

## Le fluide de Madelung relativiste accéléré par un champ uniforme

PIERRE PELCÉ

Institut de Recherches sur les Phénomènes Hors Equilibre,  
49 rue Joliot-Curie, BP146, 13013 Marseille, France

**RÉSUMÉ.** Nous déterminons les équations de la dynamique du fluide de Madelung relativiste et étudions le mouvement accéléré dans un champ uniforme. Cette dynamique est comparée à celle de l'équation de Klein-Gordon. L'avantage du premier fluide est de conserver une densité positive ce que ne peut pas en général le second. Par contre le premier fluide ne préserve la fonction d'onde que jusqu'à l'ordre  $(v/c)^2$ , le second la préservant toujours, par les hypothèses de détermination de l'équation. En admettant que le fluide porte parfaitement la particule, le résultat est que dans les deux cas la vitesse de la particule croît avec la coordonnée spatiale tout en oscillant. Comme pour une particule portée par le champ quantique satisfaisant l'équation de Schrödinger en champ uniforme. Aux grandes distances, la vitesse du fluide de Madelung relativiste sature à la vitesse de la lumière alors que celle de Klein-Gordon peut la dépasser, montrant une fois de plus l'incapacité de cette équation à décrire la dynamique d'une seule particule. Ces dynamiques pourraient être comparées à des résultats d'expériences sur des particules de spin 0 comme les mésons, les particules  $\alpha$  et pourquoi pas de bosons de Higgs, si la trajectoire rectiligne n'est pas trop perturbée par l'émission des photons de rayonnement.

*ABSTRACT.* We determine the equations for the dynamics of the relativistic Madelung fluid and study the accelerated motion in a uniform field. This dynamic is compared to the Klein-Gordon equation. The advantage of the first fluid is to conserve a positive density, which is in general not possible for the second. However the first fluid protects the wave function only up to the order  $(v/c)^2$ , the second always, from the hypotheses of derivation of the equation. If one assumes that the fluid perfectly carries the particle, the result is that in the two cases, the particle velocity increases and oscillates with the spatial coordinate. As for a particle carried by a quantum field which satisfies the Schrödinger equation in a uniform field. At large distances, the

*velocity of the relativistic Madelung fluid saturates at the light velocity whereas the one of Klein-Gordon can exceed it, showing once more the inability of this second equation to describe the dynamics of one single particle. These dynamics could be compared to experimental results on zero spin particles like mesons,  $\alpha$  particles, and why not Higgs bosons, if the straight trajectory is not too much perturbed by radiating photons.*

## 1 Introduction.

Une hypothèse fondamentale de l'élaboration de la mécanique quantique relativiste est que la fonction d'onde à une particule introduite en mécanique quantique non relativiste est préservée en mécanique quantique relativiste [1]. Cette hypothèse conduit à des difficultés. L'équation d'onde à une particule de spin 0, L'équation de Klein-Gordon a une quantité conservée qui ne reste pas nécessairement positive et ne peut donc être utilisée pour définir une densité de probabilité [1]. Une équation d'onde à densité positive peut être

déterminée pour l'électron, de spin  $\frac{1}{2}$ , l'équation de Dirac, mais la fonction d'onde doit avoir quatre composantes nombres complexes [2]. L'équation de la dynamique d'une particule de spin 0 reste donc à déterminer, cette difficulté étant peut être associée à l'observation qu'il n'existe qu'une seule particule élémentaire de spin 0, le boson de Higgs récemment découvert [3]. Les autres particules de spin 0 sont des particules composées de particules de spin  $\frac{1}{2}$ , comme les mésons, composés d'un quark et d'un antiquark, ou la particules  $\alpha$  (l'ion  $\text{He}^{2+}$ ), composée de deux protons et deux neutrons.

Considéré d'une certaine façon, le fait qu'une particule non relativiste puisse être décrite par une fonction d'onde nombre complexe avec une amplitude et une phase, résulte d'une circonstance tout à fait exceptionnelle.

