

## Sur les programmes d'Albert Einstein et de Louis de Broglie. Une contribution

CLAUDE ELBAZ

5 Allée des sophoras 92330 Sceaux  
claudeelbaz@hotmail.com

RESUME. Conformément aux programmes d'Einstein-de Broglie, les champs stationnaires  $\varepsilon(x,t)=u(x)\psi(t)$ , solutions du d'Alembertien  $\square\varepsilon=0$ , permettent d'apporter quelques éléments de réponses aux problèmes sur la dualité onde-particule quantique, soulevés par la théorie de la double solution, et par la relativité générale, sur la relation entre la gravitation et l'électromagnétisme. Les champs stationnaires, dont les propriétés cinématiques et dynamiques sont formellement identiques à celles de la matière, constituent un cadre commun pour les équations de la mécanique relativiste et quantique, en déterminant leurs structures de base. Dans l'approximation de l'optique géométrique, où les fréquences infiniment grandes sont occultées, et où seuls les effets moyens se manifestent, la fonction d'amplitude  $u(x)$  est réduite à une distribution  $\delta(x)$ . Un champ stationnaire, de fréquence constante, se comporte comme une particule relativiste isolée, de vitesse  $v < c$ . Comme il est nécessairement limité dans l'espace et le temps, il ne représente que la limite d'un champ presque stationnaire, de fréquence légèrement variable,  $\Omega(x,t)=\omega\pm\delta\Omega(x,t)$ , avec  $\omega$  constant et  $\delta\Omega(x,t)\ll\omega$ . Les variations de fréquence conduisent aux relations homogènes de Fourier, et à des interactions qui sont formellement identiques aux interactions électromagnétiques, ainsi qu'aux lois de moindre action, et de conservation de l'énergie-impulsion. La variation de la vitesse de propagation du champ  $C(x,t)=c\pm\delta C(x,t)$ , avec  $c$  constant, et  $\delta C(x,t)\ll c$ , induit des interactions qui sont formellement identiques à la gravitation.

Dans l'approximation de l'optique ondulatoire, la fonction  $\psi(t)$ , est formellement identique à l'équation de Klein-Gordon de la mécanique quantique. Elle conduit à la transposition des propriétés ondulatoires du champ, aux propriétés corpusculaires de la matière.

*ABSTRACT. Following the programs of Einstein and Louis de Broglie, standing fields  $\varepsilon(x,t)=u(x)\psi(t)$ , solutions of d'Alembertian  $\square\varepsilon=0$ , bring some answers to the problems raised by the double-solution theory upon wave-particle duality, and by general relativity upon relation between gravitation and electromagnetism. From the formal identity between kinematic and dynamic properties standing fields with mechanic properties of matter, they form a common frame for equations of relativity and quantum mechanics. In geometrical optics approximation, where infinitely great frequencies are hidden, the space-like amplitude function  $u(x)$  reduces to a distribution point-like  $\delta(x)$ . A standing field, with a constant frequency, behaves like a relativist free particle, at rest or in motion with a speed  $v < c$ . Since a standing field is necessarily limited with regard to space and time, it represents the limit of an almost standing field, whose frequency varies slightly  $\Omega(x,t)=\omega\pm\delta\Omega(x,t)$ , with  $\omega$  constant and  $\delta\Omega(x,t)\ll\omega$ . The adiabatic variations lead to field homogeneous Fourier relations, as well as to dynamic properties with conservation and least action laws, and to interactions which are formally identical with electromagnetism. Variations of the field velocity  $C(x,t)=c\pm\delta C(x,t)$ , with  $c$  constant and  $\delta C(x,t)\ll c$ , lead to interactions which are formally identical with gravitation. In wave optics approximation, the time-like function  $\psi(t)$ , formally identical with Klein-Gordon equation of quantum mechanics, leads to matter particles properties, by transpositions of standing fields wave properties.*

## 1 Introduction

On sait qu'Einstein avait accordé sa caution à Louis de Broglie pour sa thèse, et que, par la suite, une certaine convergence, dans leurs positions respectives vis à vis des recherches en physique, s'est manifestée au cours des années.

Tous deux avaient insisté sur la nécessité de représenter les phénomènes, pour pouvoir les comprendre, avant de les décrire mathématiquement. Pour Einstein, qui appuyait ses raisonnements théoriques sur des expériences de pensées, « La plupart des idées fondamentales de la science sont essentiellement simples et peuvent en général être exprimées dans le langage que tout le monde comprend. Mais pour suivre ces idées de près, il faut être en possession d'une technique très raffinée d'investigation. Les mathématiques comme instrument de raisonnement sont nécessaires si nous voulons tirer des conclusions qui peuvent être comparées avec l'expérience. Aussi longtemps que nous nous occupons seulement d'idées physiques fondamentales, nous pou-

vons nous passer du langage mathématique...Les idées doivent plus tard revêtir la forme mathématique d'une théorie quantitative, pour rendre possible la comparaison avec l'expérience...La simplicité mathématique de l'ouvrage de De Broglie, est vraiment admirable. Au moment où son ouvrage parut, la technique mathématique d'autres théories physiques était comparativement très subtile et compliquée. La mathématique traitant le problème des ondes de matière est extrêmement simple et élémentaire, mais les idées fondamentales sont profondes et d'une immense portée. » [1]

Pour sa part, Louis de Broglie, recommandait de « s'inspir(er) directement des données de l'expérience et en n'accordant pas une valeur trop exclusive aux formalismes mathématiques, même élégants et rigoureux, qui risquent parfois de masquer les réalités physiques profondes. » [2]

Tous deux avaient été très réticents vis à vis de l'orientation probabiliste de la mécanique quantique, qui s'est, depuis, considérablement développée, et a conduit au modèle standard de la physique, dans lequel les particules, tant matérielles que d'interactions, sont les constituants ultimes de l'univers. Einstein n'avait cependant pas remis en cause sa validité, et avait même souligné son adéquation remarquable, et sa pérennité : « Cette double nature du rayonnement (et des corpuscules matériels) est une propriété majeure de la réalité, qui a été interprétée avec succès par la mécanique quantique d'une manière ingénieuse et stupéfiante. Cette interprétation, qui est considérée comme définitive par la presque totalité des physiciens contemporains, m'apparaît seulement comme une solution temporaire...Par-dessus tout, cependant, le lecteur doit être convaincu que je reconnais entièrement les très importants progrès que la théorie quantique statistique a accompli en physique théorique...Les relations formelles que fournit cette théorie, par exemple son entier formalisme mathématique, devront probablement être maintenus, sous la forme d'inférences locales, dans toute théorie future. » [1]

Pour sa part, Louis de Broglie, avait adopté une attitude provisoire en l'enseignant pendant de nombreuses années: « Bien qu'après mes premiers travaux sur la mécanique ondulatoire j'aie formulé au sujet du dualisme des ondes et des corpuscules des idées tout à fait différentes de celles que l'Ecole de Copenhague commençait à répandre, j'ai été bientôt arrêté dans cette voie par de grandes difficultés et j'ai finalement admis l'interprétation devenue orthodoxe que j'ai ensuite longtemps enseignée. » [3]

Mais l'insatisfaction d'Einstein ne se limitait pas à la mécanique quantique. Elle s'étendait également à la relativité générale. « On ne saurait prétendre que les parties de la relativité générale qui peuvent aujourd'hui être

considérées comme achevées aient doté la physique de fondements complets et satisfaisants ; en premier lieu, le champ total y apparaît être composé de deux parties sans lien logique: la gravitation et l'électromagnétisme.» [4]. Ses critiques restent toujours actuelles puisque la gravitation est restée rebelle à toute unification avec les autres interactions, en particulier avec l'électromagnétisme. Le graviton, comme particule, n'a toujours pas été mis en évidence expérimentalement. Par conséquent, jusqu'à preuve du contraire, la gravitation reste une théorie classique, décrite par un champ continu.

