosmos, que l'on pourrait encore appeler, dans un langage contemporain, la base mathématique du monde, ou encore, faisant référence aux polyèdres « quantifiés » de Platon, la *géométrie quantique*. On s'attendrait à ce que cette suite de raisonnements parvienne à expliquer le lien existant entre les contraires initiaux, à savoir Démiurge et le Chaos. Il n'en est rien car c'est ici que Timée paraît tomber dans une certaine confusion, étant obligé de constater que deux principes n'y suffisent pas et qu'il est nécessaire d'en ajouter un troisième. Platon, quant à lui, appelle ce troisième principe l'espace, qui est le substrat, la « sans forme » où s'opère la création (espace donc bien différent de celui d'aujourd'hui). Alors, reprenant les choses depuis le début, il admet enfin comme base d'explication du monde les trois principes fondamentaux que sont l'Être, la Création et l'Espace.

En fait, c'est de cette analyse dans le temps que naît la confusion. Le *Timée*, daté de 358 av. J.C, est l'un des derniers textes de Platon (qui a alors 70 ans) et il paraît invraisemblable d'expliquer cet attermoisement par l'inexpérience de l'auteur. Pourquoi diable Platon ne mentionne-t-il pas d'emblée la nécessité de trois principes fondamentaux, plutôt que de tomber d'abord dans la confusion puis être contraint de tout reprendre depuis le début ? Ou, bien, s'il a découvert la nécessité du troisième principe au cours même de l'écriture du *Timée*, pourquoi n'a-t-il pas réajusté son texte en une explication homogène¹ ? Mais écartons le Temps de notre analyse. Alors tout s'éclaire : le *Timée* cesse d'être une suite chronologique de propositions pour devenir « simultané », la succession des explications devenant stratification. La première explication du Cosmos que l'on inscrivait dans le temps se transforme ainsi en une structure permanente mais stratifiée. C'est ce point de vue atemporel qu'il nous faudra adopter chaque fois que nous aurons à faire à un texte philosophique de l'ancienne Grèce.

Genèse (Γένεσις)

Revenons tout d'abord sur la contradiction première, celle qui oppose Démiurge au Chaos. Elle n'est pas nouvelle. On la trouve déjà chez Anaxagore (500 – 428 av. J.-C.) qui, s'écartant des formes mythiques, emploie au lieu du terme Démiurge, le terme « *Noos* » (l'Esprit) :

Au début tout est mêlé. Là où rien n'est encore séparé, n'existe aucune diversité, n'existe ni blanc ni noir, non plus que la couleur.... Il n'y a ni

¹ Il se trouve même certains critiques (N.Volf. cité par Hegel) pour qui le *Timée* n'est pas un texte de Platon, mais plutôt une compilation de différentes œuvres de quelques « Académiciens », arrangée plus tard en un texte unique.

qualité ni quantité (c'est le chaos). *Tout est mêlé, excepté le Nous qui a une existence séparée et propre. Ensuite le Nous a travaillé ce chaos où rien n'était séparé, en y produisant les objets et leurs rapports.* [2]

Il nous faut ici, une fois encore, oublier le temps. Des termes tels que « au début », « ensuite », « d'abord », « après » sont des formes linguistiques et non causales. Restons en plutôt à « *a priori* » ou « *a posteriori* ». Il nous faut simplement examiner quelles sont la cause et la conséquence, car projeter cela dans le temps ne mène nulle part. Pour Anaxagore, le Chaos est totalement indéterminé. On ne saurait lui associer ni qualité ni quantité et de ce fait le Chaos n'est *rien*. Mais pour mieux comprendre Anaxagore, posons-nous cette question, que lui-même s'est d'ailleurs peut-être posée : *Le théorème de Pythagore vaut-il dans le Chaos (i.e. le rien) ?* En géométrie plane, ce théorème consiste en une simple relation, un *rapport* ($a^2 + b^2 = c^2$), non pas choisi au hasard mais strictement défini. Il se réfère aux triangles rectangles, *i.e.* à une forme géométrique précise. Il doit être exactement lui-même, et non pas à peu près pareil à lui-même. On ne saurait imaginer un triangle rectangle qui ne soit assujéti au théorème de Pythagore. D'autre part le théorème lui-même reste indifférent au fait que ce triangle ait été imaginé par un génie mathématique ou par un simple profane, indifférent aussi à ce que le triangle soit grand ou petit, qu'il s'agisse d'un triangle cosmique tracé entre des étoiles, ou d'un triangle de taille médiocre. L'existence du triangle est conditionnée par le théorème. C'est à dire que le théorème est *a priori* et le triangle rectangle est *a posteriori*. En conséquence, ce rapport existe indépendamment de n'importe quelle autre existence, qu'il s'agisse du cosmos, du chaos ou de *rien*. Mais si la relation $a^2 + b^2 = c^2$ n'est pas un « objet », elle n'en est pas moins « quelque chose » car elle est déterminée pour soi et en soi, et elle diffère de tout autre relation telle que, par exemple, $x^2 + y^2 = r^2$ (pour le cercle) ou $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (pour l'ellipse). Non seulement elle est déterminée, mais elle détermine, elle définit l'objet auquel elle confère ses attributs. Elle a un pouvoir de création, et pas de n'importe quoi : elle a le pouvoir de produire le triangle rectangle, comme d'autres relations auront le pouvoir de créer le cercle, l'ellipse, etc. C'est-à-dire que le théorème, pure attitude de l'esprit, produit l'« objet ». Donc, selon Anaxagore, nous avons le Chaos ou le *rien* et le *Nous* qui n'est pas *rien*, mais au contraire « quelque chose » capable de produire des formes déterminées. Le lieu où ces formes vont être réalisées lui indiffère, dès lors que le substrat suffit à leur production. Or il s'avère que, pour ces créations, le *rien* est suffisant. Du point de vu du *Nous* en tant que créateur, la place, le début, la fin de la création sont sans- Esprit. Mais si nous décidons de prendre comme début le Chaos, nous sommes amenés à reconnaître que le *Nous*, par sa

production, introduit des différences dans l'indéterminé, de l'ordre dans le désordre. Car si les formes distinctes existent dans le Chaos, alors le Chaos n'est plus indéterminé mais déterminé. Il ne s'agit donc plus du Chaos, mais du Cosmos.

Il ne faut pas considérer ces formes selon la catégorie de l'« espace », à la façon qu'aurait une sphère d'être placée à côté de, ou au dessus de, ou dans une pyramide, car nous tomberions alors dans l'absurdité ou la tautologie. En effet il devrait alors s'agir de « *la place dans l'espace dans laquelle se trouve la forme de la pyramide* ». Or cette place doit être identique à la forme propre de la pyramide, ce qui nous fait aboutir à la conclusion sans intérêt que la pyramide se trouve en elle-même. Il en irait de même des catégories du temps ou de la quantité (par exemple que la sphère est plus grande que la pyramide).

En fait, il convient de considérer ici la *différence*, car la pyramide (P) n'est pas la sphère (S) et inversement, ce que l'on écrit $P \neq S$, où le signe réciproque \neq signifie à la fois « non-sphère » et « non-pyramide »². La différence n'est ni dans la sphère ni dans la pyramide, elle est hors de la sphère et hors de la pyramide. L'esprit, par ses lois, a créé la sphère et la pyramide, mais supposer qu'il existe une loi spécifique (*legis specialis*) créant la différence n'aurait aucun sens. Se pose alors la question de savoir si la différence possède ou non sa propre existence. Comme c'est l'Esprit qui produit les formes, cette différence ne peut être que négation des formes, une non-forme. Et la question devient la suivante : dans le Cosmos des formes, la « sans- forme » existe-t-elle ou non ? Ce qui se ramène à l'alternative suivante : (i) ou la « sans- forme » possède sa propre existence, (ii) ou il ne s'agit que d'un manque d'existence, d'une absence de forme.

L'espace : Être ou Non- Être ?

