Limite Minkowskienne de la relativité générale avec constante cosmologique et expansion accélérée de l'univers

Yves Pierseaux

email: ypiersea@ulb.ac.be

ABSTRACT. **Minkowskian Limit of General Relativity with Cosmological Constant and the Accelerating Universe.**

A Minkowskian solution of the equation of General Relativity (as written by Einstein in1915) is trivial because it simply means that both members of the equation are equal to zero. However, if alternatively, one considers the equation with a non-zero cosmological constant (CC) Λ (Einstein 1917), a Minkowskian solution is no longer trivial because it amounts to impose a constraint on the right hand side of the equation (i.e. a non-null stress-energy tensor). If furthermore one identifies (as usual) this tensor to the one of a perfect fluid, one finds that this fluid has a positive energy density and a negative pressure that depend on the two constants of the equation (i.e. gravitational constant G and cosmological constant Λ). When doing that, one has to consider the "Minkowskian Vacuum" as a physical object of GR (an enigmatic Minkowskian fluid).

Can one build a model of this object on the basis of a dynamical equilibrium between the effective gravitational attraction due to the positive energy density versus the negative pressure repulsion ?

We propose to study such a model, where the (enigmatic) fluid is assumed to exist only in a limited sphere whose surface acts like a "test body" sensitive to the gravitational field created by the fluid. No static equilibrium exists, but a "dynamical equilibrium" can be reached if the sphere expands in an accelerate way.

Up to there, we have simply constructed a model of an "abstract Universe" (i.e. the limited sphere : There is no fluid outside this sphere !) that gives to a (purely mathematical) positive constant Λ a concrete physical meaning. However, remembering that recent observations in Cosmology indicate that the "real Universe" seems to be "Flat" and in "Accelerated Expansion" ; remembering also (after all..) that the archetypal Flat Universe is simply Minkowskian Universe, we logically wonder if the unexpected Minkowskian global solution, could not be also a significant physical model.

RÉSUMÉ. Une solution minkowskienne de l'équation de la Relativité Générale (RG, Einstein-1915) est triviale parce qu'elle entraîne que les deux membres de l'équation sont nuls. Par contre si on considère la même équation avec une constante cosmologique (CC) Λ (Einstein-1917), la solution minkowskienne n'est plus triviale parce qu'elle implique une contrainte sur le deuxième membre (tenseur énergie-impulsion non-nul). Si maintenant on identifie (comme il est d'usage) ce tenseur à celui d'un fluide parfait, on en déduit que ce fluide possède une densité positive et une pression negative qui dépendent de deux constantes G (constante gravitationnelle) et Λ. Dès lors, on peut considérer le "Vide Minkowskien" comme un objet physique de la RG (un fluide minkowskien énigmatique).

Pouvons-nous construire un modèle de cet objet sur la base d'un équilibre dynamique entre une attraction gravitationnelle due à l'énergie positive et une répulsion due à une pression négative ?

Nous proposons d'étudier un tel modèle, où le fluide (énigmatique) existe seulement à l'intérieur d'une sphère limitée dont la surface agit comme un "corps d'épreuve" sensible au champ gravitationnel crée par le fluide. Il n'existe pas d'équilibre statique, mais un équilibre dynamique peut être atteint lorsque la sphère s'étend de manière accélérée. Nous avons ainsi construit, sans référence à la Cosmologie, le modèle d'un Univers "abstrait" (pas de fluide en dehors de la sphère limitée) qui concrétise physiquement le rôle de la constante purement mathématique Λ (constante quelconque "multipliant la métrique minkowskienne"). On peut maintenant partir des "constats" les plus récents de la Cosmologie dite "expérimentale" : l'Univers réel serait "plat" et dans un état d'expansion accélérée. Comme l'archétype de l'Univers plat est l'Univers de Minkowski, on s'interroge dès lors sur la question de savoir si notre solution globale minkowskienne ne pourrait pas rendre compte de ces observations expérimentales.

1 Un Fluide énigmatique à la Limite Minkowskienne Globale de l'Equation de la RG avec CC ?

Il est communément admis qu'une solution minkowskienne de l'équation d'Einstein de la Relativité Générale (RG) ([A .Einstein 1915])

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1}$$

est une solution triviale (sans intérêt) parce que l'annulation du tenseur de courbure d'Einstein $G_{\mu\nu} = 0$ entraîne l'annulation du tenseur d'énergie-impulsion de la matière $T_{\mu\nu} = 0$ ($G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci et $g_{\mu\nu}$ le tenseur métrique de Riemann avec les indices $\mu\nu$ $(0, 1, 2, 3)$, G est la constante de gravitation et $c = 1$ est la vitesse de la lumière). Cette double annulation des deux membres de l'équation caractérise une absence totale de courbure (espace-temps plat) et de matière (ou d'énergie) sous quelque forme que ce soit.