De plus, son expression doit être homogène des points de vue physique et mathématique: «Pourtant, ce qui me paraît certain, c'est que dans une théorie cohérente, ne doit apparaître, à côté du concept de champ, le concept de particule. La théorie toute entière doit être basée uniquement sur des équations aux dérivées partielles et leurs solutions sans singularité. » [4] il est en effet certain qu'un point matériel, dont la masse volumique est infinie, ne peut que constituer l'approximation d'une particule physique étendue dans l'espace, même si cette extension est relativement très petite. Ainsi, pour Einstein: « Nous pourrions regarder la matière comme des régions dans l'espace où le champ est extrêmement intense. » De même, Louis de Broglie proposait « de considérer le corpuscule comme une très petite région de haute concentration du champ incorporé à une onde étendue» [5]

Pour répondre à ces difficultés, Einstein proposait, dans son programme, de faire d'un champ continu se propageant à la vitesse de la lumière, la base de l'univers physique.

« Nous avons deux réalités : la matière et le champ. Il est hors de doute que nous ne pouvons pas à présent concevoir que toute la physique puisse être bâtie sur le concept de matière, comme le croyaient les physiciens du début du 19ème siècle....Ne pourrions-nous rejeter le concept de matière et construire une physique basée uniquement sur le champ ?... Nous pourrions regarder la matière comme des régions dans l'espace où le champ est extrêmement intense. Il n'y aurait pas de place, pour notre nouvelle physique, tout à la fois pour le champ et pour la matière, le champ étant la seule réalité.» [1]

En convergence, dans la théorie de la double solution, Louis de Broglie proposait de « fai(re) intervenir une solution à singularité ponctuelle...avec une onde u présentant une « bosse » au sens d'Einstein, c'est à dire compor-

tant une très petite région où le champ  $u$  aurait des valeurs très élevées mais non infinies. »

Plusieurs décennies après l'énoncé du programme d'Einstein, les physiciens ont commencé à le mettre effectivement en œuvre en rejetant les étalons matériels internationaux de longueur et de temps, qui servaient de références depuis deux siècles, pour les remplacer par des étalons électromagnétiques, basés sur la fréquence et la période d'un champ continu qui se propage à la vitesse de la lumière. Par conséquent, du point de vue des mesures expérimentales d'espace et de temps, toute la physique est actuellement basée uniquement sur le champ, et non plus sur la matière.

De manière plus générale, les nouvelles technologies évoluent dans le sens du programme, quand elles substituent progressivement, et presque systématiquement, aux différents moyens mécaniques à base matérielle, des dispositifs électroniques, basés sur le champ électromagnétique. Il est significatif que le terme dématérialisation désigne le remplacement de supports de documents, comme le papier, par des enregistrements informatiques.

Ainsi, la technologie et l'expérience nous incitent fortement à nous intéresser activement au programme: du point de vue formel, en partant de l'équation de d'Alembert pour décrire la structure de base d'un champ scalaire se propageant à la vitesse de la lumière, et du point de vue épistémologique, en suivant les méthodes qu'Einstein avait utilisées.

On les trouve condensées dans les mots-clés d'heuristique et de conjecture, qu'il avait employés explicitement dans ses deux articles de 1905, fondateurs respectivement de la théorie quantique et de la relativité, et dans celui de structure, pour la relativité générale.

-L'adjectif heuristique est présent dans le titre même du premier article, « Sur un point de vue heuristique concernant la production et la transformation de la lumière ». Einstein y reconsidérerait la conception de la lumière, admise alors comme une onde continue, en admettant qu'elle se comportait comme si elle était constituée de particules, les quanta d'énergie. Cela permettait d'expliquer quantitativement l'effet photoélectrique. Mais cela ne prouvait pas leur existence effective, ou réelle, puisqu'il ne pouvait pas annuler tout l'acquis théorique et expérimental qui justifiait le comportement ondulatoire de la lumière. Par la suite, les quanta de lumière ont été considérés comme des particules effectives, les photons. Pour sa part, Einstein s'en est toujours

tenu au caractère heuristique: il considérait le problème de la dualité champ/particule comme ouvert. C'est ainsi qu'il avait été réceptif aux travaux de Louis de Broglie et de Schrödinger en mécanique ondulatoire.

-Le mot-clé conjecture figure dans l'article fondateur de la relativité: "Les lois de l'électrodynamique et de l'optique seraient également valables pour tous les systèmes de référence dans lesquels les équations de la mécanique sont valables. Nous érigeons cette conjecture en postulat ... » En mathématique, une conjecture admet comme vraie une relation que l'on peut vérifier dans toutes ses applications, mais que l'on ne sait pas démontrer dans le cas général. C'est par un saut dans le raisonnement, et donc explicitement sous forme de conjecture, qu'Einstein avait admis que la matière neutre en mouvement se comportait comme la matière chargée électriquement, et qui était décrite par les équations de Maxwell. C'est ainsi que la vitesse de la lumière, de nature électromagnétique, intervenait de manière générale. C'est donc par anticipation d'une démonstration, toujours en attente, que la vitesse de la lumière joue le rôle de constante fondamentale en relativité. Le terme conjecture, explicite dans l'article fondateur de 1905, explique l'attitude d'Einstein, qui demeurera toujours en attente d'une solution satisfaisante sur le fondement de la relativité. Pour lui, la rupture formelle, ou logique, de la relativité vis à vis de la physique classique, était provisoire.

-Le mot-clé structure a été utilisé par Einstein pour caractériser la relativité générale. Ainsi, précise-t-il, « Les équations de la gravitation ont la forme de lois de structure, qui est exigée pour toutes les lois physiques depuis les grandes conquêtes de la théorie du champ. » Mais, de manière implicite, le concept est à la base des deux articles de 1905. En effet, c'est en s'appuyant sur l'identité des structures mathématiques de leurs équations respectives qu'il a pu étendre celles de l'électromagnétisme à la mécanique, d'une part, pour fonder la relativité, et celles de la mécanique à l'optique, d'autre part, pour fonder la particule quantique

En étant guidé par la proposition d'Einstein, on peut chercher à « construire une physique basée uniquement sur le champ » dont découleraient les propriétés de la matière. Dans ce but, l'équation de d'Alembert peut servir de conjecture pour décrire la structure d'un champ scalaire se propageant à la vitesse de la lumière. En suivant la démarche de Louis de Broglie, ce sont les solutions stationnaires qui doivent être étudiées plus spécifiquement.

On peut alors montrer que les champs stationnaires qui se propagent à la vitesse de la lumière, de fréquence constante, ont des propriétés cinématiques formellement identiques à celles de la matière isolée en mécanique relativiste, et que la transformation de Lorentz, est spécifique des champs stationnaires [6][7].

Comme un champ ne peut pas s'étendre à l'infini dans le temps et l'espace, l'équation d'onde doit être nécessairement complétée par des conditions aux limites. Habituellement elles sont imposées de manière hétérogène par la matière. On peut montrer que ces conditions sont strictement équivalentes à celles exprimées par les relations de Fourier, homogènes au champ. Par conséquent, du point de vue physique, la fréquence constante d'une onde plane monochromatique, ou d'un champ stationnaire, doit être considérée comme la limite d'une fréquence très peu variable d'une onde presque monochromatique, ou d'un champ presque stationnaire.