La question de savoir si « le Non- Être est », d'emblée rejetée par les Eléates, a été analysée pour la première fois par les atomistes. Chez Leucippe et Démocrite n'existent que les « formes individuelles » (les atomes) et le vide. Les atomes qui ne se différencient que par la forme, peuvent se mouvoir dans le vide. Ce « vide », nous le comprenons facilement aujourd'hui, avec nos idées apprises sur « l'espace », mais, du point de vue des Grecs anciens, le « vide » est identique au Non-Être. Comme les atomes ainsi que les formes individuelles (triangle, carré, sphère, pyramide), sont l'Être, le Non- Être des formes ne peut être que ce qui est « sans- forme ». On reconnaît ainsi

² La différence est un doublet, car « non-sphère » et « non-pyramide » ne sont pas la même chose.

l'existence du « Sans- Forme » comme le substrat dans lequel les atomes mettent leurs formes. Cette image, dans son essence, évoque la description classique de Newton dans laquelle la matière qui, outre la forme, possède l'inertie et l'imperméabilité, est placée dans l'espace qui, lui-même, ne possède aucune forme. Mais, à l'époque même de Newton, le problème soulevé par la définition de l'espace a été posé, en particulier par Leibniz. Si l'espace est une entité spéciale, c'est qu'il est « quelque chose », et comme « quelque chose » doit être déterminé, l'espace doit avoir des déterminations différentes de celles de la matière. En outre tout mouvement se déroule dans l'espace et celui-ci doit donc être capable de supporter la dynamique. L'idée que l'espace serait le *sensorium* de Dieu ne suffit pas à sa détermination et Newton a tenté de trouver la solution en introduisant sa « géométrie dynamique » (*cf.* le calcul des fluxions).

Mais le Nous (l'Esprit) peut-il produire, de par sa volonté et de par son pouvoir créateur, *n'importe* quelle forme ? Autrement dit produire une infinité de formes différentes ? Mais cette infinité conduirait à une différence nulle entre formes, qui n'en ferait alors plus qu'une et dans ce cas il n'y aurait plus aucune création. L'Esprit, donc, n'est pas en droit de produire n'importe quelles formes, dès lors qu'il est demandé à celles-ci de se maintenir, d'être des formes stables dont la structure interne demeure permanente. Au contraire, toute forme autre que celles là *disparaît* au moment même de son apparition, et cela ne saurait être considéré comme une véritable création. Ainsi, *par nécessité*, l'Esprit doit-il produire des formes stables, et ces formes sont nécessairement en nombre fini.

Nombres (Αριθμοι)

Si l'on considère les mathématiques comme une sublimation des modèles théoriques du Cosmos développés dans les sciences naturelles, on peut dire que la Mathématique grecque commence avec Pythagore. Il a compris le *nombre* comme le principe d'ordre du monde des choses corporelles, celui des « accidents ». Son idée de base a été de dire que: « *le nombre est l'essence de toutes choses et l'organisation de l'univers présente en général dans ses déterminations un système harmonique de nombres et de relations entre ces nombres.* » [3]. Plus tard, cette idée a été développée et approfondie, mais dans son essence, elle est demeurée la même. Le monde Grec est un monde d'objets (ou d'*accidences*) qui peuvent apparaître ou disparaître, sans jamais changer. Ils sont donc dépourvus de toute interaction mutuelle et leurs rapports sont dénués de toute qualité.

Le théorème de Pythagore est, pour soi et en soi, un rapport de quantités (un rapport entre des nombres), c'est-à-dire un rapport sans qualité. Mais ce rapport définit une forme sévèrement déterminée (le triangle rectangle), qui est de nature qualitative. De cette façon le rapport quantitatif est *a priori* et le rapport qualitatif *a posteriori*. Il est simple de conclure que la structure de la forme est déterminée par les nombres et leurs rapports. Il faudra donc examiner ces rapports et voir dans quelle mesure on pourra les généraliser. Les objets ne peuvent exister que si l'existence de chacun est entière et distincte. Mais comment et pourquoi telle ou telle existence serait-elle en « droit » d'être, c'est dire de passer d'une simple possibilité (*potencia*) à la réalité (*accidence*) ? Le processus selon lequel s'effectue ce passage a été identifié par Pythagore. Il démontre que toute existence est en soi et pour soi un quadruplet, et que, parce que chaque existence est Une et Unique, le nombre 1 doit posséder lui-même une structure quadruple [4]. Notons en passant qu'Aristote a montré que le syllogisme possède cette même structure.

Il s'agit donc ici de nombres (Un, l'Unité, ... le Quadruplet) et il semble que les procédures de production des accidences et de leurs rapports relèvent de l'arithmétique. Mais il faut souligner que si, avec les seuls nombres, on peut dénombrer des choses, l'expression de leurs rapports demeure inaccessible tant que l'on ne dispose pas des opérations arithmétiques. Pythagore tourne habilement la difficulté en « géométrisant » les nombres (gnomon), c'est à dire en établissant entre eux des relations de nature géométrique. Depuis lors et jusqu'à Euclide (250 av. J.C), la Mathématique des anciens Grecs est restée géométrique et elle a parfaitement convenu à leur vision du monde et à leur loi de causalité³. Par cette géométrisation, les nombres acquièrent la mesure. On peut alors leur faire correspondre des formes géométriques, au travers de relations quantitatives⁴.

Le monde Grec est un monde d'accidences simultanées. On ne parlera jamais du comportement d'un système mais de sa structure, et les règles statiques de géométrie y suffisent parfaitement. L'on pourrait se dire que les relations entre états dans le modèle de Bohr-Sommerfeld – états définis par des nombres – sont tout aussi statiques et incapables de suivre une quelconque dynamique. En fait il n'en est rien car, dans la conception

³ Quand Euclide parle de triangle, il ne pense jamais à un système de trois droites qui se coupent, ni à un ensemble de trois points dans l'espace à trois dimensions. Euclide définit la droite comme une *longueur sans largeur*. Cette définition peut sembler aujourd'hui naïve mais, dans la mathématique antique, elle était parfaite.

⁴ De la même façon, les nombres, dans le modèle de Bohr – Sommerfeld, sont « mesurables » en ce sens qu'ils déterminent le moment orbital et l'orientation du spin dans un champ magnétique.

« occidentale », le changement d'état d'un substrat inerte est autorisé [5]. La substance ne pouvant se trouver simultanément dans deux états différents (par exemple un objet ne peut avoir simultanément deux vitesses différentes), un changement (des seuls attributs) n'est possible qu'en tant que disparition et apparition des quantités relatives aux attributs successifs. En d'autres termes, comme les changements s'opèrent dans le temps, il est évident que pour les décrire des relations géométriques statiques ne suffisent pas. Il nous faut une autre forme mathématique englobant la « succession », dans laquelle la quantité peut être générée et disparaître pour un même objet. Comme nous le verrons plus loin, par l'introduction des fonctions par Descartes, la Mathématique occidentale est devenue la sublimation d'un monde temporel, inaccessible à la géométrie classique.

Deutéronome (Deuteronomion)

*Si tu as perdu un monde,
Ne t'afflige pas, car ce monde n'est rien.
Si tu as reçu un monde,
Ne te réjouis pas, car ce monde n'est rien.
Les maux et les délices passent,
Passent à côté du monde, car ce monde n'est rien.*
Platon

Mais que peut faire le Démiurge, alors qu'existe la Nécessité (Ananke) ? Quel est son rôle si la Création se fait sans lui ? La Nécessité possède le pouvoir de création et non celui de destruction : avec elle vient l'émergence, non la disparition. Un opérateur de création, par exemple celui de la relation ($a^2 + b^2 = c^2$), ne saurait être celui de l'annihilation. Avec la seule Nécessité, nous aurions ainsi une infinité de triangles, de sphères, de pyramides, infinité éternelle et dénuée de tout changement. Pour qu'il ait changement, la disparition est nécessaire, mais cela n'aurait guère de sens d'imaginer tout un ensemble d'opérateurs d'annihilation uniquement destinés à détruire ce qu'ont produit les opérateurs de création. C'est à la fin du dialogue que l'œuvre du Démiurge est le mieux présentée, quand Timée dit :

« Ayant reçu en partage les vivants, mortels et immortels, et atteint ainsi sa plénitude, il est n  notre monde des vivants visibles, image d'un dieu intelligible, très grand, très beau, très bon et parfait, ciel unique, le seul de son espèce. »⁵

⁵ Timée 92c

Or l'Esprit lui-même ne peut créer arbitrairement, soumis qu'il est à la Nécessité dont le pouvoir est absolu.

« Puisqu'il en est ainsi, nous devons admettre qu'il y a une espèce première : la forme intelligible, invariable, inengendrée et indestructible, qui ne reçoit rien venu d'ailleurs, qui ne participe à aucune autre chose qu'elle-même, et qui est invisible à tous nos sens. »⁶

Dès lors comment créer le Cosmos (l'ordre), un monde « vivant et visible », dans ce système éternel des formes, qui contient la différence mais pas le changement ?