La situation est différente lorsqu'on considère l'équation (1) complétée par une constante Λ multipliant la métrique $g_{\mu\nu}$([A .Einstein 1917]) :

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2}$$

Dans ce cas, postuler une solution minkowskienne $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow G_{\mu\nu} = 0$ ("Vide de Minkowski") donne immédiatement la contrainte suivante sur le tenseur énergie-impulsion :

$$T^{VIDE}_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{8\pi G}\boldsymbol{\eta}_{\mu\nu} = \rho_{\text{VIDE}}\boldsymbol{\eta}_{\mu\nu} \tag{3}$$

Il est ainsi théoriquement possible d'associer à la constante Λ (> 0) un "fluide énigmatique" de densité positive $\rho_{\text{VIDE}} > 0$ compatible avec le "Vide minkowskien" ($G_{\mu\nu} = 0$). Le but de la présente étude est précisément d'examiner si la contrainte "inhabituelle" (3) ouvre des perspectives dynamiques pour le "Vide minkowskien" dans le cadre de la *RG* (§2).

REMARQUE 1 *Soulignons d'emblée que la démarche que nous proposons s'écarte délibérément de l'approche cosmologique habituelle*[1]*. Dans l'approche habituelle, on recherche la métrique $g_{\mu\nu}$ (dite de Robertson-Walker RW) comme solution de l'équation d'Einstein (2) où figurent : un tenseur $T_{\mu\nu}$ modélisé, représentant la matière énergie de l'Univers sous toutes ses formes, et le terme $\Lambda g_{\mu\nu}$ (placé dans le second membre) interprété comme une contribution supplémentaire au tenseur énergie-impulsion.*

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}) \qquad \textit{(3-Cosmologie)}$$

[1] Au départ de cette étude, nous voulons explorer l'interface entre la *RG* et la *RR* (Relativité Restreinte) en présence d'une constante mathématique quelconque Λ. On peut dès lors justifier l'appelation "Constante de Cartan" puisque c'est le mathématicien Cartan qui a montré que cette constante devait faire partie de la solution complète du problème einsteinien de la covariance générale (*RG*). Nous recherchons donc la signification physique de cette "Constante de Cartan" (qui correspond aussi à l'abréviation *CC*) sans oublier bien entendu que c'est Einstein qui historiquement l'a introduite pour des raisons cosmologiques. [A .Einstein 1917]).

On attribue généralement ce terme $T^{\Lambda}_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}$ à l'existence de certaines propriétés (quantiques ?) du vide. Ce terme est généralement considéré comme la paramétrisation du tenseur énergie-impulsion d'un fluide aux propriétés spécifiques, pour lesquelles on introduit les concepts d'énergie noire et de pression négative. Dans l'approche ("cosmologique") habituelle la limite minkowskienne n'existerait que dans le cas (improbable) d'une compensation exacte des contributions "source matérielle" et "terme cosmologique", $T_{\mu\nu} - T^{\Lambda}_{\mu\nu} = 0$. Dans notre approche, nous imposons la métrique minkowskienne et l'équation d'Einstein détermine alors un tenseur $T_{\mu\nu}$ du vide minkowskien (3).

Revenons maintenant à l'exploration de cette contrainte (3) dans laquelle la constante Λ est une constante de proportionalité entre le tenseur $T^{VIDE}_{\mu\nu}$ du fluide minkowskien et la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Comme dans la méthode habituelle identifions le tenseur du fluide énigmatique (3) à celui d'un fluide parfait relativiste $T^{VIDE}_{\mu\nu} \equiv (p+\rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$ qui devient à la limite minkowskienne :

$$T^{VIDE}_{\mu\nu} \equiv (p+\rho)u_\mu u_\nu - p\eta_{\mu\nu} \tag{4}$$

Nous devons dès lors associer, avec la définition (4), comme dans la méthode habituelle, une pression *négative* $p_{\text{VIDE}} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$ au fluide énigmatique (3) :

$$T^{VIDE}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho 000 \\ 0p00 \\ 00p0 \\ 000p \end{pmatrix} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad p+\rho = 0 \tag{5}$$

