Un fluide compressible potentiel comme réalité physique d'un système à plusieurs particules?

PIERRE PELCÉ

Institut de Recherches sur les Phénomènes Hors Equilibre,
49 rue Joliot-Curie, BP146, 13013 Marseille, France

RESUME. Nous dérivons l' équation de Schrödinger à plusieurs (n) particules en utilisant d' autres principes que le principe de superposition et de correspondance entre quantités physiques et opérateurs linéaires. Nous supposons que les particules sont portées par un fluide dans un espace de configuration à 3n dimensions, compressible, sans viscosité ni pression. La seule condition d' écoulement potentiel suffit à regrouper les variables du fluide en une fonction d' onde qui satisfait l' équation de Schrödinger. La fonction d' onde ainsi trouvée est équivalente au champ quantique de Bohm, sans à avoir à tenir compe de conditions supplémentaires sur le fluide, lorsque celui-ci s' écoule dans un domaine simplement connexe.

ABSTRACT. We derive the many body (n) Schrödinger equation by using other principles than the superposition and correspondance between physical quantities and linear operators. We do the hypothesis that the particles are carried by a fluid in a configuration space with 3n coordinates, compressible, without viscosity nor pressure. The only condition that the flow velocity derives from a potential is sufficient to group the fluid variables in a wave function which satisfies the Schrödinger equation. The wave function so found is equivalent to the Bohm quantum field, without additional conditions to satisfy on the fluid, when this one flows in a simply connected domain.

1 Introduction

La mécanique quantique non relativiste décrit la dynamique d'un système de n particules en interaction dans un espace de configuration de dimension 3n. Dans l'interprétation de Copenhague, qui a conduit aux succès les plus importants, les particules ne possèdent pas de trajectoire comme en mécanique classique. Il n'est possible d'accéder à la dynamique des particules que de façon statistique par l'introduction d'une fonction d'onde nombre complexe $\Psi(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, t)$ solution de l'équation de Schrödinger, dont le carré du module détermine la densité de probabilité de trouver les particules aux points donnés [1-3]. De façon différente, la théorie ontologique de Bohm [4-5], qui trouve sa source dans la critique de l'interprétation de Copenhague d'Einstein, Podolsky et Rosen [6] et la théorie de la double solution de De Broglie [7,8], postule que la dynamique des particules est guidée par un champ déterministe $\psi(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, t)$ lui aussi nombre complexe, dont le gradient de la phase détermine les vitesses des particules dans l'espace de configuration. Par hypothèse, ce champ satisfait aussi l'équation de Schrödinger, mais la conséquence importante est que, à la condition de complexité suffisante des trajectoires, qui semble d'autant mieux satisfaite que le nombre de particules est grand, la densité de probabilité Ψ associée à cette dynamique est proportionnelle à ψ, et satisfait donc aussi l'équation de Schrödinger, comme dans la première interprétation.

Si l'on décompose l'onde ψ en amplitude et phase comme $\psi = R\exp i\frac{S}{\hbar}$, on peut déduire de l'équation de Schrödinger deux équations pour R et S dans l'espace de configuration, dont la première est une équation de conservation de la matière pour la densité R^2, et la seconde une équation de Hamilton Jacobi pour la phase S dans laquelle apparait un potentiel quantique ne dépendant que de R et de ses dérivées secondes par rapport à l'espace. Si l'on prend le gradient de cette dernière équation par rapport aux coordonnées spatiales d'une particule donnée, on constate que la dérivée totale de la quantité de mouvement de cette particule égale la somme des forces appliquées et de la force quantique, la dérivée totale étant à prendre dans un sens hydrodynamique, où le terme d'advection fait intervenir tous les fluides associés à chaque particule. Ce fluide compressible dans l'espace de configuration, qui pour une particule est le fluide de Madelung [9], n' a pas d' analogue naturel observable, ceux-ci étant en général des fluides à trois dimensions d'espace portant par exemple des particules en suspension. Mais nous voulons montrer ici que, dans le domaine non relativiste, ce fluide pourrait être la véritable réalité physique à l'origine du mouvement des particules.