« (L'Esprit) prit en main tout ce qui était visible – cela n'était pas en repos mais se mouvait sans concert et sans ordre – et l'amena du désordre à l'ordre, ayant estimé que l'ordre vaut infiniment mieux que le désordre⁷ ... C'est ainsi que l'existence de notre monde résulta du mélange de la nécessité et de l'intellect.⁸

Ainsi bien que la Nécessité ne puisse être ni abolie ni surmontée, elle peut servir à l'Esprit. Le Cosmos inclut donc la Nécessité, mais sa structure doit consister en une harmonie logique et durable dans laquelle se trouve restauré le changement. Mais où l'Esprit va-t-il faire apparaître les choses ? C'est là qu'intervient l'Espace, ce que Platon nomme encore le réceptacle, la nourrice de tout :

« Par ailleurs, il y a une troisième espèce [...] n'admettant pas la destruction qui fournit un emplacement à tout ce qui naît, une réalité qu'on ne saisit qu'au terme d'un raisonnement bâtarde ne s'appuyant pas sur les sens. C'est à peine si l'on y peut croire. »⁹

Ce n'est pas de l'espace que proviennent les qualités, elles proviennent des lois de la création. L'espace, issu de la création elle-même, est la « sans – forme » qui fait la frontière, la différence entre les formes. Pour Platon, cet espace est un élément particulièrement important. Il ne le nomme ni *τοπος* (le lieu), ni *κενον* (le vide, l'espace vide), mais *χώρα* (l'espace plein¹⁰, qui emplit comme substrat l'intérieur des polyèdres).

Maintenant que les premiers principes – Esprit, Nécessité, Espace – sont établis, la question se pose du développement logique de la pluralité qui règne dans le monde et du passage des principes aux modes d'apparition.

⁶ Ibid. 52a

⁷ Ibid. 30a

⁸ Ibid. 48a

⁹ Ibid. 52a

¹⁰ Substrat indéterminé servant à la réalisation des formes géométriques – c'est-à-dire le Chaos chez Anaxagore.

Déjà la philosophie ionienne¹¹ avait démontré que les objets, en dépit de leur pluralité, ne peuvent apparaître que sous quatre formes de base : la Terre, l'Eau, l'Air et le Feu¹². En fait ces éléments changent constamment et Timée note que ce ne sont pas, à proprement parler, des êtres particuliers mais « ... quelque chose de fugitif, n'admettant pas qu'on en dise « celui-ci » ou « celui-là », ou tout autre expression qui les désignerait comme des réalités permanentes »¹³. Les objets sont instables, relatifs, ils apparaissent et disparaissent, mais les principes sont permanents et immuables, ainsi que les quatre formes de base des apparences. Il faut donc démontrer que, des trois principes, suivent quatre et seulement quatre formes d'apparitions stables d'où découlera la pluralité des objets instables et variables.

Contrairement au monde de l'Europe occidentale moderne dans lequel la catégorie de base est l'action (la force), et où tout se résume à l'énergie, au travail, aux heures de travail, etc. le monde Grec est un monde de formes. Tirant les enseignements de l'oeuvre de ses prédécesseurs et de ses contemporains ainsi que de leurs contradictions éventuelles, Platon élabore la structure logique du monde sensible sur la base des formes. Il introduit pour cela un ensemble de formes élémentaires qui sont, pourrait-on dire, les particules de base. Il est donc parfaitement justifié de nommer, selon une terminologie moderne, « géométrie quantique » une telle description du monde. Les plus simples et les plus fondamentales de ces formes élémentaires sont le triangle rectangle scalène (demi-triangle équilatéral) et le triangle rectangle isocèle (demi-carré). Dans ces triangles, le théorème de Pythagore apparaît de deux façons différentes (c'est un « doublet »), puisque, si a désigne le côté du triangle équilatéral, les côtés du triangle scalène sont $a/2$, a , $a\sqrt{3}/2$ alors que, si a est le côté du carré, les côtés du triangle rectangle isocèle sont a , a et $a/\sqrt{2}$ ¹⁴. Mais pourquoi Platon choisit-il précisément ces deux triangles ? Dans le Timée ce point n'est nulle part explicitement souligné, mais nous pouvons aisément conclure que la raison de ce choix tient à leurs propriétés spécifiques. En fait, ces deux triangles peuvent être divisés en triangles plus petits dont le rapport des côtés reste le même que dans les triangles initiaux. Ainsi le triangle rectangle scalène peut-il se diviser en trois et le triangle rectangle isocèle en deux triangles

¹¹ Thalès, Anaximandre, Héraclite

¹² On peut considérer aujourd'hui encore qu'il n'existe que quatre formes d'apparence ou phases : solide, liquide, gaz et plasma

¹³ Ibid. 49e

¹⁴ Ibid. 53c-56c

semblables (figure 1). Les rapports entre les côtés sont précisément définis. C'est à dire que la grandeur de ces triangles est quantifiée. Evidemment ces divisions « primaires » peuvent être poursuivies indéfiniment.

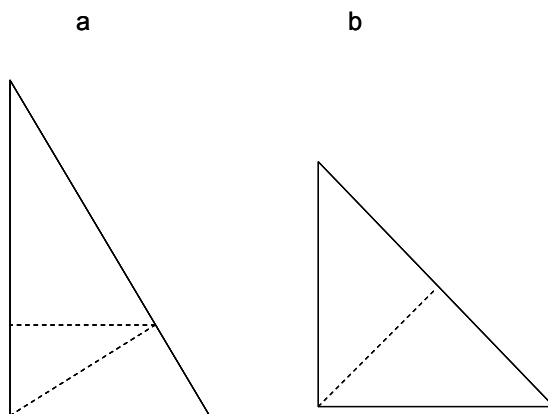


Fig. 1. Division primaire des deux triangles rectangles de base, (a) scalène, (b) isocèle.

Ces deux triangles sont irréductibles – ce sont deux « particules élémentaires » – et leur combinaison permet d'engendrer tous les autres triangles et au delà, d'autres formes plus complexes, telles que les quatre (et seulement quatre) polyèdres réguliers fondamentaux que sont le tétraèdre, l'icosaèdre, l'octaèdre – formés par combinaison de triangles équilatéraux – et le cube – le seul formé par combinaison de carrés, polyèdres auxquels Platon associe les quatre éléments (figure 2). Ces polyèdres peuvent se décomposer en triangles constitutifs, puis passer, par regroupement, d'une forme à une autre, de sorte que la transition d'un élément à un autre est possible et justifiée mathématiquement. L'exception est bien sûr le cube (la Terre), symbole de l'inaction absolue, de ce qui en soi n'a pas de mouvement et qu'aucune transmutation ne saurait atteindre.

« La terre, quand elle rencontre le feu et qu'elle est dissociée par ce qu'il y a en lui d'aigu, se retrouve, une fois dissoute, soit dans le feu lui-même soit dans une masse d'air ou d'eau, jusqu'à ce que ses propres parties venant à se rencontrer de nouveau quelque part, s'ajustent les unes aux autres et

redeviennent de la terre, car la terre ne peut en aucun cas se transformer en autre chose. »¹⁵

Evidemment, le feu, l'air, l'eau et la terre, sont des apparences - non sensibles - de ces formes géométriques de bases qui donnent le fondement aux corps, à leurs mouvements et leurs transmutations. L'Âme de l'univers est non seulement une simple structure logique et mathématique mais elle est aussi la base du mouvement. Le problème entier du mouvement, et le problème de la transformation des corps élémentaires sont exposés dans le *Timée* d'une façon purement géométrique. Les « atomes », en tant que formes géométriques propres et régulières ne peuvent naître que des triangles élémentaires correspondants, et ils ne peuvent disparaître qu'en se décomposant en ces mêmes triangles.

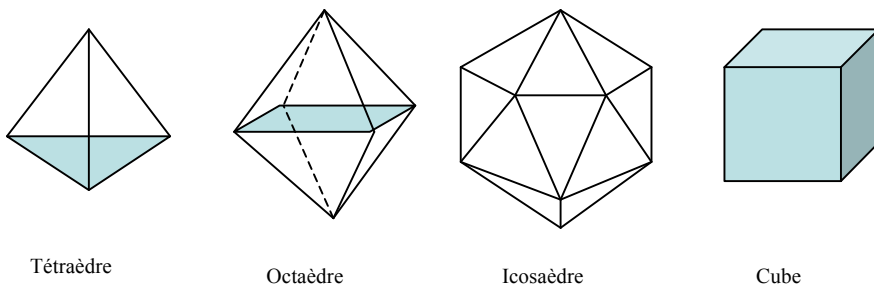


Fig. 2. Les quatre polyèdres de Platon

En outre, ces triangles rectangulaires de base, ne peuvent être ni créés ni détruits du fait que, dans une transformation donnée, leur nombre reste conservé. C'est dès le début du *Timée* que Platon pose la base ontologique de sa géométrie quantique en déclarant :

« Le monde doit être éminemment corporel, c'est à dire visible et tangible. Or, sans feu rien ne saurait jamais devenir visible; et rien ne saurait par ailleurs être tangible sans quelque chose qui soit solide ; or rien ne saurait être solide sans terre. De là vient que le dieu, lorsqu'il commença à constituer le corps du monde, le fabriqua avec du feu et de la terre. »

Cela peut sembler naïf, du moins si l'on entend par le mot Terre, l'humus, et par le mot Feu, la transformation chimique d'oxydoréduction. Mais les dieux ne s'occupent pas de choses aussi triviales. Le feu – forme d'apparition basée sur le tétraèdre – est chez Platon le terme qui représente à la fois la vie, l'évolution et les événements, en résumé l'activité (comme chez Héraclite).