Entre la métrique minkowskienne $(1, -1, -1, -1)$ et les propriétés du fluide énigmatique (ρ, p, p, p), il existe une relation réciproque $(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) \Longleftrightarrow (p+\rho = 0)$. En effet la constante Λ impose, à l'interface $RG - RR$, une contrainte nouvelle $p + \rho = 0$ sur le tenseur diagonal $T^{VIDE}_{\mu\nu}$ qui n'existe pas pour un fluide parfait habituel (en RR) dont la pression est toujours définie positive[2]. Autrement dit la contrainte

[2]Il suffit de songer, par exemple, au tenseur diagonal du champ libre électromagnétique (em) où la pression $p_{em} = +1/3\rho_{em}$. En se plaçant dans le système propre (au sens de la RR) où un "fluide habituel" $T^{RR}_{\mu\nu}$ est au repos, l'équation (4) donne aussi un tenseur diagonal $T^{RR}_{\mu\nu} = (\rho, p, p, p)$ semblable à (5) mais avec $p + \rho \neq 0$ (et donc une pression positive). La limite minkowskienne de la RG (5) invente donc un fluide original qui diffère de tout fluide relativiste habituel dans le cadre de la RR.

(5) provient de ce que "pression et densité" forment un *quadri*-tenseur $T_{\mu\nu}^{VIDE}$ "pression-densité" proportionnel à la métrique minkowskienne[3].

La solution minkowskienne nous impose donc de prendre en compte le caractère spatio-*temporel* global du fluide et donc un temps t intrinsèquement lié au fluide (§2-2). Ce faisant nous sommes en parfaite harmonie avec la notion einsteinienne de "système comobile" attaché au fluide (doté d'un temps t). La contrainte (3 & 5) nous force logiquement à admettre l'existence d'un "fluide minkowskien" qui ne correspond pas à un fluide matériel habituel *dans* l'espace-temps minkowskien immuable. Tout se passe comme si, dans le cadre de la RG (2), c'est l'espace-temps lui-même (le CONTINUUM minkowskien) qui constitue désormais le fluide.

Avant de tenter de construire quelques résultats autour de cette idée de "continuum fluide" minkowskien, faisons quelques remarques qui visent à la rendre moins étrange. Ce n'est évidemment pas la première fois que l'on attribue des propriétés physiques au vide. En particulier, personne ne s'étonne du fait que le vide électromagnétique classique possède une permittivité et une perméabilité électromagnétiques. Et il ne faudrait pas oublier que dans son important article fondateur de 1905 , Henri Poincaré montre que la simple cohérence de la théorie classique de l'électron exige l'existence d'une étrange pression négative, pression dont l'origine est extérieure à la théorie et pour laquelle il suggère une origine gravitationnelle ([H. Poincaré 1905]). Et bien peu de physiciens s'émeuvent de la présentation de certaines propriétés quantiques (notamment l'effet Casimir) comme des effets de polarisation du vide (voir note 6). Et que dire de la Cosmologie actuelle où la constante Λ entraîne l'existence d'une mystérieuse énergie sombre (Dark Energy) non-baryonique à densité positive et pression négative ? (*3-Cosmologie*). Le cadre (" vide") spatio-*temporel* minkowskien "en tant que tel" devient un objet global (un fluide) physique (ou dynamique) dans la logique de RG (nous ne changeons strictement rien à la notion habituelle de limite locale minkowskienne) .

REMARQUE 2 *Insistons sur le fait que si notre fluide (3, 4, 5) ressemble à ce que les cosmologues appellent "énergie noire" (3-Cosmologie) en ce sens qu'il est composé de matière inhabituelle non baryonique, il en diffère radicalement en ce sens qu'il est entièrement défini en métrique minkowskienne (3). Il ne saurait donc être question d'appliquer à*

[3] L'isotropie de la pression dans le cadre de la RR est caractérisé par le *tri*-tenseur (α, β : indices d'espace, 1, 2, 3). $T_{\alpha\beta}^{RR} = -p\eta_{\alpha\beta} = (p, p, p)$. La constante Λ multipliant la métrique dans (3) induit donc une *4-proportionalité* typiquement RG.

un point de l'espace-temps lui-même (simulé par le fluide énigmatique) l'équation géodésique standard pour un point MATERIEL. En effet un tel point MASSIF (au sens baryonique du terme) conférerait une masse au fluide qui immanquablement courberait l'espace-temps ; auquel cas nous ne serions plus dans le cadre d'un vide plat minkowskien. Pour étudier un éventuel mouvement des points du fluide il faudra se baser uniquement sur (5) $p + \rho = 0$ *(§2-1 et 2-2).*