Au lieu de postuler comme Bohm l'existence d'un champ quantique déterministe dont on ne sait pourquoi il serait un nombre complexe, et pourquoi ce champ satisferait l'équation de Schrödinger, nous faisons l'hypothèse que la réalité physique d'un système de n particules non relativistes, est un fluide compressible de densité $\rho(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, t)$ sans viscosité ni pression dans l'espace de configuration à 3n dimensions. Puis nous montrons que, comme dans le cas d'un fluide à une particule [10], si la vitesse de ce fluide dérive d'un potentiel $S(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, t)$, chaque dérivée étant affectée d'un facteur inversement proportionnel à la masse de la particule correspondante, alors la fonction complexe $\psi = \sqrt{\rho}\,\exp(i\frac{S}{\hbar})$ satisfait l'équation de Schrödinger dans ce même espace. Ainsi, dans cette hypothèse, le fait que le champ quantique soit un nombre complexe qui en sorte factorise les variables d'écoulement, est profondément relié au caractère potentiel de l'écoulement, et le fait que ce champ satisfait l'équation de Schrödinger, relié au fait que la contrainte d'écoulement potentiel permet de faire apparaitre la structure particulière du potentiel quantique dans la partie du tenseur d'impulsion qui dépend de la densité du fluide. Connaissant l'importance fondamentale de la linéarité de l'équation de Schrödinger dans le principe de superposition en particulier, on conçoit que cette dérivation de cette équation, résultant d'hypothèses physiques différentes, puisse conduire à des résultats nouveaux sur les fondements de la mécanique quantique

2 L' équation de Schrödinger pour plusieurs particules

L'équation de Schrödinger pour le champ quantique déterministe de Bohm $\psi(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, t)$, décrivant la dynamique de plusieurs particules de masses m_1, ...m_n interagissant avec une énergie potentielle $V(x_1, y_1, z_1, ...x_n, y_n, z_n, t)$, dans un champ électromagnétique de potentiel vecteur nul est

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\hbar^2\left(\frac{1}{2m_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right)+....+\frac{1}{2m_n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_n^2}\right)\right. \quad (1)$$
$$\left.+V(x_1,y_1,z_1,....x_n,y_n,z_n,t)\right)\psi$$

Ecrivant la fonction d'onde sous la forme

$$\psi(x_1,y_1,z_1,...,x_n,y_n,z_n,t) =$$
$$R(x_1,y_1,z_1,...,x_n,y_n,z_n,t)\exp\left(i\frac{S(x_1,y_1,z_1,...,x_n,y_n,z_n,t)}{\hbar}\right) \quad (2)$$

et séparant les parties imaginaire et réelle de l'équation de Schrödinger, nous obtenons deux équations pour les quantités R et S :

$$\frac{\partial R}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}(2\overrightarrow{\nabla_1}R.\overrightarrow{\nabla_1}S+R\Delta_1 S)+...+\frac{1}{2m_n}(2\overrightarrow{\nabla_n}R.\overrightarrow{\nabla_n}S+R\Delta_n S) = 0 \quad (3)$$

et

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}(\overrightarrow{\nabla_1}S)^2+...+\frac{1}{2m_n}(\overrightarrow{\nabla_n}S)^2$$
$$+V-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\Delta_1 R}{R}-...-\frac{\hbar^2}{2m_n}\frac{\Delta_n R}{R} = 0 \quad (4)$$

Si l' on pose alors $\rho = R^2$ et

$$\vec{v_i} = \frac{1}{m_i}\overrightarrow{\nabla_i}S \quad (5)$$

et que l'on multiplie la première équation par R, on retrouve l'équation de conservation de la masse d'un fluide potentiel, mais dans un espace de dimension 3n

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}.\vec{j} = 0 \quad (6)$$

où

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad ; \quad \vec{v} = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z} ..., v_{nx}, v_{ny}, v_{nz}) \quad (7)$$

La seconde équation (4) est une équation de Hamilton-Jacobi pour s = 3n degrés de liberté, avec un potentiel augmenté d'un potentiel quantique qui dépend de l'amplitude de la fonction d'onde

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\Delta_1 R}{R} - ... - \frac{\hbar^2}{2m_n}\frac{\Delta_n R}{R} \quad (8)$$