¹⁵ Ibid. 56d

La Terre – forme d'apparition basée sur le cube –, passive et sans-forme, est celle qui va acquérir la forme. Les extrêmes sont ainsi clairement présentés : Le Feu, activité absolue sans laquelle « rien ne saurait jamais devenir visible » et la Terre passivité absolue, sans forme et qui supporte d'être formée. Platon continue ainsi :

« Deux éléments ne peuvent à eux seuls former une composition qui soit belle sans qu'intervienne un troisième; il faut en effet, entre les deux, un lien qui les unisse. Or, de tous les liens, le plus beau, c'est celui qui impose à lui-même et aux éléments qu'il relie l'unité la plus complète. C'est ce que, par nature, la proportion réalise de la façon la plus parfaite. Chaque fois que de trois nombres quelconques, que ces nombres soient entiers ou [entiers] en puissance¹⁶, celui du milieu est tel que ce que le premier est par rapport à lui, lui-même l'est par rapport au dernier, et inversement, que ce que le dernier est par rapport à celui du milieu, celui du milieu l'est par rapport au premier, celui du milieu pouvant devenir premier et dernier, le dernier et le premier pouvant à leur tour devenir moyens, il en résulte nécessairement que tous se trouvent être dans une relation d'identité, et que, parce qu'ils se trouvent dans cette relation d'identité les uns par rapport aux autres, ils forment tous une unité. »¹⁷

On se retrouve ainsi, avec ces trois nombres en progression géométrique (cf. la théorie dite des « médiétés », des moyens termes), avec le trias de Pythagore dont l'équivalent en Logique, comme l'a montré Aristote, est le syllogisme. Or le syllogisme dans lequel il n'y a pas de conclusion sans prémisses ni prémisses sans conclusion apparaît comme l'Un plutôt que comme simple unité et sa structure est quadruple : c'est le tetras, le nombre parfait de Pythagore. Pour respecter cette même perfection dans notre monde, « ciel unique, le seul de son espèce », Platon va jouer – et bien avant l'heure – sur le nombre de ses dimensions spatiales :

« Cela dit, si le corps de l'univers avait dû être une surface, dénuée de toute profondeur, une seule médiété [un seul intermédiaire] eût suffi à établir un lien entre elle-même et les deux termes qui l'accompagnent. Mais en fait, il convenait que ce monde fût un solide et, en ce qui concerne les solides, une seule médiété n'est jamais suffisante, il en faut toujours deux... Voilà bien pourquoi le dieu, ayant placé au milieu, entre le feu et la terre, l'eau et l'air, et

¹⁶ Il s'agit d'un nombre devenant entier par élévation à une certaine puissance, par exemple $\sqrt{2}$.

¹⁷ Ibid. 31c

ayant introduit entre eux, autant que c'était possible, le même rapport [...] il a créé, à l'aide de ces liens, un monde visible et tangible. »¹⁸

Dans ce tetras d'éléments, le feu et la terre demeurent les extrêmes et c'est la force de l'Esprit qui unifie les contradictions ontologiques. Mais cela ne va pas sans quelque difficulté. Dans la proportion simple, le membre moyen doit avoir une même relation avec le premier et le dernier membre. Les nombres séparables en deux ¹⁹ représentent la surface. On peut les appeler aussi nombres « carrés » car, entre deux nombres carrés a^2 et b^2 , on ne peut insérer qu'un seul membre, à savoir ab , pour obtenir la proportion géométrique voulue. Les nombres séparables en trois représentent le corps solide. Pour eux, Platon étend la propriété précédente en introduisant ce qu'il nomme la proportion « allongée » dans laquelle le rapport de chaque membre au suivant est constant : $a/b = b/c = c/d = \dots$. La moyenne géométrique de deux nombres cubiques étant en général un nombre irrationnel ($\sqrt[3]{a^3 b^3}$), il est nécessaire, pour n'avoir à faire qu'aux nombres rationnels, d'insérer deux nombres entre les extrêmes : $a^3 / (a^2 b) = ab^2 / b^3$. (Par exemple, pour $a = 2$ et $b = 3$, on obtient la suite géométrique 8,12,18, 27).

Ces propriétés déterminent deux types de transformations de base entre formes élémentaires. Car entre le Feu, l'Air et l'Eau il n'y a pas de différence au niveau des triangles élémentaire et par recombinaison – qui peut dépendre des circonstances extérieures – ces triangles peuvent être réintégrés à n'importe lequel des trois polyèdres (Table I). Par exemple, la transformation de l'Eau en Feu peut être soit directe, soit passer par l'Air. Mais si le nombre de tétraèdres domine, le processus s'achèvera par le passage total de l'Eau au Feu. Dans le monde des sens, ce processus s'appelle évaporation, dilution, chauffage (passage du froid au chaud). Mais, dans la physique mathématique de Platon il se décrit comme la réintégration les icosaèdres aux tétraèdres. Ce qu'on appelle chaleur chez les Athéniens ordinaires, devient chez Platon un nombre de tétraèdres, et le réchauffement est l'augmentation de ce nombre.

¹⁸ Ibid. 32b

¹⁹ Timée parle de ces nombres, qu'il appelle $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\epsilon\iota\zeta$, toujours à la façon de Pythagore, c'est-à-dire géométriquement.

$$(\text{feu}) = 4 \Delta$$

$$(\text{air}) = 8 \Delta = 2 \times 4\Delta = 2 (\text{feu})$$

$$(\text{eau}) = 20 \Delta = 4 \Delta + 2 \times 8 \Delta = (\text{feu}) + 2 (\text{air})$$

Table I. Possibilités de transmutation d'un élément en un autre (n D désigne un ensemble de n triangles)

Avec la Terre, aucune recombinaison n'est possible, car sa décomposition ne donne que les triangles rectangles isocèles qui ne peuvent se recombinaison qu'en cube.

Un autre genre de processus auxquels peuvent participer feu, air et eau est la transformation d'une « apparence » en une autre chez des éléments d'un même type. Ces apparences variées sont possibles car les triangles se distinguent selon leurs surfaces et ces différences sont quantifiées. Par exemple la flamme, la lumière et la chaleur sont différentes apparences du Feu²⁰, les nuages et le brouillard sont des apparences de l'Air²¹. L'Eau quant à elle a deux apparences : le fluide et le solide. La première apparence est l'état liquide, car il est composé de microparticules de tailles différentes relativement faciles à déplacer et incapables de former un système compact. La seconde apparence est l'ensemble des solides, qui peuvent fondre sous l'influence du Feu²². Ils sont composés de particules de même taille²³ pouvant former un système homogène. Ce sont principalement des métaux : or, argent, cuivre, étain ... etc.

Les particules de la Terre ne peuvent pas participer à ce processus de recombinaison, mais elles ont des tailles différentes et donc la Terre a, elle aussi, une variété d'apparences: la pierre, l'argile, le sel, le verre²⁴.

Comme le quanta de surface est différent pour les différentes apparences d'un même élément, seule est permise la transformation mutuelle entre les polyèdres dont les triangles ont le même quanta de surface. Les chaînes de transformation sont séparées par des niveaux qui dépendent de ce quanta de surface. Mais grâce à quantification de la surface – les plus grands pouvant être multiples de plus petits – il est possible que plusieurs petites surfaces en produisent une grande, et inversement.