2 De la pression thermodynamique négative du fluide minkowskien à la dynamique de la vitesse de libération

Quelles sont les propriétés physiques du fluide (ou continuum spatio-*temporel*) énigmatique minkowskien ? Ses propriétés sont d'abord thermodynamiques parce que, étant vide de toute matière habituelle ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \Longrightarrow G_{\mu\nu} = 0$), il est caractérisé par une densité d'énergie non-nulle et une pression négative $p+\rho = 0$ (5). Cependant il existe un lien avec la constante de Gravitation G puisque $\rho = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ et le fluide possède donc des propriétés dynamiques. Développons la relation thermodynamique (5). Etant donné que ρ est la densité (locale) d'énergie, intégrons la relation (5) sur un volume fini V afin d'obtenir une énergie globale U (6) :

$$U + pV = 0 \tag{6}$$

Si, en retour, nous différentions la relation (6), on obtient la relation variationnelle (5bis) :

$$dU + pdV = 0 \tag{5bis}$$

qui semble ramener à (5, $\rho + p = 0$) de manière triviale ($U = \rho V$) mais que l'on peut aussi considérer comme une transformation isentropique (adiabatique) indiquant que le système considéré est à l'équilibre thermodynamique. Pouvons-nous également définir un équilibre mécanique (statique ou dynamique) ? Notons que nous avons d'une part une pression répulsive (négative) et d'autre part une gravitation attractive.

REMARQUE 3 *La situation est donc intéressante puisque dans le cas usuel de la RR on a des points matériels et pas de gravitation (géodésique droite) tandis que dans le cas du fluide minkowskien on n'a pas de point matériel mais de la gravitation puisque pression et densité dépendent de G. On peut donc s'attendre à ce que notre solution pseudo-euclidienne de la RG ne soit pas a priori aussi incompatible avec la gravitation que ne l'est la RR au sens traditionnel du terme.*

2.1 Potentiel gravitationnel attractif et sphère statique de fluide instable

Comme l'espace-temps considéré est l'espace-temps pseudo-euclidien de Minkowski, *modélisons* un volume spatial fini de fluide (à pression négative) par une sphère euclidienne :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad\qquad U = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \tag{7}$$

Dans notre modèle il n'y a donc pas de fluide (minkowskien) à l'extérieur de la sphère de fluide. Autrement dit nous voulons *modéliser* un volume sphérique FINI structuré par une métrique minkowskienne (plongé dans un espace-temps "sans structure" ou "amorphe").

A la limite minkowskienne, nous pouvons associer à l'energie U une "masse" inertielle (et gravifique !) M qui dépend des deux constantes fondamentales de la théorie G et Λ (sans oublier le rôle de la vitesse de la lumière $c = 1$):

$$Mc^2 = U \qquad (c = 1) \qquad\qquad M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 = \frac{1}{6}\frac{\Lambda}{G}R^3 \tag{8}$$

On peut maintenant introduire un bord dont l'élément de surface correspondant joue le rôle d'un corps d'épreuve vis à vis de ce qui se passe à l'intérieur Considérons ainsi un "corps d'épreuve"[4] à la surface de cette sphère, il est alors soumis au potentiel gravitationnel,

$$\phi = -G\frac{M}{R} \tag{9}$$

Notre modèle d'une sphère statique de fluide (à l'équilibre thermodynamique) et d'un corps d'épreuve au repos placé en surface est mécaniquement instable. Le corps d'épreuve "massique" est obligatoirement voué à chuter vers le centre de la sphère.

.

[4] C'est à dessein que nous utilisons ici la terminologie de l'électrostatique où un corps d'épreuve est une charge infinitésimale (ici une "masse" infinitésimale) qui subit l'influence du champ électrostatique (ici gravitationnel) sans modifier la distribution de charges qui l'engendre.

2.2 Fluide en expansion, équilibre dynamique stable et facteur d'échelle

Nous n'avons donc pas réussi à construire un modèle statique (intemporel) qui serait mécaniquement en équilibre (statique). Cependant, comme nous travaillons à la limite spatio-*temporelle* minkowskienne, il est loisible de considérer que la variation (5bis) est une variation temporelle ($U(t)$, $V(t)$) avec une possibilité de mouvement pour la surface de la sphère et donc du corps d'épreuve Ce qui entraîne la réécriture des équations du système "sphère-corps d'épreuve" (7, 8, 9) :

$$dU(t) + pdV(t) = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R(t)^3 \ , \ M(t) = U(t) = \frac{4}{3}\pi \rho R^3(t) \ , \ \phi(t) = -G\frac{M(t)}{R(t)} \tag{10}$$