Louis de Broglie avait déjà attiré notre attention sur le fait que, dans l'étude d'un champ, on privilégie en général, son développement en ondes monochromatiques élémentaires par analyse de Fourier [8]. « Dans la théorie actuelle, on accorde une sorte de prérogative aux états qualifiés de « monochromatiques »... (elle) consiste en ce qu'on les regarde comme plus normalement réalisés que les états représentés par une superposition de fonctions propres ou d'ondes planes monochromatiques. » Il avait ensuite précisé, qu'il fallait les considérer comme des limites: elles avaient une largeur spectrale, et l'équation de d'Alembert devait être nécessairement complétée par les relations de Fourier [9].

Dans ces conditions, pour des champs presque monochromatiques, une très faible variation de fréquence autour de la fréquence moyenne,  $\Omega(x,t) = \omega \pm \delta\Omega(x,t)$ , avec  $\omega$  constant, et  $\delta\Omega(x,t) \ll \omega$ , conduit à des interactions qui sont formellement identiques aux interactions électromagnétiques. On en déduit également les lois de conservation d'énergie-impulsion et les lois variationnelles [6].

De même, lorsque la vitesse de propagation n'est pas constante, la variation de la vitesse de propagation du champ  $C(x,t) = c \pm \delta C(x,t)$ , avec  $c$  constant, et  $\delta C(x,t) \ll c$ , conduit à des interactions qui sont formellement identiques à la gravitation [7].

La correspondance formelle entre les propriétés du champ stationnaire et de la matière, offre un cadre commun qui permet d'appréhender comment ces deux interactions s'articulent entre elles.

Dans cet article, nous proposons de montrer comment les champs presque stationnaires se propageant à la vitesse de la lumière, fournissent quelques éléments de réponses aux problèmes soulevés par Louis de Broglie, sur la dualité onde-particule quantique, avec la théorie de la double solution, et par Einstein, sur la relation entre la gravitation et l'électromagnétisme, avec la relativité générale.

## 2 Champ stationnaire et matière isolée

### 2.1. Propriétés cinématiques d'un champ stationnaire.

En admettant, sous la forme d'une conjecture, l'équation d'ondes du champ scalaire de célérité  $c$ , vitesse de la lumière dans le vide, comme base des propriétés de la matière, nous sommes assurés, par construction, que toutes ses conséquences mathématiques sont relativistes. Les solutions stationnaires élémentaires de l'équation de d'Alembert

$$\square_0 \mathcal{E} = \Delta_0 \mathcal{E} - (1/c^2)(\partial^2 \mathcal{E} / \partial t_0^2) = 0 \quad (1)$$

sont de la forme  $\mathcal{E} = \cos(\mathbf{k}_0 \mathbf{x}_0) \cdot \cos(\omega_0 t_0)$ , produit d'une fonction d'amplitude  $u(\mathbf{x}_0) = \cos(\mathbf{k}_0 \mathbf{x}_0)$  et d'une fonction de phase  $\psi(t_0) = \cos(\omega_0 t_0)$ . La séparation des variables de temps  $t_0$  et d'espace  $\mathbf{x}_0$ , montre que les ondes stationnaires oscillent sur place à la fréquence  $\omega_0$ , dans le repère  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ . On peut les obtenir par la superposition de deux ondes progressives de même fréquence, l'une retardée  $\cos(\omega_0 t_0 - \mathbf{k}_0 \mathbf{x}_0)$ , et l'autre avancée  $\cos(\omega_0 t_0 + \mathbf{k}_0 \mathbf{x}_0)$ . Quand les fréquences composantes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  dans  $\cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{x})$  et  $\cos(\omega_2 t + \mathbf{k}_2 \mathbf{x})$  sont différentes, on obtient par superposition une onde de la forme  $\cos(\mathbf{k} \mathbf{x} - \beta \omega t) \cdot \cos(\omega t - \beta \mathbf{k} \mathbf{x})$ , dans laquelle les oscillations à la fréquence moyenne

$$\omega = (\omega_1 + \omega_2) / 2 = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) c / 2 = \mathbf{k} c \quad (2)$$



sont modulées par des oscillations à la fréquence  $\beta\Omega$ , où  $\beta$  est la différence relative

$$\beta=v/c=(\omega_1 - \omega_2)/(\omega_1+\omega_2) \quad \omega_1=\omega(1+\beta) \quad \omega_2=\omega(1-\beta) \quad (3)$$

En identifiant  $kx-\beta\omega t=k_0x_0$  et  $\omega t-\beta kx=\omega_0t_0$  [10], on obtient directement les relations entre les fréquences  $\omega_0^2= \omega_1 \omega_2 = (1-\beta^2)\omega^2$ , et la transformation de Lorentz pour les coordonnées

$$x_0=(x-vt)/\sqrt{(1-\beta^2)} \quad t_0=(t-vx/c^2)/\sqrt{(1-\beta^2)} \quad (c^2t^2-x^2)=(c^2t_0^2-x_0^2). \quad (4)$$

Elles expriment que le repère  $(x_0,t_0)$  de l'onde stationnaire se déplace à la vitesse  $v$  par rapport au repère  $(x,t)$  avec un déphasage de vitesse  $c^2/v$  dans le temps. Ainsi, la transformation de Lorentz est spécifique des ondes stationnaires du champ : on peut le vérifier par comparaison avec les transformations correspondantes pour les ondes avancées ou retardées, caractérisées par des invariants  $ct\pm x$  et des coefficients  $1\pm\beta$  différents [6].

Le formalisme de Minkowski exprime de manière condensée les propriétés cinématiques des champs stationnaires, au prix de l'occultation des propriétés physiques sous-jacentes, comme la spécificité des champs stationnaires vis à vis des champs progressifs, ou la définition du coefficient  $\beta=v/c$  comme une différence relative, et donc inférieure à l'unité.

Dans un champ stationnaire, la fonction d'amplitude  $u(x_0)$  et la fonction de phase  $\psi(t_0)$  sont définies de manière indépendante, mais assujetties à la même constante  $k_0$  telle que

$$(1/u)\Delta_0u = (1/\psi)(\partial^2\psi/c^2\partial t_0^2) = -k_0^2 = -\omega_0^2/c^2 = \text{Constante}. \quad (5)$$

La fonction de phase  $\psi$  vérifie l'équation du genre temps, au repos, et en mouvement

$$\begin{aligned} \partial^2\psi(t_0)/c^2\partial t_0^2+k_0^2\psi(t_0)&=0 \\ \partial^2\psi(x,t)/c^2\partial t^2-\Delta\psi(x,t)+k_0^2\psi(x,t)&=0 \\ \partial^\mu\partial_\mu\psi+k_0^2\psi&=0 \end{aligned} \quad (6)$$

La fonction d'amplitude  $u$  du genre espace vérifie l'équation de Helmholtz, au repos, et en mouvement

$$\Delta_0 u(x_0) + k_0^2 u(x_0) = 0 \quad \Delta u(x, t) - \partial^2 u(x, t) / c^2 \partial t^2 + k_0^2 u(x, t) = 0 \quad \partial^\mu \partial_\mu u - k_0^2 u = 0 \quad (7)$$

Les propriétés cinématiques du champ stationnaire, caractérisées par ces deux fonctions de genres différents, apparaissent comme plus complètes que celles de la matière, définies seulement par des fonctions du genre temps. Elles en dérivent dans l'approximation de l'optique géométrique en mécanique relativiste, et dans l'approximation de l'optique ondulatoire en mécanique quantique.