En prenant le gradient de l'équation (4) par rapport aux coordonnées spatiales de la particule i, on déduit alors l'équation de mécanique des fluides

$$\frac{d\vec{p_i}}{dt} = m_i\left(\frac{\partial \vec{v_i}}{\partial t} + \vec{v_k}.\vec{\nabla_k}\vec{v_i}\right) = -\vec{\nabla}_i(V + Q) \quad (9)$$

pour l'évolution de la quantité de mouvement de cette même particule, où l'indice muet k concerne une sommation sur toutes les particules. La dérivée totale fait ainsi intervenir une advection plus complexe que celle d'un fluide ordinaire à trois dimensions puisque toutes les composantes de toutes les vitesses des particules dans l'espace de configuration sont impliquées. Notons que cette propriété n'est pas spécifiquement quantique, puisque cette même dérivée totale est présente si l'on prend le gradient de l'équation de Hamilton-Jacobi classique.

3 Fluide quantique primordial

Considérons une matière formée de n particules de même masse m_0, la plus petite qu'il soit possible et attribuons au mouvement une densité

$$\rho(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, t) \quad (10)$$

qui dépend des coordonnées des n particules, et une vitesse à 3n composantes

$$\vec{v} = (v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}, ..., v_{xn}, v_{yn}, v_{zn}) \quad (11)$$

Supposons que les particules sont portées, dans un espace à 3n dimensions simplement connexe[1], par le courant d'un éther compressible sans viscosité ni pression de densité ρ et de champ de vitesse $\vec{v}$. Ces particules sont juste portées, c' est-à-dire qu' elles ne sont pas supposées interagir les unes avec les autres par une énergie potentielle appropriée.

La forme la plus générale du tenseur de densité du flux d'impulsion d'un tel fluide s'écrit sous la forme

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \Pi_{ik}' \qquad (12)$$

où le premier terme, usuel, est associé à l'inertie du fluide [10], et où le second, tout à fait inhabituel pour les fluides ordinaires, dépend des dérivées partielles spatiales de la densité du fluide. Les deux tenseurs élémentaires du second ordre que l'on peut former avec la densité et ses dérivées spatiales sont $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_k}$ et $\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\frac{\partial \rho}{\partial x_k}$. Si les gradients de densité ne sont pas trop importants, on pourra admettre que le tenseur Π'_{ik} ne dépende que des dérivées spatiales les plus basses possibles, et donc apparaisse sous la forme d'une combinaison linéaire des deux tenseurs élémentaires mentionnés ci-dessus, chacun affecté d'un coefficient scalaire en général fonction non linéaire de la densité et du carré du module de la vitesse v^2. Le principe de relativité de Galilée interdit la dépendance en v^2 car un changement de repère Galiléen changerait v^2 et donc, la force exercée sur l'unité de volume de fluide $-\frac{\partial \Pi_{ik}'}{\partial x_k}$. Il en résulte que

$$\Pi_{ik}' = \alpha(\rho)\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_k} + \beta(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\frac{\partial \rho}{\partial x_k} \qquad (13)$$

où α(ρ) et β(ρ) sont pour le moment des fonctions arbitraires non linéaires de la densité, i et k étant des indices pouvant prendre l'une des 3n valeurs possibles. Manquent à cette forme générale le terme de pression et la partie

[1] Cette condition est nécessaire à l' équivalence entre fluide et champ quantique discutée au §6.

visqueuse [10], puisque le fluide est supposé de pression et de viscosité nulles.

La conservation de la densité du fluide s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \vec{v}) = 0 \quad (14)$$

Lorsque le fluide se déplace sans force extérieure appliquée, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (15)$$

où ici encore les indices i et k peuvent prendre l'une des 3n valeurs possibles. A partir des équations (14) et (15), nous pouvons écrire

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi'_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (16)$$

4 Contrainte d' écoulement potentiel

Faisons alors l' hypothèse que l' écoulement est potentiel, c' est-à-dire que

$$v_i = \frac{1}{m_0} \frac{\partial S}{\partial x_i} \quad (17)$$

Les entiers i et j étant donnés, compris entre 1 et 3n, prenons la dérivée partielle par rapport à x_j de l'équation (16) et en lui retranchant la même équation, mais en échangeant les indices i et j. On obtient une généralisation de la contrainte que doit satisfaire le tenseur Π'_{ik} obtenue pour une seule particule [11]