La relation différentielle (5bis) n'est donc plus triviale car avec (5) on a une densité constante dans un volume variable dans le temps. Etant donné que le "corps d'épreuve" est situé à la distance *radiale* variable $R(t)$ du centre de la sphère, il est maintenant possible de concevoir une vitesse radiale d'éloignement $\frac{dR(t)}{dt} = \dot{R}(t)$ et donc d'*équilibrer,* à l'approximation newtonienne (modèle pseudo-newtonien[5]), l'énergie potentielle par de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}\mu \dot{R}(t)^2 - \frac{G\mu M(t)}{R(t)} = 0 \tag{11}$$

En simplifiant par la "masse" μ du "corps d'épreuve" (aussi petite que l'on veut) on trouve :

$$\frac{1}{2}\dot{R}(t)^2 - \frac{GM(t)}{R(t)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\dot{R}(t)^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho R(t)^2 = 0 \tag{12}$$

[5]Notre démarche est proche de la déduction classique (newtonienne) d'une équation de Friedman dans le cas où l'Energie totale ($E_{cin} + E_{pot}$), généralement pondérée en fonction d'un paramètre K, est nulle (11) $K = 0$. On sait que cette même équation (de Friedman) peut aussi être déduite de la *RG* où K devient alors un paramètre de courbure spatiale. L'équation de Friedman est donc relativiste au sens de la *RG*. Bien entendu dans notre approche la densité et la pression sont défnies a priori en fonction de la *CC* et la métrique minkowskienne ($K = 0$), cas particulier de la métrique *RW* (Remarque 1) induit un résultat non-trivial (14).

et donc une VITESSE *RADIALE* DE LIBERATION $\dot{R}(t)$ (positive) par essence indépendante de μ

$$\dot{R}(t) = R(t)\sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho} = R(t)\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} > 0 \tag{13}$$

L'équilibre du système "sphère finie + corps d'épreuve" ne peut être réalisé "statiquement", mais rien n'empêche qu'il le soit *dynamiquement*. Si $\Lambda = 0$ cette vitesse radiale est nulle $\dot{R}(t) = 0$ et tout rentre dans l'ordre minkowskien "habituel". Remarquons à cet égard que la distinction entre "habituel et non-habituel" est subtile car nous obtenons pour la limite minkowskienne, à la place d'un corps d'épreuve *"sans gravitation"*, un corps d'épreuve qui "*échappe à la gravitation*" (Escape Velocity). Tout se passe comme si la pression négative induisait dynamiquement une vitesse radiale de libération (13).

La surface de la sphère agit comme un corps d'épreuve. *La sphère dynamiquement stable est donc une sphère en expansion radiale exponentielle caractérisée par un facteur d'échelle* $R(t)$ *:*

$$R(t) = R_H e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \tag{14}$$

(à ce stade du raisonnement R_H est une longueur constante quelconque, voir 18 et remarque 4). On voit ainsi comment (avec la contrainte (5)) une constante géométrique Λ (Cartan, voir note 1) induit un facteur d'échelle physique dépendant du temps. *En résumé : si on suppose un modèle avec un volume fini du fluide énigmatique minkowskien (3), alors ce volume est en expansion (14).*

Avant de poursuivre les conséquences (§3) de (12-13-14), ouvrons une parenthèse Cosmologique. En se rappellant que Λ est la CC d'Einstein (1917), on sait qu'il existe un modèle cosmologique réputé vide et "en expansion exponentielle" $a(t) = Ae^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}(A = 1)$: c'est le modèle de W. de Sitter ($\rho = p = 0$) dont la métrique est non-minkowskienne ([W. de Sitter 1917]).

$$a(t) = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \qquad \Longrightarrow \qquad ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2) \tag{14-de Sitter}$$

Dans (*14-de Sitter*), le facteur d'échelle $a(t)$ est inscrit dans la métrique. Notre modèle du "vide" en métrique minkowskienne ($a(t) = 1$, voir équation 15) est donc distinct du Vide "de Sitter". Notre facteur d'échelle $R(t)$ est introduit *globalement* ((14) résulte de (5) et donc (3)) : il définit l'extension d'un espace limité où règne une métrique de Minkowski. Cette dernière est un cas particulier de la métrique RW (note 5) qui s'écrit avec la condition de radialité $d\theta = d\phi = 0$:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 \tag{15}$$

Rappelons que, contrairement à l'approche habituelle de la RR où la métrique minkowskienne règne dans un espace-temps potentiellement infini nous considérons ici que la métrique minkowskienne (15) règne dans un volume sphérique fini dont le rayon vaut R_H en $t = 0$ (Remarque 4, note 8). Finalement, ce qui va s'étendre dynamiquement, c'est la métrique minkowskienne qui règne à l'intérieur de la sphère (15).