## 2.2. Application à la mécanique relativiste.

Le point matériel intervient à la base de la mécanique de Newton, pour décrire les propriétés cinématiques de la matière. Il subsiste en relativité restreinte [9], et en relativité générale sous la forme de singularité [10]. En mécanique relativiste, l'inexistence de corps solides absolus impose que les particules élémentaires, qui constituent la matière, sont nécessairement ponctuelles. [12]. Par conséquent, la matière est représentée par des singularités : en l'absence d'une fonction de répartition plus générale  $u(r_0)$ , les équations de base de la mécanique relativiste sont incomplètes. [4]

Pour Einstein et pour Louis de Broglie, la particule matérielle, de masse-énergie volumique infinie ne peut pas être considérée comme strictement ponctuelle. Elle ne peut que correspondre à la limite d'une répartition localement étendue dans l'espace, (courbe en cloche, ou bunched field) : on la retrouve à partir de l'équation de Helmholtz pour la fonction d'amplitude (7). Parmi les différentes fonctions de Bessel, solutions de (7) de la forme  $F(k_0 r_0)$  en coordonnées sphériques, la plus simple, de symétrie sphérique, finie à l'origine des coordonnées, est de la forme  $u_0 = (\sin k_0 r_0) / (k_0 r_0)$ . Elle représente une courbe en cloche, (lumped function), maximale à l'origine des coordonnées  $r_0 = 0$ . Dans l'approximation de l'optique géométrique, quand la fréquence est très grande,  $\omega_0 = k_0 c \rightarrow \infty$ , l'extension spatiale déterminée par la longueur d'onde  $\lambda_0 = 2\pi / k_0 \rightarrow 0$  se contracte, de sorte que la fonction d'amplitude  $u_0(r_0)$  tend vers la distribution de Dirac  $\delta(r_0)$ . [6] [11] Le champ stationnaire  $\varepsilon(x_0, t_0)$ , solution du champ (1), est réduit à un point localisé à l'origine  $r_0$  des coordonnées.

Il convient cependant de bien préciser que ce caractère ponctuel d'approximation du champ ne traduit pas nécessairement sa réduction physique effective (collapse) : il est seulement relatif à l'observation ou à

l'interaction. L'équation du champ (1), implique que la solution stationnaire  $\mathcal{E}(\mathbf{x}_0, t_0) = u(\mathbf{x}_0)\psi(t_0)$ , est étendue dans tout l'espace, avec partout une fonction d'amplitude non nulle, sauf en certaines surfaces particulières, les surfaces nodales, situées à des distances multiples de la longueur d'onde  $\lambda_0$ , et à l'infini. Lorsque les conditions d'observation ou d'interaction sont très grandes vis à vis de  $\lambda_0$ , on peut efficacement repérer le comportement cinématique de l'ensemble du champ stationnaire en le réduisant à celui d'un point particulier, situé à l'origine  $\mathbf{r}_0$  en coordonnées sphériques, ou  $\mathbf{x}_0$  en coordonnées cartésiennes, où la fonction d'amplitude est extremum. Le centre d'amplitude  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{x}_0 = 0$  permet de définir la position de l'ensemble du champ stationnaire. Il est caractérisé par la condition

$$\nabla_0 u(\mathbf{r}_0) = \nabla_0 u(\mathbf{x}_0) = 0, \quad (8)$$

comme on peut le vérifier dans le cas simple où  $u(\mathbf{r}_0) = (\sin k_0 r_0) / (k_0 r_0)$ . Vis à vis du champ stationnaire, ce centre d'amplitude joue en cinématique le même rôle que le centre de masse pour la matière. En mécanique de Newton, la connaissance de la position du centre de masse doit être complétée par celle de la répartition de la matière. Dans le cas du champ stationnaire, cela revient à compléter la donnée de sa position  $\mathbf{x}_0$ , définie comme une variable dynamique, par celle de la répartition d'amplitude  $u(\mathbf{r}_0)$  en fonction de la variable de champ  $\mathbf{r}_0$ .

Dans l'approximation de l'optique géométrique, la fréquence très grande  $\omega_0 = k_0 c \rightarrow \infty$ , est éludée, les oscillations du champ stationnaire étant indétectables. Les équations (6) sont occultées. L'extension spatiale est réduite à un point: la fonction d'amplitude  $u_0(\mathbf{r}_0)$  tend vers la distribution de Dirac  $\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{x}_0)$ . Comme la transformation de Lorentz pour les coordonnées (4) est indépendante de la fréquence, elle subsiste pour déterminer la relation entre les positions  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{x}$  des champs stationnaires au repos et en mouvement.

Les équations de la mécanique relativiste, restreinte et générale, sont basées sur des points matériels qui se déplacent sur des trajectoires, et donc directement sur l'approximation de l'optique géométrique. Les équations périodiques, génériques du champ stationnaire, sont occultées. Les coordonnées d'espace  $x^\alpha$  sont des variables dynamiques, ponctuelles, et non des variables de champ  $r$ , qui décriraient une répartition étendue dans l'espace. L'approche ponctuelle, géométrique et mathématique, est privilégiée, au détriment des correspondances avec des significations physiques sous-

jaçentes. Par exemple, on ne fait pas de lien entre le caractère absolu des fonctions de genre espace d'une part, et de genre temps d'autre part, et la séparation des variables d'espace et de temps dans le repère au repos du champ stationnaire, alors qu'elle est à l'origine de la transformation de Lorentz. On ne fait pas de lien entre le rapport des vitesses de déplacement et de propagation  $v/c$  et une différence relative de fréquences (3), ce qui entraîne, que la vitesse  $v$  de déplacement est strictement inférieure à la vitesse de la lumière  $c$ , et la loi relativiste d'addition des vitesses, lorsque les différences de fréquences sont additives. Ainsi, on vérifie qu'en intercalant une fréquence  $\omega_3$  entre les fréquences composantes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  de  $v=c(\omega_1-\omega_2)/(\omega_1+\omega_2)=\beta c$ , on obtient deux vitesses composantes  $v_1$  et  $v_2$  telles que

$$v_1=c(\omega_1-\omega_3)/(\omega_1+\omega_3)=\beta_1 c \quad v_2=c(\omega_3-\omega_2)/(\omega_3+\omega_2)=\beta_2 c \quad (9)$$

$$v=(v_1+v_2)/(1+v_1v_2/c^2) \quad \text{ou} \quad \beta=(\beta_1+\beta_2)/(1+\beta_1\beta_2) \quad (10)$$

Inversement, à partir de (10), on calcule  $v_1=(v-v_2)/(1-v_2/c^2)$ .

### 2.3. Application à la mécanique quantique, et à la théorie de la double solution.

L'équation (6) de la fonction de phase du champ stationnaire ondulatoire est formellement identique à l'équation de Klein-Gordon pour une particule libre en mécanique relativiste. On sait qu'elle conduit à l'équation de Schrödinger non relativiste, lorsqu'on change l'origine des énergies, en considérant l'énergie cinétique  $E_c=mv^2/2=mc^2-m_0c^2$ ,   la place de l'énergie propre  $E=mc^2$ . L'équation différentielle du second degré de Klein-Gordon conduit également aux équations relativistes différentielles du premier degré, ou spinorielles, de Dirac, pour une particule et son antiparticule associée, en particulier pour l'électron, considéré comme ponctuel.