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi'_{ik}}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi'_{jk}}{\partial x_k}\right) = 0 \quad (18)$$

Elle se traduit par l'annulation de sommes de termes produit de la densité et de ses dérivées partielles, la somme des degrés des dérivées de chaque terme étant toujours 4, comme par exemple $\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1\partial y_1}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1\partial x_2}$. Les facteurs de ces différents termes, lorsqu'ils ne sont pas identiquement nuls, sont fonctions de α, β, de leurs dérivées première et seconde en fonction des densités.L' identification de tous les termes contenant les mêmes dérivées conduit alors aux relations

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\alpha}{d\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{d\beta}{d\rho} + \frac{\beta}{\rho^2}$$
$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right) = \frac{\beta}{\rho} \qquad (19)$$

comme dans le cas d'une seule particule [11]. En effet, considérant un terme i,j,k, de l'expression (18), soit k est égal à i ou j, à l'origine de l'annulation d'un terme comme par exemple x,x,y d'une seule particule, ou k est différent, à l'origine de l' annulation d' un terme x,y,z d'une seule particule.

Les solutions de l'éqn.(19) sont de la forme $\alpha = C$ et $\beta = -\frac{C}{\rho}$. On déduit alors

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi'_{ik}}{\partial x_k} = 2C\partial_i\left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right) \qquad (20)$$

où l'opérateur Laplacien Δ est ici défini dans l'espace à 3n dimensions.

Insérant alors l'éqn.(20) dans l'éqn.(16) on retrouve l'éqn.(9) à potentiel V = 0, où toutes les masses des particules sont égales à m_0, dès lors que $C = -\frac{\hbar^2}{4m_0}$. Combinant alors avec l'équation de conservation de la masse (14), on remonte à l'équation de Schrödinger (1) où toutes les masses sont égales à m_0 et où l'énergie potentielle V est nulle.

Ainsi, la dynamique d'un fluide compressible sans viscosité ni pression, porteur de n particules identiques sans interaction, peut se résumer à l'évolution d'une fonction d' onde à 3n coordonnées dont l'amplitude est la racine carrée de la densité et dont le gradient de la phase détermine la vitesse des particules. L' équation d'évolution de cette fonction d' onde est l'équation de Schrödinger pour n particules de masses identiques à énergie potentielle nulle. Notons que dans cette dérivation, nous n' avons fait aucune hypothèse concernant la linéarité de l'équation, indispensable pour assurer le principe de superposition des ondes. La seule hypothèse d'écoulement potentiel suffit à transformer une dynamique initiale à priori non linéaire en une dynamique linéaire.

5 Réduction des coordonnées

Comment alors faire apparaitre des particules de masses différentes? Par regroupement de particules. Supposons que, la masse m_0 étant la plus petite possible et donc extrêmement petite, chaque particule de masse m_i soit un regroupement de particules de masse m_0, par $m_i = n_i m_0$ où n_i, le nombre de particules du groupe i, est un entier en général très grand, i étant compris entre 1 et p, le nombre de groupes. A partir de $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$ particules de masse m_0, il est ainsi possible de former p particules de masses m_1, m_2, ...m_p. Considérons un tel groupe de n particules localisées à $\vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$, ... $\vec{r}_n(x_n, y_n, z_n)$, sous-entendu que n peut prendre la valeur n_1, ... n_p, selon le groupe que l' on considère, et remplaçons ces coordonnées par celles reliées au centre de gravité de groupe

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots \vec{r}_n}{n} \quad (X, Y, Z) \quad ;$$
$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (\xi_2, \eta_2, \varsigma_2) \quad ; \dots \quad ; \quad \vec{r}_n - \vec{r}_1 \quad (\xi_n, \eta_n, \varsigma_n) \qquad (21)$$