L'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde  $\Psi = \sqrt{\rho} \exp i\varphi$  décrit aussi la dynamique d'un fluide compressible sans viscosité ni pression, le fluide de Madelung, de densité  $\rho$  et de potentiel  $\varphi$  [4]. Cette circonstance exceptionnelle tient au fait que si de façon plus générale, on considère un fluide compressible sans viscosité ni pression de densité  $\rho$  et de champ de vitesse  $\vec{v}$ , sa dynamique est en général non linéaire. Mais si l'on impose au champ de vitesse de dériver d'un potentiel  $\varphi$ , les variables du fluide se

regroupent en la seule fonction d'onde  $\Psi = \sqrt{\rho} \exp(i\phi)$  nombre complexe qui satisfait l'équation de Schrödinger linéaire [5].

La dynamique de ce fluide peut être étendue dans le domaine relativiste comme tout fluide [6], ce regroupement de variables en une fonction d'onde ne pouvant être préservé que jusqu'à l'ordre  $(\frac{v}{c})^2$  [7].

L'étude du mouvement d'une particule passe donc par la détermination de la densité  $n$  et du champ de vitesse, quadrivecteur relativiste de ce fluide, le mouvement de la particule suivant le fluide comme dans la double solution de De Broglie [1] et Bohm [8],[9]. Nous résolvons le cas particulier d'un mouvement unidimensionnel accéléré par un champ uniforme et montrons que la vitesse du champ s'accroît et oscille avec la coordonnée spatiale comme c'est le cas pour l'équation de Schrödinger en champ uniforme [10]. A grande distance, la vitesse du champ sature à la vitesse de la lumière, comme dans le cas relativiste classique, l'oscillation résultant du potentiel quantique subsistant néanmoins. La résolution du même problème mais avec l'équation de Klein-Gordon conduit à un résultat analogue à l'importante différence près que la vitesse peut excéder la vitesse de la lumière aux grandes distance, montrant une fois de plus les difficultés d'interprétation de cette équation [1] dès lors que l'on veut l'associer à la dynamique d'une seule particule.

**2 Le fluide de Madelung [4].**

Le mouvement d'une particule est décrit par l'évolution d'une fonction d'onde

$$\Psi = a \exp\left(i\frac{S}{\hbar}\right) \tag{1}$$

qui dans le domaine non relativiste satisfait l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi \tag{2}$$

Séparant les parties imaginaire et réelle de l'équation de Schrödinger, nous obtenons deux équations pour les variables  $a$  et  $S$  [12],

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{1}{2m} (2\vec{\nabla}a \cdot \vec{\nabla}S + a\Delta S) = 0 \quad (3)$$

et

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\vec{\nabla}S)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta a}{a} = 0 \quad (4)$$

On reconnaît dans l'éqn.(4) une équation de Hamilton-Jacobi dans laquelle apparaît un nouveau potentiel, le potentiel quantique

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta a}{a} \quad (5)$$

L'éqn. (3) multipliée par  $a$  permet d'obtenir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (6)$$

que l'on interprète comme une équation de conservation de la densité  $\rho = a^2$  dès lors que la particule a la vitesse

$$\vec{v} = \frac{1}{m} \vec{\nabla}S \quad (7)$$

Si l'on prend le gradient de l'éqn.(4), obtient l'équation d'hydrodynamique

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = \vec{f} \quad (8)$$

où la force appliquée sur le fluide  $\vec{f}$  dérive d'un potentiel, somme du potentiel habituel  $V$  et du potentiel quantique  $Q$ ,

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}(V+Q) \quad ; \quad Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \tag{9}$$

Multipliant l'éqn.(6) par  $\vec{v}$  et l'éqn.(8) par  $\rho$ , nous obtenons par addition, l'évolution de la quantité de mouvement du fluide comme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial \Pi_i^k}{\partial x^k} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x^i} \tag{10}$$

où

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \Pi'_{ik} \tag{11}$$

est le tenseur densité de flux d'impulsion, somme du terme cinétique et d'un terme qui ne dépend que de la densité et de ses dérivées

$$\Pi'_{ik} = -\frac{\hbar^2}{4m} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^k} \right) \tag{12}$$