²⁰ Ibid. 57 c

²¹ *ibid* 57 d

²² *ibid* 57 e

²³ *ibid* 58 e, 59 a

²⁴ *ibid* 60 b – 60 c

Naturellement, le physicien d'aujourd'hui considère la cosmologie de Platon avec un certain sourire, se demandant pourquoi diable n'a-t-il pas, en passant, prouvé que *l'entropie d'un état est proportionnelle au logarithme de sa probabilité*²⁵. Ce serait oublier que chaque mot contenu dans cette dernière formule contient en soi un mythe, c'est-à-dire tout un ensemble de modèles élaborés pendant des siècles. C'est oublier aussi que le modèle de Platon est resté valable et respecté durant plus de deux mille ans, puisqu'on retrouve les polyèdres de Platon chez Kepler qui déclare :

« La Terre est la mesure de toutes les autres sphères [entendre par « sphère » d'une planète la sphère qui a pour grand cercle l'orbite, supposée circulaire, de cette planète]. Inscrivez la sphère de la Terre dans un dodécaèdre, la sphère exinscrite est alors celle de Mars. De même si vous inscrivez la sphère de Mars dans un tétraèdre, la sphère exinscrite sera celle de Jupiter. Inscrivant cette dernière dans un cube, vous obtiendrez de même la sphère de Saturne. Inscrivez maintenant, dans la sphère de la Terre, un icosaèdre. La sphère qui y est inscrite sera celle de Venus, et un octaèdre inscrit dans la sphère de Venus sera exinscrit à la sphère de Mercure. » [7] ou même encore aujourd'hui dans les théories quantiques de la gravitation [8].

Les physiciens d'aujourd'hui se demandent aussi : à quoi bon adopter la forme mythique, pour trouver derrière le mythe une cosmologie rationnelle ? Pourquoi travestir la rationalité en mythe ? Aristote, à cet égard, abandonne son maître Platon en considérant qu'il est en effet « inutile » d'écrire de cette manière. Pourtant, il faut admettre que la rationalisation pure d'Aristote (et celles de tant d'autres) est restée étrangère à tout un côté de la Pensée humaine. Si nous n'avions pas un tel dialogue accompagné de tous ses mythes, notre patrimoine en serait singulièrement appauvri, même si la philosophie de Platon y était conservée sous une autre forme. Aujourd'hui encore, il nous arrive d'utiliser de telles représentations mythiques de modèles cosmologiques, pour leur donner une interprétation qui soit à la fois claire et pittoresque. Il est bien évident que des ascenseurs qui en général fonctionnent mais parfois tombent librement, ou les passagers d'un train regardant comme une attraction deux coups de foudre tombant simultanément sur deux montagnes, ou encore deux jumeaux, dont l'un vit et vieillit normalement alors que l'autre se comporte comme Dorian Gray, sont de purs spectacles qu'aucun physicien sérieux ne saurait considérer comme l'essence même, le dogme fondamental, de la théorie de la relativité d'Einstein. Néanmoins de tels spectacles, bien qu'apparemment inutiles, étouffent singulièrement la pensée.

²⁵ Boltzman [6]

Toute la démarche de Platon, située entre mathématiques et description des phénomènes naturels, se trouve admirablement résumée par W. Heisenberg [9] :

« ... J'ai toujours été frappé de la façon qu'a la plus petite particule de matière d'acquiescer, pour finir, une forme mathématique. De même la compréhension de l'enchevêtrement quasi inextricable des phénomènes naturels passe par la découverte des formes mathématiques qu'ils recèlent. C'est ainsi que, lorsque la science moderne parle de formes atomiques, le mot « forme » doit être entendu dans son sens le plus général, désignant un ensemble de structures dans l'espace et le temps, incluant les symétries et la possibilité de liaison. En fait ces structures ne sont ni immédiatement claires, ni même dénuées d'ambiguïté à l'égard du monde objectif des choses. Elles n'en restent pas moins parfaitement définies et descriptibles du point de vue des mathématiques. »

GEOMETRIE QUANTIQUE EN EUROPE OCCIDENTALE

Introduction

Dans le polythéisme, les dieux, ou encore les formes, les essences, entrent en relation par le biais de l'existence. En d'autres termes, l'essence produit sa propre existence (c'est l'entéléchie). L'essence même de la causalité est que chaque chose a sa cause en elle-même. Démiurge est l'artiste qui arrange des formes qui existent déjà, de même que le Premier Promoteur d'Aristote met en mouvement des objets qui existent déjà. Ni l'un ni l'autre ne produisent : ils ajoutent l'ordre et la dynamique à ce qui existe nécessairement et indépendamment d'eux.

Dans le monothéisme cette relation s'établit d'une tout autre manière. Dieu est le Créateur. Il produit, il organise, il met en mouvement. Ce qui est créé est différent de Dieu, et donc en dehors de Dieu. La conséquence n'est plus contenue dans la cause, elle est son produit. Cette nouvelle relation de la cause à l'effet - le principe de causalité - doit donc être reprise, analysée et développée. Cela amène à créer un nouveau modèle du Monde. Cette démarche s'est développée, à partir d'une origine Juive commune, dans deux directions, islamique et chrétienne. Les approches dans ces deux cosmologies sont très proches et les deux ont adopté, dès le début, l'affirmation classique du monothéisme, à savoir la séparation de l'existence et de l'essence. Dans ce texte, orienté vers la pensée de l'Europe occidentale, on ne considèrera que la démarche venue de la chrétienté.

Genèse

Le postulat de la séparation de l'existence et de l'essence apparaît déjà chez Guillaume d' Auvergne (ou Guillaume de Paris), évêque de Paris de 1228 jusqu'à sa mort en 1249. On pense qu'il a emprunté ce postulat à Avicenne (980-1037), mais lui même le prend comme la clé expliquant la finitude et la dépendance des choses créées, en concluant que l'identité de l'existence et de l'essence ne se réalise qu'en Dieu. Les choses n'existent pas parce qu'elles doivent exister car leur existence est acquise. La relation entre Dieu et les objets, le monde, est le rapport du Créateur au créé, et l'idée Antique de l'émanation est rejetée.

« Dieu est absolument simple. Les choses n'existent pas avant que Dieu ne décide de ce qu'elles seront, quand elles se répandront hors de Lui, ainsi que l'eau jaillit de la source ». [10]

Mais si Créateur et créé sont distincts, le problème de la création se pose immédiatement. Le monde peut-il être éternel à la façon d'Aristote ? Non, car s'il est éternel il n'est pas devenu et donc il n'a pas été créé. Selon Guillaume, la conception selon laquelle, si Dieu avait précédé la création du monde, alors une durée infinie (une éternité vide) aurait dû précéder cette création, doit être rejetée, car il y a là confusion entre temps et éternité. Une telle conclusion n'aurait de sens que si l'éternité était la même chose que le temps. Et s'il n'était pas l'éternité, Dieu serait dans le temps. Guillaume donne divers arguments²⁶ en faveur d'une création du monde dans le temps. Certains d'entre eux ont été utilisés plus tard par Bonaventure et Saint Thomas d'Aquin. Le monde a été créé dans le temps et le premier moment du temps est définissable.

Guillaume ne s'est pas contenté de réfuter le concept néoplatonicien d'émanation et le concept aristotélicien d'éternité du monde, il a aussi soigneusement laminé les arguments d'anciens auteurs en donnant, à toute occasion, des preuves systématiques en faveur de sa thèse. Cette thèse, avec des arguments modifiés ou des preuves ajoutées, restera le cadre dans lequel la pensée occidentale va se développer, avec une toute nouvelle relation entre la cause et l'effet, qui a comme base le concept de création dans le temps. Ce postulat ontologique, adopté à l'unanimité, impose la nécessité d'élaborer un modèle entièrement nouveau du monde, de construire une structure logique

²⁶ En supposant que la rotation de Saturne par rapport a celle du Soleil soit dans le rapport de 1 à 30, le Soleil devrait faire 30 fois plus de rotations que Saturne. Si le monde existait de toute éternité, Saturne et le Soleil auraient fait un nombre infini de rotations. Mais comment un infini pourrait-il être trente fois plus grand qu'un autre ? [10]

qui va montrer que le monde phénoménal qui nous entoure, plein de changements et d'événements, évolue logiquement dans le temps depuis le moment de sa création. Au Moyen Age, d'après discussions, allant parfois jusqu'à la dispute, sur la relation entre la substance et ses attributs, ont mis en évidence en quoi ce monde nouveau diffère du Cosmos grec. Les choses ne sont plus « remplies de dieux », c'est à dire qu'elles ne sont pas à l'origine de leurs propres attributs. Ces attributs viennent de l'extérieur. De l'idée que l'existence est une chose, et l'essence une autre, il s'en suit naturellement que les changements dans ce qui nous entoure sont des changements dans l'intensité des attributs et ne résultent ni de l'apparition ou de la disparition de la substance. Ces changements peuvent être dus à une force, ou à une interaction entre objets. La tâche restante était alors de découvrir l'essence de ces changements, c'est à dire les lois du comportement et les principes sur lesquels elles sont fondées. Dans le même temps, il devenait nécessaire d'inventer le « langage » par lequel ce Monde nouveau pouvait être décrit.