Remplaçant les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles, la partie du Laplacien associée à ces n particules s' écrit

$$\Delta_{3n} = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial X} + \frac{\partial^2}{\partial Y} + \frac{\partial^2}{\partial Z}\right) + 2\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_i} + \frac{\partial^2}{\partial \eta_i} + \frac{\partial^2}{\partial \varsigma_i}\right)$$
$$+ \sum_{i \neq j, 2}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{\partial^2}{\partial \eta_i \partial \eta_j} + \frac{\partial^2}{\partial \varsigma_i \partial \varsigma_j}\right) \qquad (22)$$

Définissons la nouvelle fonction d'onde à p particules à partir de celle à N particules

$$\psi(X_1,Y_1,Z_1,\xi_{12},\eta_{12},\zeta_{12},\xi_{1(n1)},\eta_{1(n1)},\zeta_{1(n1)},\ldots$$
$$X_p,Y_p,Z_p,\xi_{p2},\eta_{p2},\zeta_{p2},\xi_{p(np)},\eta_{p(np)},\zeta_{p(np)},t) \quad (23)$$

en intégrant sur les coordonnées relatives de tous les groupes,

$$\begin{aligned}
&\psi(X_1,Y_1,Z_1,\ldots X_p,Y_p,Z_p,t)= \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{12}\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{12}\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{12}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{1(n1)}\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{1(n1)}\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{1(n1)} \\
&\ldots \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{p2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{p2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{p2}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{p(np)}\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{p(np)}\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{p(np)} \\
&\psi(X_1,Y_1,Z_1,\xi_{12},\eta_{12},\zeta_{12},\xi_{1(n1)},\eta_{1(n1)},\zeta_{1(n1)},\ldots X_p,Y_p,Z_p, \\
&\xi_{p2},\eta_{p2},\zeta_{p2},\xi_{p(np)},\eta_{p(np)},\zeta_{p(np)},t)
\end{aligned} \quad (24)$$

Prenons l'intégrale de l'équation de Schrödinger complète sur les coordonnées relatives,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{12}\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{12}\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{12}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{1(n1)}\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{1(n1)}\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{1(n1)} \\
&\ldots \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{p2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{p2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{p2}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{p(np)}\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{p(np)}\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{p(np)} \qquad = 0 \quad (25) \\
&(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m_0}\sum_{i=1}^{np}\Delta_{3ni})\psi(X_1,Y_1,Z_1,\xi_{12},\eta_{12},\zeta_{12},\xi_{1(n1)},\eta_{1(n1)},\zeta_{1(n1)}, \\
&\ldots X_p,Y_p,Z_p,\xi_{p2},\eta_{p2},\zeta_{p2},\xi_{p(np)},\eta_{p(np)},\zeta_{p(np)},t)
\end{aligned}$$

L'intégrale des termes provenant du second terme du Laplacien (22) conduit à des termes du type

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{12} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{12} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{12} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{1(n1)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{1(n1)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{1(n1)}$$

$$. \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_i ..$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{p2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{p2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{p2} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{p(np)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{p(np)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{p(np)}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\psi(X_1, Y_1, Z_1, \xi_{12}, \eta_{12}, \zeta_{12}, \xi_{1(n1)}, \eta_{1(n1)}, \zeta_{1(n1)} .. \xi_i = +\infty .. \right. \tag{26}$$

$$X_p, Y_p, Z_p, \xi_{p2}, \eta_{p2}, \zeta_{p2}, \xi_{p(np)}, \eta_{p(np)}, \zeta_{p(np)}, t)$$

$$- \frac{\partial}{\partial \xi_i}\psi(X_1, Y_1, Z_1, \xi_{12}, \eta_{12}, \zeta_{12}, \xi_{1(n1)}, \eta_{1(n1)}, \zeta_{1(n1)} .. \xi_i = -\infty ..$$

$$\left. X_p, Y_p, Z_p, \xi_{p2}, \eta_{p2}, \zeta_{p2}, \xi_{p(np)}, \eta_{p(np)}, \zeta_{p(np)}, t)\right)$$

Ici, l'intégration est effectivement réalisée sur la coordonnée ξ_i, repérée dans l'expression (26) par le symbole $\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_i$ et par les valeurs de la dérivée partielle de la fonction d'onde complète par rapport à cette même variable exprimée aux bornes du domaine, $-\infty$ et $+\infty$. L'intégrale des termes provenant du troisième terme du Laplacien (22) conduit à des termes du type