Les équations de base de la mécanique quantique, qui expriment le comportement de la matière au cours du temps, correspondent à l'approximation de l'optique ondulatoire. Depuis la thèse de Louis de Broglie, elles font intervenir une fréquence d'oscillation, et sont donc plus complètes physiquement et mathématiquement que les équations classiques de la mécanique relativiste, qui correspondent à l'approximation de l'optique géométrique, et dans lesquelles cette fréquence est occultée. Elles sont du genre temps, et par con-

séquent indépendantes de toute description géométrique des particules matérielles dans leur repère propre, qui peuvent être étendues ou ponctuelles. Cependant, la mécanique quantique, en s'appuyant sur l'expérience, insiste sur le caractère localisé, et à la limite ponctuel, de la particule. Elle ne retient que la limite dans l'approximation géométrique de sa fonction de sa répartition, du genre espace, réduite à la distribution  $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})$ .

Par comparaison avec les équations (6) et (7) des champs stationnaires, les équations de la mécanique quantique sont basées sur une double approximation : celle de l'optique ondulatoire pour la fonction d'onde  $\psi$ , et celle de l'optique géométrique pour la fonction d'amplitude  $u$ , réduite à un point.

Pour Louis de Broglie, cette description est par conséquent incomplète. « Dans la théorie de la double solution, nous admettons qu'il existe une onde physique  $u$ , qu'il faut bien distinguer de l'onde statistique  $\psi$  fictive et arbitrairement normée. Pour exprimer la coexistence de l'onde et de la particule par une image claire, nous supposerons que l'onde  $u$  comporte une très petite région en général mobile de très forte concentration de l'énergie qui constitue la particule ainsi intimement incorporée à l'onde. Nous écrivons donc  $u = \mathcal{V} + u_0$ , où  $u_0$  représente la très forte concentration d'énergie localisée, et où  $\mathcal{V}$  représente tout le reste de l'onde. Nous supposerons que l'onde  $\mathcal{V}$  a une très faible amplitude de sorte que l'on puisse considérer la totalité, ou du moins la presque totalité, de l'énergie comme étant localisée dans la très petite région occupée par  $u_0$ . » De plus, « les deux solutions  $\psi$  et  $u$  doivent avoir la même phase. »

Cette définition appelle plusieurs remarques.

- L'onde  $u_0(\mathbf{r}_0)$  qui décrit la répartition d'énergie de la particule dans son repère propre, est du genre espace. Elle est donc physiquement, et mathématiquement, différente de la fonction d'onde  $\psi$  qui vérifie l'équation de Klein-Gordon, ou ses dérivées, du genre temps. Ce sont bien les caractéristiques respectives des fonctions d'amplitude  $u$  et de phase  $\psi$  des champs stationnaires (6) (7).
- De plus  $u$  et  $\psi$ , qui oscillent au même rythme  $k_0 = \omega_0/c$  sont bien constamment en accord de phase.
- Au lieu de se limiter à l'approximation  $u_0(\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}_0)$ , la théorie de la double solution fait intervenir additivement l'onde  $\mathcal{V}$  de très faible amplitude. On peut donc admettre que  $\mathcal{V}$  est une perturbation de  $u_0$ .

Cette condition nous conduit à élargir l'étude des propriétés des champs stationnaires à celles des champs presque stationnaires, dont ils ne constitue-

raient que les limites pour des perturbations très petites, et à la limite nulles, et donc occultées.

### 3. Champ presque stationnaire et matière en interaction.

#### 3.1. Champ presque monochromatique.

Les solutions monochromatiques de l'équation du champ (1), qu'elles soient progressives ou stationnaires, sont illimitées par rapport à l'espace et au temps, puisque les variables  $x$  et  $t$  peuvent prendre n'importe quelle valeur jusqu'à  $\pm \infty$ . Du point de vue physique, et pour les applications pratiques, l'équation du champ (1) doit être complétée par des conditions aux limites. Elles sont en général assurées par la matière, qui agit soit comme source en déterminant les fréquences, soit comme détecteur, soit comme frontière géométrique, en fixant les longueurs d'onde. Outre le caractère hétérogène de la matière par rapport au champ, cette procédure n'est pas satisfaisante du point de vue relativiste, puisque le temps et l'espace interviennent séparément.

Pour y remédier en restant dans un cadre entièrement homogène au champ, on considère les conditions aux limites assurées par les paquets d'ondes. Le cas élémentaire le plus simple est obtenu par la superposition de deux ondes progressives de fréquences voisines  $\omega_1 = k_1 c$  et  $\omega_2 = k_2 c$ , se propageant dans la même direction, à la vitesse de la lumière. On obtient une onde de battement, qui se propage également dans la même direction, à la vitesse de la lumière, dans laquelle l'onde principale  $f(\omega t - kx)$ , de fréquence  $\omega = kc = (\omega_1 + \omega_2)/2$  et de longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ , est modulée par une onde  $g[\beta(\omega t - kx)]$ , de fréquence  $\beta\omega = \Delta\omega/2 = (\omega_1 - \omega_2)/2 = \Delta kc/2$  et de longueur d'onde  $\Lambda = 2\pi/\beta k$ . Comme  $\beta < 1$ , la longueur d'onde et la période de modulation sont plus grandes que la longueur d'onde et la période, principales. L'onde de modulation joue le rôle d'enveloppe d'extensions  $\Delta x = \Lambda/2$ , et  $\Delta t = T/2 = \Lambda/2c$ , qui déterminent les limites d'espace et de temps pour l'onde principale. On en déduit les relations de Fourier  $\Delta x \cdot \Delta k = 2\pi$ , et  $\Delta t \cdot \Delta\omega = 2\pi$ .

Ainsi, l'équation d'onde (1) seule, est insuffisante pour caractériser un champ monochromatique qui se propage à la vitesse constante de la lumière. Elle doit être nécessairement complétée par des conditions aux limites. Plutôt que de les imposer par la matière hétérogène, on peut avantageusement rester dans un cadre homogène, en prenant comme solutions de (1) des paquets d'ondes du champ. On en déduit alors les relations de Fourier, qui correspon-

dent à des conditions aux limites équivalant à celles imposées par la matière [6] [7].

Quand la différence de fréquences est très petite  $\Delta\omega=2\beta\omega\rightarrow 0$ , elle peut être considérée comme une perturbation  $\beta\omega=\delta\omega$ . Les deux fréquences composantes  $\omega_1=\omega+\delta\omega$  et  $\omega_2=\omega-\delta\omega$  définissent alors les limites à l'intérieur desquelles le paquet d'ondes peut être assimilé à une onde monochromatique, de fréquence  $\omega$  égale à la moyenne des fréquences.

Nous admettrons qu'une onde presque monochromatique, est une onde monochromatique au premier ordre, dont la fréquence  $\Omega(x,t)$  varie très peu autour d'une valeur constante  $\omega$

$$\Omega(x,t)=K(x,t)c=\omega \pm \delta\Omega(x,t) \approx \omega, \quad \text{avec} \quad \delta\Omega(x,t) \ll \omega. \quad (11)$$

La fréquence variable presque monochromatique  $\Omega(x,t)$  qui, se déduit de la fréquence constante monochromatique  $\omega$ , entraîne que, du point de vue mathématique, les propriétés des champs presque monochromatiques se déduisent de celles des champs monochromatiques par la méthode de la variation des constantes (méthode de Duhamel). [6]

Ainsi, nous représenterons une onde progressive presque monochromatique par

$$\varepsilon(x,t) = U(x,t)\exp i\varphi(x,t) \quad \text{avec} \quad \varphi(x,t) = \Omega(x,t)t - \mathbf{K}(x,t) \cdot \mathbf{x} + 2n\pi, \quad (12)$$

où les produits du deuxième ordre  $\delta\Omega dt \approx 0$  et  $\delta\mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} \approx 0$ , définis modulo  $2\pi$ , sont négligés à l'approximation du premier ordre. Cela revient à intégrer, dans les solutions presque monochromatiques, les conditions aux limites définies par les conditions de Fourier.

$$d\varphi(x,t) = \Omega(x,t)dt - \mathbf{K}(x,t) \cdot d\mathbf{x} \approx \omega dt - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x}. \quad U(x,t) = u(x,t) \pm \delta U(x,t) \quad (13)$$

Du point de vue physique, comme la fréquence de modulation  $\delta\Omega(x,t)$  est très petite devant la fréquence principale  $\omega$ , un champ presque monochromatique peut vérifier simultanément,

- pour ses propriétés du premier ordre, l'approximation de l'optique géométrique pour la fréquence principale  $\omega$ ,
- pour ses propriétés du deuxième ordre, l'approximation de l'optique ondulatoire pour la fréquence de modulation, telle que  $d\Omega(x,t) = d\delta\Omega(x,t)$ , d'après (11).