Nombres (Αριθμοί)

Libérer la géométrie de la perception sensorielle et l'algèbre du concept de taille, les deux combinés en une « théorie des fonctions » puissante dans laquelle les méthodes conventionnelles de construction et de calcul perdent toute signification, a provoqué un total renouveau non seulement de la pensée mathématique, mais aussi de la cosmologie. Ainsi, le nombre de l'Antiquité se transforme-il en variable. Dans la Géométrie Analytique de Descartes, les formes géométriques spécifiques ont perdu leur valeur. Elles sont remplacées par des relations abstraites, représentées dans un espace imaginaire, qui, le plus souvent, ne s'appliquent pas aux faits de la perception sensorielle. Combinant algèbre et géométrie, Descartes a forgé un langage mathématique entièrement neuf pour décrire le Monde. Plus de formes géométriques stables (triangles, polyèdres, etc.), mais un système de points, de positions qui ne sont qu'occasionnellement occupées pour former une figure géométrique. Les formes Grecques créées par le Nous (Ανάγκη, la Nécessité) n'apparaissent que dans les cas particuliers où les points matériels dans leur mouvement prennent des positions telles que leur arrangement correspond à, ou rappelle, une forme de l'Ancienne Grèce. Les polyèdres éternels sont devenus l'une des situations possibles dans le déploiement illimité des systèmes de points, dans leur mouvement initié depuis le début de la création du Monde. Les « points matériels » sont éternels, et la mutabilité du monde autour de nous provient de leurs différents mouvements et des positions relatives qu'ils occupent. Si le monde est logiquement disposé, alors il faut concevoir des lois de mouvement et non plus d'existence. Déjà Descartes pose ses deux

premières lois du mouvement qui vont déterminer, dans l'avenir, le développement de la mécanique classique : la loi d'inertie et la loi de conservation de quantité de mouvement. Une génération plus tard, tout l'appareil d'analyse du mouvement a été développé (Fermat, Leibniz, Newton)²⁷, et les principes de base qui mèneront au formalisme final²⁸ (Lagrange, Hamilton) ont été posés.

Encore une fois, et comme dans la Grèce antique²⁹, se pose dès le début le problème de l'« espace », à savoir, où le mouvement se produit-il ? Où, en quel lieu, les formes fonctionnelles géométriques se réalisent-elles ?

Le modèle de Newton, dans lequel apparaissent la force et l'action à distance, demande l'introduction de l'entité « espace », espace dans lequel se produit le changement³⁰. Newton tente de dynamiser la géométrie en inventant le calcul des fluxions. Pour le modèle de l'action à distance, la géométrie est nécessaire, mais en même temps, la géométrie grecque n'y suffit pas, car on ne peut y décrire les changements d'état des objets (les planètes, les marées, etc.). Newton, par conséquent, prenant en compte la nouvelle loi de causalité de Galilée, a tenté d'adapter la géométrie classique aux nouvelles exigences, en introduisant la vitesse via les éléments géométriques cartésiens (points, droite, surface). De cette façon, les objets géométriques ne sont plus statiques, mais se changent les uns dans les autres, c'est-à-dire qu'ils changent grâce à leur propre mouvement³¹.

Dans le modèle de Leibniz, où le changement d'état est interne et provoqué non par la force, mais par l'interaction mécanique, « l'espace » n'est pas vide, il est compris comme un système de relations simultanées. Le succès du calcul infinitésimal de Leibniz réside dans le fait qu'il a pris de Descartes la fonction avec ses propriétés temporelles sans nul besoin d'introduire, comme chez Newton, le mouvement des éléments géométriques de base. Leibniz a compris le mouvement comme un changement interne de l'état de la fonction (ou de n'importe quoi qui se comporte en conformité avec une fonction). Cette installation du mouvement dans la fonction conduit presque immédiatement à la question des valeurs limites, c'est à dire au vieux problème de Zénon, de l'infini présenté d'une manière nouvelle : Comment un changement de l'intensité d'une qualité (par exemple la distance entre les

²⁷ C'est Leibniz qui a introduit le terme de *fonction*

²⁸ Ou encore la Cosmologie

²⁹ Parménide, Zénon, Platon, Aristote...

³⁰ Il faut remarquer que chez Platon l'espace est principe ; chez Newton l'espace est réalité.

³¹ Analogie : l'image (la surface) de la télévision est produite par le mouvement d'un point (le spot électronique).

foyers d'une ellipse) peut-il conduire à un changement de qualité, c'est à dire la production d'un être nouveau (le passage de l'ellipse au cercle) ?

La Géométrie Analytique s'est rapidement déplacée vers l'analyse, qui était censée répondre à la question suivante : comment la valeur (l'état) d'une fonction se change-t-elle alors que la valeur de la variable (l'état) change ? Déjà les termes mêmes utilisés relèvent clairement de la dynamique: la fonction croît, décroît, tend vers zéro, tend vers une asymptote, passe par un maximum ou un minimum, etc. Ainsi, la base de la langue mathématique utilisée pour décrire le comportement dynamique du Monde se trouve-t-elle posée. Le monde de la fonction est né et le nombre n'est plus « grandeur » mais « valeur ». De ce point de vue, le nombre 2 figurant dans le théorème de Pythagore est un nombre comme un autre et rien n'empêche d'écrire ce théorème, dans une nouvelle notation, $a^n + b^n = c^n$. De cette manière, le théorème de Pythagore devient une équation et il nous faut examiner ses propriétés. Les Grecs n'ont pas fait de telles recherches. Pour eux les nombres tels que x^n avec $n > 3$ n'ont pas de sens parce qu'ils ne représentent rien. Ces quelques mots latins écrits par Fermat précisément en marge de l'arithmétique de Diophante : "Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet"³² font ressentir toute la différence existant entre la pensée grecque et la nouvelle mathématique. Les exposants deviennent variables, et du point de vue de la Pensée Occidentale, le théorème de Pythagore est un cas particulier parce que les nombres ne sont pas des qualités (surface, volume ...), mais représentent des quantités (intensité, valeurs), une variété de qualités qui sont variables elles aussi.

Maintenant, toute équation a le droit d'être, même l'équation $x^2 + 1 = 0$. Le nombre est devenu libre et donc la valeur i est tout à fait possible, du moins n'est-elle pas interdite³³. Toutefois, l'autonomie des nombres ne signifie pas que la mathématique soit une discipline purement mentale et arbitraire. Comme la géométrie grecque, la mathématique est restée profondément liée à l'ontologie du nouveau Monde, un Monde où tout changement est considéré comme un changement successif de l'intensité d'une ou plusieurs qualités, c'est à dire comme un mouvement. L'universalité du monde et sa perfection ne sont plus signalées par sa structure logique et statique, mais par l'équilibre dynamique. La base et le but de la recherche (Descartes, Leibniz, Newton,

³² Fermat: " J'ai trouvé une preuve vraiment étonnant de ce théorème, mais elle ne tient pas dans la marge de ma page"

³³ Si l'axiome de base est "Cogito, ergo sum" alors le Monde doit être "Imagination", mais cette Imagination doit être logiquement agencée, en totalité et dans tous ses détails.

Euler, Lagrange, Hamilton, Hilbert, etc.) est le mouvement et ses lois, et les lois de conservation qui l'accompagnent.

Tout mouvement se ramène aux deux catégories simples que sont le mouvement linéaire et le mouvement circulaire. Ces mouvements « purs » sont décrits par les fonctions différentes, parce que les variables figurant dans ces fonctions sont différentes elles aussi. Dans le mouvement linéaire la variable est la distance (longueur) et, dans le mouvement circulaire, c'est l'angle. Mais les mouvements naturels sont souvent plus complexes, avec des contributions variées de l'un ou l'autre de ces mouvements purs. Dès lors n'est pas surprenant l'enthousiasme profond suscité par la découverte d'Euler : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ³⁴. Encore aujourd'hui, l'importance de cette formule se révèle clairement dans les paroles de Feynman [11] qui, plus de deux siècles plus tard, appelle cette formule d'Euler « notre joyau », jugeant qu'elle est « la plus importante découverte dans les mathématiques ».