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{12} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{12} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{12} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{1(n1)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{1(n1)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{1(n1)}$$

$$.\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_i . \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_j .$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{p2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{p2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{p2} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{p(np)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_{p(np)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_{p(np)}$$

$$(\psi(X_1, Y_1, Z_1, \xi_{12}, \eta_{12}, \zeta_{12}, \xi_{1(n1)}, \eta_{1(n1)}, \zeta_{1(n1)}, \tag{27}$$

$$.\xi_i = +\infty, .\xi_j = +\infty .. X_p, Y_p, Z_p, \xi_{p2}, \eta_{p2}, \zeta_{p2}, \xi_{p(np)}, \eta_{p(np)}, \zeta_{p(np)}, t)$$

$$-\psi(X_1, Y_1, Z_1, \xi_{12}, \eta_{12}, \zeta_{12}, \xi_{1(n1)}, \eta_{1(n1)}, \zeta_{1(n1)},$$

$$.\xi_i = -\infty, .\xi_j = -\infty .. X_p, Y_p, Z_p, \xi_{p2}, \eta_{p2}, \zeta_{p2}, \xi_{p(np)}, \eta_{p(np)}, \zeta_{p(np)}, t))$$

où l'intégration est réalisée ici sur les coordonnées ξ_i et ξ_j, repérée dans l'expression (27) par les symboles $\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_i$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_j$, et par les valeurs de la fonction d'onde complète par rapport à ces mêmes variables exprimées aux bornes du domaine, $-\infty$ et $+\infty$.

Revenons sur la notion de groupe de particules utilisée ci-dessus et les conséquences que celle-ci peut avoir sur les propriétés de la fonction d'onde (23). Le fait que plusieurs particules appartiennent au même groupe sous-entend que celles-ci doivent, au cours de leur mouvement, rester notablement regroupées, et que donc, leurs coordonnées relatives doivent rester finies.

Pour ce faire, on peut donc convenir que si une particule donnée s'éloigne trop des autres, le fluide porteur ne peut plus les mouvoir en devenant extrêmement raréfié au point que sa densité s'annule. En admettant qu'il en soit aussi de même de la dérivée de sa densité par rapport à la coordonnée relative de la particule considérée, la condition de séparation en groupes de particules implique que les valeurs de la fonction d'onde (23) ainsi que celles de ses dérivées partielles par rapport aux coordonnées relatives doivent s'annuler lorsque ces coordonnées deviennent infinies. Il en résulte que les termes du type (26) et (27) sont nuls et que l'équation (25) ne conserve que le premier terme du Laplacien (22). Elle se ramène alors à l'équation de Schrödinger à p particules de masses m_1, m_2, ...m_p dans l' espace de configuration à 3p dimensions des coordonnées des centres de gravité des p groupes, lorsque l' énergie potentielle est nulle.

La prise en compte de l' énergie potentielle dans l'équation doit alors se faire à partir de l'équation (9), celle-ci apparaissant comme une force extérieure agissant sur le fluide aux 3p dimensions dérivant du gradient d'une énergie potentielle $V(x_1, y_1, z_1, \ldots x_p, y_p, z_p, t)$.

6 Equivalence entre fluide et champ quantique ?

En vertu du théorème de Stokes, la circulation de la vitesse d'un fluide ordinaire sur un contour fermé donné s' écrit

$$\oint \vec{v}.\vec{dl} = \iint (\mathrm{rot}\,\vec{v}).\vec{n}\, dS \qquad (28)$$

l'intégrale de droite étant étendue à la surface embrassée par le contour considéré. Pour un écoulement potentiel, donc de rotationnel nul dans le domaine du fluide, la circulation ne sera nulle que si toute la surface baigne dans le fluide considéré, ce qui n'est le cas que si ce domaine est simplement connexe [10]. Une remarque similaire est à faire lorsque la particule se meut dans un champ électromagnétique de potentiel vecteur non nul, où dans ce cas l'équation (5) doit être modifiée, dans le cas d'une seule particule à