Lorsque, dans l'approximation du premier ordre, les variations du second ordre  $\delta\Omega$  et  $\delta\mathbf{K}$  sont négligées, les oscillations ne sont pas prises en compte: elles sont occultées ou cachées. C'est la caractéristique de l'approximation de l'optique géométrique, dans laquelle le champ se propage le long de rayons comme trajectoires. [6].

### 3.2. Application à la mécanique relativiste

Pour les champs presque stationnaires en mouvement de vitesse constante  $v=\beta c$ , de la forme  $\mathcal{E}(x,t)=U(x,t)\Psi(x,t)$ , la phase  $\varphi(x,t)=\Omega(x,t)t - \beta\mathbf{K}(x,t)\cdot\mathbf{x}$  est explicitée dans la fonction de phase  $\Psi(x,t)$ , qui décrit les déplacements, sous la forme

$$\Psi(x,t)=\exp i\varphi(x,t)=\exp i[\Omega(x,t)t - \beta\mathbf{K}(x,t)\cdot\mathbf{x}] \quad \beta\mathbf{K}(x,t)=\Omega(x,t)\mathbf{v}/c^2 \quad (14)$$

Par contre, la fonction d'amplitude,

$$U(x,t) = U[\mathbf{K}(x,t)\cdot\mathbf{x} - \beta\Omega(x,t)t] = U[\mathbf{K}(x,t)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{v}t)] \quad (15)$$

qui tend vers une distribution de Dirac, reste non explicitée et vérifie l'équation de Helmholtz.

Comme  $\varepsilon(x,t)$  vérifie (1), par la séparation des parties réelles et imaginaires dans  $\partial^\mu\partial_\mu\mathcal{E}=0$

$$\partial^\mu\partial_\mu U - U\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \partial^2 U/c^2\partial t^2 - \nabla^2 U - U[(\partial\varphi/c\partial t)^2 - (\nabla\varphi)^2] = 0 \quad (16)$$

$$\partial^\mu(U^2\partial_\mu\varphi) = 0 \quad \text{ou} \quad \partial(U^2\Omega)/c^2\partial t + \nabla\cdot(U^2\beta\mathbf{K}) = 0 \quad (17)$$

Ces relations s'appliquent à des ondes progressives pour  $\beta=\pm 1$ , à des ondes stationnaires au repos pour  $\beta=0$  et en mouvement pour  $\beta<1$ , à des ondes monochromatiques pour  $\omega$  et  $\mathbf{k}$  constants, et à des ondes presque monochromatiques pour  $\Omega(x,t)$  et  $\mathbf{K}(x,t)$  variables.

On en déduit les propriétés dynamiques de conservation de l'énergie-impulsion, et le principe variationnel, pour le champ stationnaire et pour le champ presque stationnaire.



### 3.3. Propriétés dynamiques des champs presque stationnaires et de la matière.

Pour le champ stationnaire de fréquence constante, au repos et en mouvement uniforme, la relation (17) se réduit dans l'approximation du premier ordre, à

$$\partial u_0^2 / \partial t_0 = 0. \quad \partial u^2 / \partial t + \nabla \cdot u^2 \mathbf{v} = 0 \quad (18)$$

C'est une équation de continuité pour le carré de la fonction d'amplitude  $u$ . Elle est formellement identique à l'équation de continuité de la matière, déduite de l'équation de Newton, et qui exprime la conservation de la masse volumique  $\mu$ . Par transposition de sa signification physique, elle exprime la conservation de la densité d'énergie  $u^2$  et d'impulsion  $u^2 \mathbf{v}$  du champ stationnaire de fréquence monochromatique constante  $\omega$ . On constate que, pour obtenir la relation (18) comme conséquence de l'équation du champ (1), avec en particulier le carré de la fonction d'amplitude associé formellement à une densité d'énergie, nous avons fait varier virtuellement la fréquence  $\omega$ , en ajoutant le terme de perturbation  $\delta\Omega(x,t)$ , pour ensuite l'annuler. Les variations locales de fréquence  $\delta\Omega(x,t)$ , dont la sommation donne au total un résultat nul, se propagent à la vitesse de la lumière entre les différents points du champ, en établissant une fréquence moyenne  $\omega$ , la même partout: elles correspondent par conséquent à des interactions [6]. Ainsi, même si elles n'apparaissent pas explicitement, les interactions interviennent implicitement sous forme virtuelle pour déterminer les propriétés dynamiques des champs stationnaires et de la matière.

Dans le repère au repos, la position  $x_0$  du champ stationnaire est déterminée par le centre d'amplitude (8), où la densité d'énergie du champ stationnaire  $u_0^2(x_0)$  est maximum. Par la transformation de Lorentz, elle vérifie, dans les repères au repos et en mouvement,

$$\nabla_0 u_0^2 = 0 \quad \nabla u^2 + (\partial u^2 \mathbf{v} / c^2 \partial t) = 0 \quad \nabla \mathbf{x} \mathbf{v} = 0 \quad \text{soit} \quad \pi^{\mu\nu} = \partial^\mu w^\nu - \partial^\nu w^\mu = 0, \quad (19)$$

où  $w^\mu = (u^2, u^2 \mathbf{v} / c) = u_0^2(x_0) (1, \mathbf{v} / c) / \sqrt{1 - \beta^2}$  est le quadri-vecteur densité d'énergie-impulsion.

Cette relation est vérifiée si on pose que la densité d'énergie  $w^\mu$  est un quadri-gradient  $\partial^\mu a$ . Elle est mathématiquement équivalente à l'équation variationnelle

$$\delta \int da = 0 \quad \delta \int \partial^\mu a dx_\mu = 0 \quad \text{avec} \quad w^\mu = \partial^\mu a \quad (20)$$

Comme  $u^2$  est une énergie volumique répartie dans l'espace, et donc une énergie volumique potentielle,  $-\nabla u^2 = -\nabla w_p = \mathbf{F}$  est une force volumique.  $(u^2/c^2)\mathbf{v}$  est une impulsion volumique. La relation (19) exprime que la répartition dans l'espace d'un champ stationnaire, dont la position est définie par son centre d'énergie, où l'énergie volumique est maximum, est stable, et se conserve au cours des déplacements à vitesse constante  $v < c$ .