Deutéronome

Deux mondes à unifier. Les ondes

Au début du XXe siècle, les physiciens se sont trouvés dans une situation très particulière : un même monde décrit de deux façons. La différence était grande, car chaque modèle avait son propre postulat ontologique. D'une part "l'Etre" de la mécanique classique, perfectionnée dans le formalisme de Lagrange et Hamilton, était l'inertie (la masse). D'autre part, le monde de l'électromagnétisme, porté à sa perfection par Maxwell, avait comme « Etre », la charge électrique. En outre, les principes généraux du comportement des objets étaient déjà établis (Fermat et le temps minimal ; le principe de moindre action ; Descartes avec le principe d'inertie et la conservation de la quantité de mouvement ; le principe de conservation de l'énergie, etc.). Ces principes se devaient d'être indépendants des modèles qui les utilisent. L'indispensable tâche était donc d'unifier les modèles « en tenant d'une main les principes en vertu desquels seuls des phénomènes concordants ont valeur de lois, et de l'autre main l'expérimentation conçue à partir de ces mêmes principes » [13]. Deux images différentes du monde se sont ainsi parallèlement développées :

La théorie de la relativité restreinte, qui retient le point de vue de la mécanique classique, c'est-à-dire qu'elle traite de la dynamique générale des objets, en ignorant leurs caractéristiques individuelles. En d'autres termes,

³⁴ Euler (1748) [12]

l'on y considère une image dynamique d'un monde sans interaction. Toutefois, contrairement à la mécanique classique, le postulat ontologique est modifié. L'« Etre », en théorie de la relativité, est la charge et non plus l'inertie. En effet la charge est conservée alors que l'inertie (la masse) devient une grandeur variable qui dépend de la vitesse.

La mécanique quantique, complètement immergée dans l'interaction car elle explore non seulement la structure du substrat de tout ce qui est susceptible d'interagir, mais aussi les conditions dans lesquelles une interaction donnée peut se réaliser. Comme l'interaction dépend des propriétés locales des individus, la mécanique quantique a conservé toutes les entités générales caractéristiques à la fois de la mécanique et de l'électromagnétisme: la masse³⁵, la charge, le champ, l'onde, etc.

La situation était alors semblable à celle dans laquelle Platon était apparu comme le « fédérateur » des acquis précédents, venus de l'Ecole ionienne, de Pythagore, de l'Ecole d'Elée, d'Anaxagore, ou encore à celle qui a précédé la mécanique de Newton, Euler, Lagrange et de Hamilton. On disposait d'un certain nombre de faits expérimentaux, comme le mouvement des planètes, le mécanisme des horloges, le mouvement d'un corps sur le plan incliné, etc. On tentait bien d'expliquer tel ou tel phénomène particulier, mais il n'existait aucune théorie unique englobant l'ensemble de ces phénomènes. Pour décrire les processus intervenant dans les atomes et les molécules, il s'agissait de trouver une représentation fondamentale des particules du microcosme et de leurs interactions, en particulier lorsque leur vitesse est beaucoup plus faible que celle de la lumière et qu'elles se déplacent dans un champ de forces (potentiel extérieur). Mais qu'est-ce qui relie l'optique, la mécanique et l'électromagnétisme ? Qu'est-ce qui peut unir la masse, la charge et le photon ? Qu'est-ce qui unit leurs interactions et permet de les voir, les entendre, ou les sentir ? C'est dans le domaine des ondes qu'il faut chercher le secret de cette unification. Pour anciens qu'ils soient, les phénomènes ondulatoires ont été longtemps été ignorés. Léonard de Vinci (1452 – 1519) paraît être le premier à s'y être curieusement intéressé [14]:

« Sur la surface large et lisse de l'eau, *jette* en même temps deux pierres à distance l'une de l'autre. Tu vas voir que, près de l'endroit où les pierres sont tombées, se forment deux groupes d'ondes circulaires. En se dilatant ils se rencontrent et puis chaque groupe de cercles passe au travers de l'autre. »

Il semble bien que Léonard soit le premier homme qui ait noté que deux « choses » peuvent se trouver au même endroit au même moment. Pour les

³⁵ Du moins s'il s'agit de mécanique quantique non relativiste

Grecs, chaque objet à sa propre place et donc, logiquement, aucun objet ne saurait se trouver dans la place d'un autre. Cet interdit a survécu, tant avant qu'après Léonard, surtout à la suite de Descartes et de son postulat d'impenétrabilité de la matière. Cependant, la description donnée par Léonard, n'importe qui pouvait la faire, mais un observateur ordinaire était en fait incapable de voir vraiment ce phénomène, aveuglé qu'il était par sa conception de la matière. Mais Léonard nous montre qu'il y a quelque chose (quelle que soit cette chose, un objet ou une forme) pour laquelle ce postulat d'impenétrabilité n'est pas valable. Or l'onde est bel et bien « quelque chose » et non « rien ». Elle a ses propres attributs (longueur d'onde, fréquence, période, vitesse, etc.), attributs qui la distinguent des objets ordinaires comme des autres ondes. La principale caractéristique qui distingue les ondes de tout autre chose est justement cette possibilité qu'elles ont de se trouver au même endroit au même moment et cela sans que leurs propres caractéristiques en soient modifiées. En d'autres termes, au sein du milieu linéaire implicitement admis ici, les ondes n'interagissent pas entre elles. En fait, il serait probablement approprié de conclure que l'interférence est une résultante « formant substance » créée par deux ondes qui n'interagissent pas l'une avec l'autre. Jusque là, le substrat sur lequel les ondes se réalisent est l'inertie (la masse). Par ailleurs, si nous revenons à la description de Léonard, nous voyons que le changement ondulatoire, initié par un « promoteur » (la pierre jetée à l'eau), s'étend ensuite à une vitesse linéaire constante, sans déplacement réel de matière, ni besoin d'autre promoteur.

Il convient, pour la suite de notre propos, de faire une distinction entre les ondes ordinaires, qui se propagent, et les ondes stationnaires. Ces dernières, superpositions de deux ondes progressives de même amplitude se propageant en sens contraires, ont des propriétés très particulières qui vont s'avérer très importantes. Jusque là en effet les fonctions telles qu'on les a définies en toute généralité et utilisées, par exemple, dans la mécanique classique, n'ont rien à voir avec le monde quantique. C'est par le biais des ondes stationnaires qu'une quantification va apparaître. Par définition, une onde stationnaire ne se propage pas : elle apparaît sous la forme d'un produit de deux fonctions, l'une, réelle, ne dépendant que d'une coordonnée d'espace, l'autre étant une fonction de fréquence donnée du seul temps. Une simple source ne saurait la produire, il y faut un ou deux miroirs de renvoi, deux « murs » au sens large (i.e. pas nécessairement verticaux). Dans une configuration donnée de ces murs, seules les ondes stationnaires restent stables, mais elles n'existent qu'à la condition que les murs soient distants d'un nombre entier de fois la demi-longueur d'onde. C'est là une condition de quantification qui engendre un

ensemble d'ondes stationnaires, dont le spectre en longueur d'onde est bien défini.

Fonctions d'onde et équations d'onde

Analysant toute une variété de phénomènes, (toujours comme l'écrit Kant [13] « tenant d'une main les principes en vertu desquels, etc. ») et complétant mutuellement leurs observations, les physiciens en sont venus à cette idée que la base de tout doit être une « forme géométrique fonctionnelle », en bref une fonction d'onde. Ils ont montré que toute entité, qu'elle soit électromagnétique ou propre aux particules matérielles, pouvait être représentée par une fonction d'onde spécifique. Le véritable point de départ de cette nouvelle géométrie quantique est l'hypothèse de Louis de Broglie (1924) [15] sur la dualité de la matière et les ondes. L. de Broglie pose une question apparemment simple, à laquelle il répond par l'affirmative : le dualisme des effets caractérise-t-il non seulement le rayonnement électromagnétique, mais aussi bien toutes les particules matérielles ? Les lois fondamentales de l'optique et de la mécanique ont la même forme mathématique. Le mouvement classique de particules dans un potentiel $V(x, y, z)$ est décrit par des équations de la même forme que celles qui décrivent la propagation de la lumière dans milieu inhomogène d'indice $n(x, y, z)$. Mais l'optique géométrique ne peut pas expliquer toutes les propriétés de la lumière, par exemple l'interférence et la diffraction. Cela nécessite l'optique ondulatoire. De même la mécanique classique ne peut pas expliquer toutes les propriétés de l'électron, par exemple les états quantiques existant dans les atomes ou la diffraction par un cristal. Si l'on veut des lois de comportement analogues pour la lumière et les particules matérielles, alors les participants devraient être de même « nature ». Il était donc nécessaire de prolonger la mécanique par la mécanique ondulatoire.