3 Fluide ou "Univers" en expansion radiale accélérée

Soulignons que le raisonnement (§2-2), qui fait apparaître une vitesse de libération (13) d'un point à la surface du fluide, suppose qu'il n'y a pas de "fluide à densité positive" en dehors de la sphère de fluide. L'extérieur de notre sphère n'étant pas défini, cette sphère constitue donc un "univers" abstrait. Nous pouvons maintenant définir une constante d'expansion globale de cet "univers" que nous proposons de noter H_Λ (en référence à Hubble étant donné que l'objet de la Cosmologie est l'Univers réel, voir conclusion)

$$H_\Lambda = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \tag{16}$$

Cette expansion (de Hubble) est alors nécessairement un phénomène global puisque localement on a toujours la métrique (15). Nous pouvons maintenant définir la densité (15) du fluide énigmatique en fonction d'une grandeur en principe mesurable.

$$\rho_{\text{VIDE}} = \frac{3H_\Lambda^2}{8\pi G} \tag{16bis}$$

Notons que la dérivée seconde de notre facteur d'échelle $\ddot{R}(t)$ n'est pas nulle. Nous pouvons dès lors prendre en compte aussi un paramètre (noté q comme en Cosmologie) de ralentissement de l'expansion qui est ici *négatif :*

$$q = -\frac{R(t)\ddot{R}(t)}{\dot{R}(t)^2} = -1 \tag{17}$$

Cette nouvelle constante (non-dimensionnelle) correspond donc à une *accélération* de l'expansion de notre "univers". Nous avons ainsi associé à notre modèle global trois paramètres (H_Λ, ρ_{VIDE} et q) qui évoquent directement les paramètres habituels de la cosmologie (Univers réel, voir conclusion). On peut aussi définir une constante α_Λ qui a les dimensions habituelles d'une accélération :

$$\alpha_\Lambda = H_\Lambda c \quad (c = 1) \quad (1) \qquad \alpha_\Lambda^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad (2) \qquad (17\text{bis})$$

Dans notre modèle pseudo-newtonien dans la *RG*, cette accélération (17bis, 1) correspond à un champ de gravitation (17bis, 2).

On peut aussi mettre le facteur d'échelle $R(t)$ sous une forme non-dimensionnelle (paramètre k en italique) :

$$k(t) = \frac{R(t)}{R_H} \quad \text{ou} \quad \beta_h(t) = \ln k(t) \quad \alpha_\Lambda = \dot{\beta}_h(t) \qquad (18)$$

En bref, si on introduit, à la limite minkowskienne, une constante mathématique Λ dans (1), cela entraîne *en dernier ressort*, au-delà de la vitesse de libération (13), l'existence d'un "potentiel vitesse" $\beta_h(t) = \ln k(t)$ (18) qui est tel que si on le dérive (dérivée *logarihmique*) on trouve précisément l'accélération (17bis) $\alpha_\Lambda = \dot{\beta}_h(t) = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$ (§4). Remarquons qu'il s'agit ici d'une vitesse $\dot{k}(t)$ d'un point *de* l'espace ("vide") lui-même et non pas d'un point matériel *dans* l'espace.

REMARQUE 4 *Jusqu'à présent R_H (le rayon de la sphère à l'instant $t = 0$) est une constante arbitraire (14). Cependant il est logique de supposer qu'il n'y a pas une seconde constante universelle à côté de Λ. Dans la mesure où ce modèle aurait un correspondant cosmologique (voir conclusion), on pourrait suggérer une valeur de R_H comme l'inverse de la constante de Hubble. $R_H = H_\Lambda^{-1} = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ (14 et 17bis).*

4 Conclusion Cosmologique : Vide "de Sitter" et Vide de Minkowski

Nous avons montré qu'il existe (incontestablement, §1) une solution (globale) minkowskienne de la *RG* avec *CC* qui n'est pas a priori équivalente à la solution (locale) *RR* standard. Lorsque nous développons cette solution, qui semble n'avoir pas été considérée jusqu'à préent, nous trouvons effectivement une solution distincte de la *RR* (§2 et §3) puisqu'elle implique une expansion accélérée gouvernée par un facteur d'échelle $R(t)$. Pour les étapes essentielles de la déduction de $R(t)$ (14) ou $k(t)$ (18), nous retenons la suite logique suivante (3, 5, 10, 13) : $T_{\mu\nu}^{VIDE} = \frac{\Lambda}{8\pi G}\boldsymbol{\eta}_{\mu\nu} \Longrightarrow p + \rho = 0 \Longrightarrow dU(t) + pdV(t) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}\dot{R}(t)^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho R(t)^2 = 0.$

La solution globale minkowkienne (3) implique donc l'existence d'un Fluide (Continuum[6]) Universel en expansion radiale accélérée. Il en résulte une définition inédite (H_Λ et q) de deux paramètres habituels de la Cosmologie (16 & 17) : H *et* q (en italique). On est évidemment tenté d'appliquer ce résultat insolite directement à la Cosmologie.