En effectuant la transposition  $u^2/c^2 = \mu$  pour la matière de masse volumique  $\mu$ , et en tenant compte des identités  $d\mathbf{P}/dt = \partial\mathbf{P}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{P}$  et  $\nabla \mathbf{P}^2 = 2(\mathbf{P} \cdot \nabla)\mathbf{P} + 2\mathbf{P} \times (\nabla \times \mathbf{P})$  pour  $c$  et  $v$  constants, et de la valeur finie  $\int \{(\sin x)^2/x^2\} dx = \pi$  pour  $x$  variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , pour la détermination de l'énergie par l'intégration pour l'espace, on obtient à partir de (19), l'équation de Newton

$$d\mathbf{p}/dt = -\nabla mc^2 + \{\nabla(mv)^2\}/2m \quad d\mathbf{p}/dt = -\nabla L_m = -\nabla m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} \quad (21)$$

avec le Lagrangien mécanique relativiste  $L_m = -m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}$  pour la matière isolée ainsi que le principe de moindre action à partir de (20).

*Les propriétés de la matière isolée, de masse propre  $m_0$ , sont formellement identiques à celles des champs stationnaires  $\mathcal{E} = u(x_0) \cdot \psi(t_0)$  de célérité  $c$  et de fréquence constante  $\omega_0$ , avec la correspondance  $m_0 c^2 \leftrightarrow u_0^2$ , où  $u_0$  est la fonction d'amplitude du champ, solution de l'équation de Helmholtz  $\Delta_0 u(x_0) + k_0^2 u(x_0) = 0$ . La mécanique relativiste correspond à l'approximation de l'optique géométrique  $\omega_0 = k_0 c \rightarrow \infty$ . La mécanique quantique correspond à l'approximation de l'optique ondulatoire pour la fonction de phase  $\partial^2 \psi(t_0)/c^2 \partial t_0^2 + k_0^2 \psi(t_0) = 0$ .*

### 3.4. Champ presque stationnaire et interactions électromagnétiques.

Pour un champ presque stationnaire, c'est la densité d'énergie totale  $W = U^2 \Omega = w + \delta W$ , somme des densités d'énergie propre  $w$  et de perturbation  $\delta W$ , qui se conserve [7], de sorte que

$$\Pi^{\mu\nu} = \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu = 0 \quad \text{ou} \quad \Pi^{\mu\nu} = \pi^{\mu\nu} + \delta \Pi^{\mu\nu} = 0 \quad (22)$$

A la différence du tenseur de densité d'énergie propre nul  $\pi^{\mu\nu}$  pour le champ stationnaire monochromatique, le tenseur de densité d'énergie propre  $\pi^{\mu\nu}$  du champ presque stationnaire n'est plus nul: il est en opposition avec le tenseur de densité d'énergie d'interaction  $\delta\Pi^{\mu\nu}$ .

Dans le premier cas il traduit la stabilité de la répartition dans l'espace d'un champ stationnaire de fréquence constante. Le quadrivecteur densité d'énergie-impulsion  $w^\mu = \partial^\mu a$  est parallèle et dirigé le long de la vitesse de déplacement  $v$ .

Dans le deuxième cas, cette stabilité concerne l'ensemble du champ presque stationnaire qui se déplace à la vitesse  $v$ . Il se comporte comme un système composé de deux sous-systèmes, le champ principal de fréquence élevée presque constante  $\Omega(x,t) \approx \omega$ , et le champ d'interaction de fréquence beaucoup plus petite  $\delta\Omega(x,t) \ll \omega$ , chacun exerçant sur l'autre une force volumique égale et opposée  $\pi^{\mu\nu} = -\delta\Pi^{\mu\nu}$  orientée dans différentes directions, y compris perpendiculairement à  $v$ .

A partir des relations (16) (17), généralisées en (18) et (19) par la méthode de la variation des constantes, et transposées à la matière de masse légèrement variable  $M(x,t) = m \pm \delta M(x,t)$ ,

$$\nabla M c^2 + \partial P / \partial t = 0 \quad \nabla_x P = 0 \quad \text{ou} \quad dP/dt = -\nabla M c^2 + (\nabla P^2) / 2M. \quad (23)$$

Le tenseur de densité d'énergie d'interaction  $\delta\Pi^{\mu\nu} \neq 0$  est formellement identique au tenseur électromagnétique  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \neq 0$ . On peut les mettre en correspondance à travers la charge  $e$  constante  $\delta\Pi^{\mu\nu} = eF^{\mu\nu}$ , soit  $\delta M(x,t) = e\mathcal{U}(x,t)/c^2$  et  $\delta P(x,t) = eA(x,t)/c$ , le double signe pour la masse variable correspondant aux deux signes pour les charges électriques, ou à l'émission et l'absorption d'énergie électromagnétique par la matière. On retrouve le couplage minimum  $P^\mu(x,t) = p^\mu + eA^\mu(x,t)/c$ , soit  $M(x,t)c^2 = mc^2 + e\mathcal{U}(x,t)$ , et  $P(x,t) = p + eA(x,t)/c$  de l'électrodynamique classique, où l'énergie électromagnétique échangée avec une particule est très petite, en comparaison de son énergie propre  $eA^\mu(x,t)/c = \delta P^\mu(x,t) \ll p^\mu$ . [12].

*Les propriétés de la matière chargée électriquement, de masse propre  $M_0$ , sont formellement identiques à celles des champs presque stationnaires  $\epsilon = U(x_0, t_0) \Psi(x_0, t_0)$  de célérité  $c$  et de fréquence propre variable  $\Omega(x_0, t_0)$ , avec la correspondance  $M_0 c^2 \leftrightarrow U^2 \Omega$ .*

A partir de (23) on obtient alors l'équation relativiste de Newton pour la matière chargée, avec la force de Lorentz

$$dP/dt = -\nabla m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} + e(E + v \times H/c) \quad (24)$$

### 3.4. Application à la relativité générale.

Dans toutes les équations précédentes, dérivées du d'Alembertien, la vitesse de propagation  $c$  est constante. De même, le formalisme quadridimensionnel de Minkowski, et la transformation de Lorentz, impliquent que la vitesse  $v$  de déplacement est constante. Si on admet, comme un effet secondaire, que l'amplitude  $u_0(x_0)$  du champ stationnaire modifie légèrement la vitesse de propagation  $c$ , alors la méthode de variation des constantes, pour la vitesse de propagation  $C(x,t) = c \pm \delta C(x,t)$ , avec  $\delta C(x,t) \ll c$ , et pour la vitesse de déplacement  $V(x,t) = v \pm \delta V(x,t)$ , avec  $\delta V(x,t) \ll v$ , permet de généraliser toutes les équations précédentes, valables dans le cadre de la relativité restreinte. La transformation de Lorentz reste localement vérifiée, de même que les invariants du genre temps  $s_t^2 = c^2 t_0^2 = c^2 t^2 - x^2$ , et du genre espace  $s_e^2 = x_0^2 = x^2 - c^2 t^2$ , dans lesquels les variables de temps et d'espace sont séparées dans le repère propre du champ stationnaire. La relation  $\omega_0 = k_0 c$  prend la forme plus générale  $\Omega(x_0, t_0) = \mathbf{K}(x_0, t_0) \cdot C(x_0, t_0)$ . Même dans le repère au repos, les variables de temps et d'espace ne sont pas séparées pour un champ presque stationnaire. Les invariants prennent la forme locale  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ , qui sert de base au formalisme de la relativité générale, et conduit à toutes ses conséquences.