Si on considère une particule de masse m et vitesse v (ou d'énergie E) et qu'on lui confère avec de Broglie une nature définitivement ondulatoire, pour passer d'une image à l'autre, il faut suivre les mêmes règles que pour le rayonnement électromagnétique. Alors que les propriétés corpusculaires sont une énergie E et une impulsion \mathbf{p} (en général dans le domaine relativiste), la nature ondulatoire se caractérise quant à elle par une fréquence temporelle ν et un vecteur d'onde \mathbf{k} , ou une longueur d'onde λ dans une certaine direction. Les deux images correspondent à un même objet, et, inspirées de Planck et de Broglie, les relations entre grandeurs caractéristiques sont les suivantes :

$$E = h\nu \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad (1)$$

A ce stade la seule existence de l'onde est postulée. Il reste à préciser, pour connaître la forme ondulatoire du mouvement, sa forme exacte et l'équation d'onde à laquelle elle obéit. C'est ainsi qu'à une particule libre de masse m et de vitesse \mathbf{v} bien définies ($\mathbf{p} = m \mathbf{v}$) doit correspondre l'onde plane:

$$\Psi(\mathbf{r}, t, \mathbf{p}) = A \exp[2\pi i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - Et) / h] \quad (2)$$

On peut voir déjà que Ψ se comporte, dans ce cas particulier où E et \mathbf{k} sont bien définis, comme une fonction propre de l'opérateur $i \hbar \partial_t$ avec pour valeur propre l'énergie E , et aussi une fonction propre des opérateurs $i \hbar \partial_\alpha$ ($\alpha = x, y, z$), avec les valeurs propres k_α . Cette traduction en termes d'opérateurs de l'énergie et du vecteur d'onde, permet un passage formel direct de la relation relativiste énergie-impulsion $E^2 = c^2 p^2 + c^4 m_0^2$ à une équation d'onde, qui est celle de Klein -Gordon :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Delta \Psi = - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi \quad (3)$$

Cette équation admet pour solutions toutes les ondes planes de la forme (2), pour toutes les valeurs de E et \mathbf{p} , ainsi que les ondes engendrées par superposition linéaire d'ondes planes. Elle a toutefois un grave inconvénient : celui de rendre imprédictible l'évolution temporelle de Ψ puisque c'est en effet une équation différentielle du second ordre par rapport au temps. Il faudra attendre Dirac (en 1928) pour que ce problème soit résolu, par le remplacement d'une simple fonction d'onde scalaire par une entité à plusieurs composantes. Remarquons aussi que l'équation de Klein -Gordon est réelle et admet des solutions réelles (comme le ferait, par exemple, une équation d'onde acoustique), alors que la dépendance temporelle pour E donné ne saurait être autre que $\exp(-i E t / \hbar)$.

C'est à E. Schrödinger que l'on doit (en 1925) la forme qui nous est aujourd'hui familière d'une équation d'onde non relativiste, contenant d'ailleurs un

potentiel extérieur coulombien ($V = -e^2/r$), puisque le but affiché était de retrouver les états liés (stationnaires) de l'atome d'hydrogène. Partant de la relation énergie - impulsion non relativiste $E = \mathbf{p}^2 / (2m) + V$, on obtient naturellement une équation différentielle du premier ordre par rapport au temps. Un point particulièrement intéressant de notre point de vue « morphologique », est que, dans son article de 1926 [16], E. Schrödinger renoue avec la grande tradition des principes d'extremum initiée par Fermat puis Maupertuis. Partant de l'équation (classique) de Hamilton - Jacobi : $H(q, \partial_q S) = E$ (ou S est l'action et q une coordonnée spatiale), il introduit d'abord sa propre définition de l'action sous la forme : $S = \hbar \text{Log } \Psi$ ou l'emploi du Log est justifié par le fait que, avec des coordonnées indépendantes, Ψ est un produit de fonctions indépendantes. Le principe de moindre action se traduit alors par :

$$\delta \iiint d^3r \left[(\partial_x \Psi)^2 + (\partial_y \Psi)^2 + (\partial_z \Psi)^2 - \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \Psi^2 \right] = 0 \quad (4)$$

problème variationnel dont l'équation d'Euler est l'équation que nous connaissons sous le nom d'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi = E \Psi \quad (5)$$

Les résultats obtenus à partir de cette dernière équation, complétée par sa version « dépendante du temps » :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi = i\hbar \partial_t \Psi \quad (5')$$

ne se comptent plus. Elle a néanmoins un inconvénient, qui tient d'ailleurs à son domaine d'applicabilité non relativiste : celui de ne fournir, même pour une particule libre, qu'une définition ambiguë de la vitesse de phase v_ϕ . Celle-ci en effet s'obtient immédiatement, en l'absence de potentiel, à partir de la phase figurant dans l'expression (2). Pour une propagation libre le long de x , il vient $v_\phi = E / (\hbar k)$. Elle dépend de l'origine choisie pour l'énergie et elle est, de ce fait, dépendante de jauge, perdant ainsi toute signification

physique directe. Si l'on se limite à l'expression habituelle de l'énergie cinétique, alors $v_\varphi = \hbar k / (2m)$. On peut aussi, de façon plus réaliste, prendre l'origine « relativiste » des énergies : $E \approx m_0 c^2 + \hbar^2 k^2 / (2m_0)$. On en tire $v_\varphi \approx m_0 c^2 / (\hbar k) + \hbar k / (2m_0) \approx c^2 / v_g(k)$, résultat déjà établi par L. de Broglie. A contrario la définition de la vitesse de groupe v_g d'un paquet d'onde ne souffre d'aucune ambiguïté puisque $v_g = \hbar^{-1} [\partial_k E]_{k_0} = \hbar k_0 / m$ (k_0 étant la valeur centrale de la distribution des k).

Particules indiscernables, seconde quantification, opérateurs de champ

L'introduction du spin, à quoi conduit, pour l'électron, l'équation de Dirac et pour d'autres particules les travaux de Majorana et al., amène naturellement au problème de l'indiscernabilité des particules ou, de façon équivalente, à celui de la symétrie imposée à la fonction d'onde d'un ensemble de particules identiques, selon que leur spin est entier (bosons) ou demi-entier (fermions). C'est ainsi que la mécanique quantique va évoluer vers la «seconde» quantification, avec ses opérateurs de création et annihilation et ses opérateurs de champ. Cette artillerie considérable va s'appliquer à une telle variété de problèmes qu'il est impossible de les détailler ici.

Aussi bien la question importante pour notre propos est-elle la création même de cette géométrie quantique, forme nouvelle qui résout, du moins pour un temps, la situation paradoxale ou s'était fourvoyée la physique du début du siècle. Dans ce contexte, L. de Broglie aurait pu faire sienne cette formule d'Aristote

La Nature doit être comprise de deux manières, comme forme et comme matière. [17]

formule qui enjambe les siècles et établit, en rejoignant celle de W. Heisenberg [9], le lien morphologique toujours présent au sein des sciences de la nature:

La description contemporaine de la Nature est, à la lettre et dans une mesure plus large encore que par le passé, celle des formes.

RÉFÉRENCES

- [1] Platon, *Timée*, Traduction : Luc Brisson, Flammarion, Paris, (1992)
- [2] Aristote, *Métaphysique* : Anaxagore ; I, 1, traduction J. Tricot, ed. Vrin, Flammarion, Paris (1991)
- [3] *Ibid*, 986a
- [4] V. Bocvarski, J. Baudon et J. Reinhardt; Morphologie De La Physique : Le Continu et Le Discret; Annales de la Fondation Louis de Broglie; **35**, p. 105 – 140 (2010)
- [5] E. Kant, *Critique de la Raison Pure*, « Analogies de l'expérience »; Flammarion, Paris, (1989), p 224-225
- [6] L. Boltzmann, Vorlesung über Gastheorie II. Ed. J. A. Barth, Leipzig, Germany (1989)
- [7] Kepler, *Harmonices Mundi*, (1619)
- [8] C. Rovelli, Class. Quantum Grav ; **28**, 153002 (2011).
- [9] W. Heisenberg, *Physics and Philosophy: The Revolution in Modern Science*, Harper Perennial Modern Classics, (2007)
- [10] F. Koplston, *Philosophie du Moyen-âge*; p 225 (Guillaume d'Auvergne: De Universo), BIGZ, (1989)
- [11] The Feynman Lectures on Physics, vol. I. Addison-Wesley, p. 22 (1964)
- [12] L. Euler: *Introductio in analysi infinitorum*, (1748), C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, pp. 439–445 (1968)
- [13] E. Kant, *Critique de la Raison Pure*, p. 257; Flammarion Paris (1997)
- [14] Leonardo da Vinci, *Notebooks*, translated by R.C. Bell and E.J. Poynter, Ed. Jean-Paul Richter (2004)
- [15] L. de Broglie, *Remarques sur la nouvelle mécanique ondulatoire*, C. R. Acad. Sci., **183**, 272-274 (1926)
- [16] E. Schrödinger, Annalen der Physik, **79**, 1 (1926)
- [17] Aristote, *Physique*. B. 194a, traduction P. Pellerin, Ed. Garnier, Flammarion, Paris (2000)

(Manuscrit reçu le 13 novembre 2012)