Prenons cependant le problème à l'envers. Plutôt que de faire semblant de ne pas faire de la Cosmologie (§1 à §3), faisons d'emblée de la Cosmologie. Les observations récentes indiquent alors que l'Univers (réel) serait globalement plat *(au sens des sections spatiales plates, ce qui est le cas dans un espace-temps minkowskien plat)* et en "expansion accélérée" ([A. Riess and al.(1998)]). En faisant référence aux notations traditionnelles des Cosmologistes ([P.J.E. Peebles 2002] & [M. Turner 2002]), on a donc en résumé :

1°) Le Redshift spectral des galaxies détecté depuis Hubble

2°) La valeur proche de zéro du paramètre de courbure spatiale ($K = 0$) dans la métrique RW (note 5)

3°) La valeur négative (proche de -1) du paramètre de décéleration ($q < 0$)

4°) La densité avec ($K = 0$) proche de la densité "critique" $\rho_{critique} = \frac{3H^2}{8\pi G}$.

5°) En outre les cosmologistes admettent généralement que l'accélération est due à une "énergie" dite sombre (dark energy) qui constitue l'essentiel de la densité critique et qui devrait être liée à une CC non-nulle.

REMARQUE 5 Précisons que *les cosmologistes admettent que l'Univers est plat (ou Euclidien) au sens des sections spatiales plates. Ce qui est le cas bien entendu dans la limite spatio-temporelle minkowskienne traitée ici. Mais jusqu'à présent les Cosmologistes jugent qu'un espace-temps plat au sens minkowskien ne peut pas être compatible avec*

[6]Notre approche ne postule aucune origine physique particulière du Vide (par exemple une origine quantique, Lemaître). Nous admettons seulement l'existence d'une constante de la physique Λ dans une équation réputée "classique" (2). Nous simulons donc les propriétés du vide par un "Continuum Classique".

une expansion globalement accélérée. Ce jugement devrait être revu pour la limite minkowskienne globale ici considérée.

Comme l'archétype de l'Univers plat est celui de Minkowski, nous sommes *maintenant* en droit de nous demander si une solution minkowskienne *(à sections spatiales plates)* introduite directement dans l'équation RG avec CC (2) ne serait pas compatible avec ces données actuelles de la Cosmologie. C'est précisément ce que nous avons fait (§1). Nous avons trouvé ($\Lambda \neq 0$) un univers minkowskien plat *(à sections spatiales plates)*.avec la densité critique : $\rho_{\mathrm{VIDE}} = \frac{3H_\Lambda^2}{8\pi G}$ et donc $K = 0$. Nous avons en outre une constante d'expansion $H_\Lambda = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$ (définie avec un facteur d'échelle sans dimension, 18) ainsi qu'un paramètre d'accélération $q = -1$.

Notre modèle ((1) $\rightarrow$ (18)) est donc compatible avec $(2°, 3°, 4°, 5°)$. Il nous manque donc un lien avec le Redshift proprement dit (1°). Pour trouver ce lien, appuyons-nous (ici) sur le modèle cosmologique existant le plus proche de celui que nous proposons. A première vue il pourrait s'agir du modèle d'Einstein-de Sitter (1932) puisqu'il admet une solution parabolique-euclidienne ($K = 0$) avec la densité critique (16bis). Mais il s'agit d'un modèle pour la matière habituelle et avec une CC nulle. Ce modèle Einstein-de Sitter est de surcroît dépassé puisque la matière habituelle occupe désormais une place dérisoire dans la densité critique ([P.J.E. Peebles 2002]).

Notre modèle est plus proche d'une autre solution ($K = 0$) généralement connue sous le nom de "Vide de Sitter" (voir fin du §2, métrique *14-de Sitter*). Le "Vide de Sitter" admet une CC non-nulle ($\Lambda = 3H_\Lambda^2$) mais une densité qui n'est pas la densité critique (16bis) puisqu'elle est nulle ($K = p = \rho = 0$). Comme le paramètre de Hubble $H_\Lambda = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ (*14-de Sitter*) est une "vraie" constante on a $q = -1$, comme dans notre modèle .