Lorsque, dans les équations précédentes, on fait légèrement varier la vitesse de propagation  $C$  et la vitesse de déplacement  $V$ , la densité d'énergie du champ stationnaire  $U^2$ , et, par transposition la masse  $M$  de la matière, restent au premier ordre in affectées par leurs très faibles variations dans (13) et (23). Les propriétés dynamiques du champ stationnaire, et, par transposition celles de la matière, se déduisent des propriétés précédentes par la méthode de la variation des constantes. Dans le repère entraîné  $(x,t)$  et dans le repère propre  $(x_0, t_0)$ , où  $\mathbf{V} = 0$ , La relation (21) devient

$$M dV/dt = -M \nabla (C^2 - V^2/2) \quad dV/dt = -\nabla (C^2 - V^2/2) \quad dV/dt_0 = -\nabla_0 C^2(x_0, t_0). \quad (25)$$

L'accélération  $dV/dt_0$  est indépendante de la masse, ce qui caractérise la gravitation. [7] [12]

Le potentiel de gravitation  $\Phi(x_0, t_0) = C^2(x_0, t_0)$  est formellement identique au carré de la vitesse locale de la propagation de la lumière. Ce résultat est cohé-

rent avec l'origine physique de la gravitation publié par Einstein en 1912. Dans un article sur *La vitesse de la lumière et le champ de gravitation statique* [13], préliminaire de celui sur la relativité générale de 1915, il avait établi l'équation  $\Delta c=0$  qui généralisait l'équation de Poisson  $\Delta\Phi=0$  pour le potentiel de gravitation dans le vide.

Lorsque, en plus d'une masse légèrement variable  $M(x,t)=m\pm\delta M(x,t)$ , la vitesse de propagation est également légèrement variable  $C(x,t)=c\pm\delta C(x,t)$ , la relation (23), dérivée des propriétés des champs presque stationnaires, devient dans le cas général

$$dP/dt = -\nabla M C^2 + (\nabla P^2)/2M. \quad (26)$$

Selon que la masse ou la vitesse de propagation du champ sont variables, le Lagrangien total  $L$  est la somme du Lagrangien  $L_m$  et de gravitation  $L_G$

$$dP/dt = -M\nabla(C^2 - V^2/2) - (C^2 - V^2)\nabla M = \nabla L_G + \nabla L_m = \nabla L. \quad (27)$$

Dans le domaine de l'électromagnétisme et de la mécanique en relativité restreinte, les vitesses de propagation du champ et de déplacement sont constantes. La transformation de Lorentz, avec l'intervalle du genre temps  $ds^2 = c^2 dt_0^2 = c^2 dt^2 - dx^2$  pour invariant, définit la structure des équations qui décrivent l'évolution des propriétés cinématiques et dynamiques des champs presque stationnaires, et de la matière. Les légères variations locales de fréquences  $\delta\Omega(x,t)$  par rapport à la fréquence moyenne constante  $\omega$  pour les champs, ou les légères variations locales de la masse  $\delta M(x,t)$ , par rapport à la masse moyenne constante  $m$  pour la matière, se comportent comme des interactions formellement identiques aux interactions électromagnétiques [6].

Dans le domaine de la gravitation en relativité générale, les vitesses de propagation du champ  $C(x,t)$ , et de déplacement  $V(x,t)$  des champs presque stationnaires, et de la matière, varient localement. L'intervalle invariant du genre temps, de forme générale  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ , définit la structure des équations qui décrivent l'évolution de leurs propriétés cinématiques et dynamiques. Les variations de vitesses  $\delta C(x,t)$  et  $\delta V(x,t)$ , par rapport aux vitesses moyennes constantes  $c$  et  $v$ , induisent des interactions qui sont formellement identiques à la gravitation.

#### 4. Remarques en conclusion.

Le point matériel, ou la particule ponctuelle, à la base des équations de la relativité et de la mécanique quantique, est, du point de vue physique, une

approximation. Pour Einstein et Louis de Broglie, il doit être considéré comme la limite d'une répartition localement concentrée d'un champ étendu dans l'espace, (courbe en cloche, ou *bunched field*).

En convergence des programmes de recherches proposés par Einstein d'une part, et par Louis de Broglie, d'autre part, les champs presque stationnaires, de célérité égale à la vitesse de la lumière, manifestent des propriétés cinématiques et dynamiques formellement identiques à celles de la matière. Ils constituent un cadre commun qui détermine la structure des équations de la relativité et de la mécanique quantique. Ils apportent quelques éléments de réponses aux problèmes soulevés par Louis de Broglie, sur la dualité onde-particule quantique, avec la théorie de la double solution, et par Einstein, sur la relation entre la gravitation et l'électromagnétisme, avec la relativité générale.

Les équations de la relativité expriment, sous la forme d'une invariance formelle, la stabilité dans le temps et l'espace de la répartition, et du comportement, des champs stationnaires et de la matière.

Dans l'approximation de l'optique géométrique, les équations pour les champs stationnaires, correspondent aux équations relativistes pour la matière. Le point matériel, ou la particule, correspond à la limite de la répartition définie par la fonction d'amplitude du champ, du genre espace.

Les champs stationnaires sont nécessairement limités dans l'espace et le temps : ils doivent être considérés comme les limites de champs presque stationnaires, dont les fréquences sont très peu variables. Ces conditions aux limites s'expriment de manière homogène par les relations de Fourier. Par transposition à la matière, elles impliquent que la masse est très peu variable, et conduisent aux relations homogènes de Heisenberg.

Dans l'approximation de l'optique ondulatoire, la fonction de phase des champs stationnaires, du genre temps, correspond à l'équation différentielle du second degré de Klein-Gordon de la mécanique quantique relativiste, dont dérive l'équation de Schrödinger non relativiste, ainsi que les équations différentielles du premier degré, ou spinorielles, de Dirac, pour une particule et son antiparticule associée

Lorsque la vitesse de propagation de la lumière est constante, les variations locales de la fréquence d'oscillation des champs presque stationnaires, induisent des interactions qui sont formellement identiques aux interactions électromagnétiques. Lorsque la vitesse de propagation de la lumière est localement variable, les interactions induites sont formellement identiques à la gravitation, pour les ondes presque stationnaires du champ et pour la matière.

**Références :**

- [1] A. Einstein, L. Infeld. *L'évolution des idées en physique*; Payot (1963)
- [2] L. de Broglie, *Recherche sur la théorie des quanta*, , réédition de la *Thèse* 1924 Masson Paris (1963)
- [3] L. de Broglie, *Etude critique des bases de l'interprétation actuelle de la mécanique ondulatoire*. Gauthier-Villars. (1963),
- [4] A. Einstein: *philosopher, scientist* ; Cambridge univ. press, London, (1970) p 79-81
- [5] L. Broglie, *Le dualisme des ondes et des corpuscules dans l'œuvre de Albert Einstein*. Ac. des Sc. Paris, (5 déc 1955) p 27
- [6] C. Elbaz, *Dynamic properties of almost monochromatic standing waves*, Asymptotic Analysis, 68 (2010) 77-88.
- [7] C. Elbaz, *Gravitational and electromagnetic properties of almost standing fields*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, A.I.M.S, serie B Vol 17, n° 3, (2012) p 835-849.
- [8] L. de Broglie, *La thermodynamique de la particule isolée*. Gauthier-Villars. (1964) p 108.
- [9] L. de Broglie, *Ondes électromagnétiques et photons*. Gauthier-Villars. (1964) p 58-59.
- [10] C. Elbaz, *Propriétés cinématiques des particules matérielles et des ondes stationnaires du champ*, Annales de la Fondation Louis de Broglie, vol 11, n° 1 (1986) 65, 84
- [11] A. Messiah, *Mécanique quantique*, Dunod, (1962), p 399
- [12] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie du champ*, Mir, (1966), p. 57-59, 117.
- [13] A. Einstein, *Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes*, *Annalen der physik*, 4, **38**, (1912), 355,369.

(Manuscrit reçu le 14 mai 2012, modifié le 11 février 2013)