$$m\vec{v} = \vec{\nabla}S - q\vec{A} \qquad (29)$$

Le champ qui dérive d'un potentiel n'est alors pas le champ de vitesse du fluide qui est lui même rotationnel, mais le champ $m\vec{v} + q\vec{A}$ qui, pour la même raison que précédemment, n'est de circulation nulle que si le domaine du fluide est simplement connexe. Le fluide n'est donc équivalent au champ quantique de Bohm que dans un domaine simplement connexe. Cette condition n'est par exemple pas vérifiée dans la configuration de Aharonov et Bohm, où le domaine du fluide est coupé par un solénoïde produisant un champ magnétique nul, donc de potentiel vecteur potentiel à l' extérieur. On se retrouve alors dans une situation paradoxale où le potentiel vecteur génère un déphasage du champ quantique à l'origine d'une déviation observée des particules, alors que le champ électromagnétique, s'exerçant sur le fluide associé est de force nulle. On peut résoudre ce paradoxe en imposant la condition supplémentaire sur le fluide [12]

$$\oint \vec{\nabla}S.\vec{dl} = \oint (m\vec{v} + q\vec{A}).\vec{dl} = 2\pi n\hbar \qquad (30)$$

se généralisant à un fluide dans l' espace de configuration par

$$\oint \vec{\nabla}_i S.\vec{dl}_i = \oint (m_i \vec{v}_i + q_i \vec{A}(\vec{r}_i)).\vec{dl}_i = 2\pi n\hbar \quad (31)$$

pour chaque particule i.

7 Conclusion

Le résultat important démontré ici, est qu'un fluide compressible sans viscosité ni pression dans un espace de configuration à 3n dimensions, satisfait l'équation de Schrödinger dès lors que l'écoulement est supposé potentiel. Densité du fluide et potentiel se regroupent pour former une fonction d'onde complexe, bon candidat pour le champ quantique déterministe de Bohm lorsque l'espace est simplement connexe. Les relations pouvant exister entre le fluide et les propriétés statistiques sur les particules que l'on peut en déduire, sont donc les mêmes qu'entre le champ quantique de Bohm et ces mêmes propriétés statistiques [5]. En particulier la proportionnalité de l'onde statistique et du champ quantique, que l'on peut démontrer dans le cas d'un mélange et d'une complexité suffisante des trajectoires, d'autant mieux réalisée que le nombre des particules est grand, et la théorie de la mesure, qui résulte de façon importante de la propriété de factorisation des fonctions d' onde de systèmes indépendants, contenue dans la structure de l' équation de Schrödinger à plusieurs particules [3],[5].

Références

[1] Schrödinger E.,Sur les rapports qui existent entre la mécanique quantique de Heisenberg-Born-Jordan et la mienne, Annalen der Physik (4), 79, (1926) Réimpression autorisée par les Presses Universitaires de France publiée par la librairie Alcan en 1933 dans Mémoires sur la Mécanique Ondulatoire, Editions Jacques Gabay 71-99.

[2] De Broglie L., La mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules, Gauthier-Villars (1950).

[3] Landau L. et Lifchitz E., Mécanique Quantique (Editions Mir Moscou) (1967).

[4] Bohm D., A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables, I and II, Physical Review, 85, 166-193 (1952).

[5] Bohm D. and Hiley B.J., The undivided universe (Routledge) (1993).

[6] Einstein A., Podolsky B. and Rosen N., Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete, Physical Review, 47, 777-80, (1935).

[7] De Broglie L., La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement, Journal de Physique, série IV, t.VIII, n°5, 1927, 225-241, (1927).

[8] De Broglie L., Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire (La théorie de la double solution) Gauthier-Villars, Paris (1956).

[9] Madelung E., Quantentheorie in hydrodynamischer form, Zts.f.Phys.40, 322-326, (1926).

[10] Landau L. et Lifchitz E., Mécanique des Fluides (Editions Mir Moscou) (1971).

[11] Pelcé P., Another derivation of the Schrödinger equation, Eur.J.Phys.17, 116-117, (1996).

[12] Philippidis C., Bohm D., Kaye R.D., The Aharonov-Bohm effect and the quantum potential, Il Nuovo Cimento, 71B,n°1, 75-88, (1982).

(Manuscrit reçu le14 février 2013 révisé le 2 juillet 2013.)