Il est bien connu que l'on peut aussi définir dans le "Vide de Sitter" un Redshift parfaitement théorique. En effet le Redshift standard est déduit du mouvement radial du photon sur la base d'une métrique plate ($K = 0$) non-minkowskienne $dt^2 - a^2(t)dx^2 = 0$ (*14-de Sitter*)

$$1 + z \ = 1 + \beta + (1 + \frac{1}{2}q)\beta^2 + .. \tag{19}$$

(où β est une "vitesse" au sens de la RG avec la loi de Hubble $\beta = Hr_0$).

Le Redshift "Vide de Sitter"[7] avec la valeur $q = -1$ est donc, au deuxième ordre :

$$1 + z \ = 1 + \beta + \frac{1}{2}\beta^2... \tag{20}$$

Pour notre modèle minkowskien ($q = -1$) nous aurions ainsi le même redshift au second ordre. Notons que le facteur radial Doppler k de la RR standard (parfois appelé, facteur de Bondi) possède aussi le même développement au deuxième ordre (21).

$$k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 1 + \beta + \frac{1}{2}\beta^2... \tag{21}$$

Bien entendu ce facteur k ne correspond, dans le cadre standard de la RR, à aucune expansion de l'espace. Supposons que le facteur de Bondi soit algébriquement le même dans la RR standard (k sans expansion, 21) et dans notre modèle minkowskien ($k(t)$ avec expansion, 18)[8]. Notre modèle suggère dès lors une conjecture selon laquelle l'expansion accélérée, récemment détectée grâce aux supernovae de type Ia ([A. Riess and al.(1998)]), correspondrait *à tous les ordres* au développement (21) du facteur de Bondi *réinterprété* dans le cadre de la RG (à la limite minkowskienne).

Remerciement

Je remercie infiniment Jean Reignier.

[7]Notons à cet égard que le Steady State de Bondi est aussi basé sur la métrique (*14-de Sitter*) avec une CC nulle.

[8]Notre modèle est *incomplet* car qui dit "Métrique de Minkowski" dit "Transformation de Lorentz (TL avec une vitesse $\beta < 1$)". Or nous n'avons pas de lien évident (à ce stade) avec la TL car notre vitesse "pseudonewtonienne" d'expansion $k(t)$ peut être aussi grande que l'on veut. Indiquons ici seulement unr piste que nous suivrons dans une prochaine étude afin de *compléter* notre modèle minkowskien. Nous examinerons les conséquences théoriques d'une identification entre le facteur d'échelle $k(t)$ (18) et le facteur Doppler $k(\beta)$ (21). Nous examinerons ensuite si cette identification implique l'existence d'une seconde constante de type Milgrom α_Λ (à côté de la vitesse c de la lumière) dans la cinématique relativiste (DSR, Doubly Special Relativity, [Y. Pierseaux (2010)]).

Références

[A .Einstein 1915] " Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie", Ann. d. Ph, 49, 1916.

[A .Einstein 1917] " Kosmologische Betrachtungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie", Sitzungsberichte Preuss Ak. d. Wiss., 142-152, 1917.

[H. Poincaré 1905] "Sur la dynamique de l'électron", CR de l'Ac. des Sci. de Palerme, 1905. In Rendiconti Circ. mat. de Palermo, 21, 1906.

[Y. Pierseaux (2010)] "An Unexpected Minkowskian Solution of Einstein's Equation of General Relativity with Cosmological Constant", http ://arxiv.org/abs/1009.1375, Revue IIHE, August 2010.

[W. de Sitter 1917] "On Einstein's theory of gravitation and its Astronomical Consequences", Royal Astronomical Society ; Monthly Notices, vol. LXXVIII, 1917, p 3-28.

[A. Einstein (1905)] "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", Ann. d. Ph., 17, 1905.

[H. Bondi (1962)] "Relativity and Common Sense. A new approach to Einstein".Dover Publications Inc, New York, 1962.

[A. Riess and al.(1998)] "Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, Astronomical Journal, 116, 1009-1038, 1998).

[P.J.E. Peebles 2002] "The Cosmological Constant and Dark Energy", http ://arxiv : astro-ph/0207347/V2, 20 Nov 2002.

[M. Turner 2002] " The New Cosmology", World Scientific, 2002.

(Manuscrit reçu le 14 juin 2012, modifié le 29 janvier 2013)