### 3 Le tenseur quantique.

Introduisons le tenseur quantique

$$Q_{ik} = \frac{\partial^2 n}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x^i} \frac{\partial n}{\partial x^k} \tag{13}$$

où  $n$  est la densité dans le référentiel de repos de l'élément de volume de fluide donné,  $x^i = (ct, \vec{x})$  et  $x_i = (ct, -\vec{x})$ . Alors,

$$Q_i^k = \frac{\partial^2 n}{\partial x^i \partial x_k} - \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x^i} \frac{\partial n}{\partial x_k} \quad (14)$$

et

$$\frac{\partial Q_i^k}{\partial x^k} = \frac{\partial^3 n}{\partial x^i \partial x_k \partial x^k} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial n}{\partial x^k} \frac{\partial n}{\partial x^i} \frac{\partial n}{\partial x_k} - \frac{1}{n} \frac{\partial^2 n}{\partial x^i \partial x_k} \frac{\partial n}{\partial x_k} - \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x^i} \frac{\partial^2 n}{\partial x_k \partial x^k} \quad (15)$$

si bien que

$$\frac{\partial Q_i^k}{\partial x^k} = 2n \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\square \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right) \quad (16)$$

$$\text{où } \square = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x^k} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

La force quantique relativiste est un vecteur contravariant

$$g^i = \left( \frac{\vec{f} \cdot \vec{v}}{c^2 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, \frac{\vec{f}}{c \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \right) \quad (17)$$

et doit être proportionnel à la dérivée du tenseur quantique

$$g^i = C g^{il} \frac{1}{n} \frac{\partial Q_l^k}{\partial x^k} \quad (18)$$

On détermine la constante  $C$  en prenant la limite non relativiste

$$\frac{\vec{f}}{c} = 2C\vec{\nabla} \left( \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right) \tag{19}$$

soit  $C = \frac{\hbar^2}{4mc}$  pour retrouver la force

$$\vec{f} = -\vec{Q} \quad ; \quad Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \tag{20}$$

dérivant du potentiel quantique non relativiste Q.

#### 4 Le fluide de Madelung relativiste.

La dynamique de ce fluide contient, comme celle de tout fluide relativiste non dissipatif sans pression [6], six variables, deux scalaires et quatre composantes d'un quadrivecteur. La densité du fluide n dans le référentiel de repos de l'élément de volume de fluide donné, qui est positive, ainsi que la densité propre de l'énergie interne du fluide e dans le même référentiel, cette dernière quantité contenant également l'énergie de repos  $nmc^2$  de la particule associée au fluide, où m est la masse de repos. Les quatre composantes du quadrivitesse

$$u^i = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) \tag{21}$$

où  $\vec{v}$  est le vecteur vitesse tridimensionnel, satisfont la condition de normalisation  $u^i u_i = 1$ . L'équation de conservation de la densité du fluide s'exprime à l'aide du quadrivecteur densité de courant de particules  $j^i = nu^i$ ,

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \quad (22)$$

La loi de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement du fluide s'exprime à l'aide du tenseur d'énergie impulsion  $T_{ik}$ , qui doit être étendu dans le domaine relativiste à partir du tenseur  $\Pi_{ik}$  défini par les équations (11) et (12),

$$T_{ik} = e u_i u_k + T'_{ik} \quad (23)$$

avec

$$T'_{ik} = -\frac{\hbar^2}{4m} Q_{ik} \quad (24)$$

$Q_{ik}$  étant défini par l'éqn. (13). Pour retrouver l'expression non relativiste de ce tenseur, on fera la substitution  $n \rightarrow \rho \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx \rho - \frac{\rho v^2}{2c^2}$  si bien que  $n \approx \rho$  et  $e \approx mpc^2$ .

Ce tenseur étant défini, les équations du mouvement dans un champ électromagnétique extérieur sont

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = F_{ik} q_j^{\cdot k} \quad (25)$$

où  $F_{ik}$  est le tenseur du champ électromagnétique.

## 5 Equation du mouvement de la particule.

La dynamique du fluide relativiste décrite dans le paragraphe précédent peut être utilisée pour l'interprétation causale du mouvement d'une particule comme celle proposée par Bohm [8],[9] :

1. La particule est ponctuelle, de coordonnées bien définies  $x^i(t)$ , qui varient continuellement, et sont déterminées de façon causale.



2. La particule est portée par le fluide relativiste sans viscosité ni pression étudié ici, de densité  $n$ , d'énergie interne  $e$ , et de quadrivitesse  $u^i$ .

3. La particule a l'équation du mouvement  $w^i = u^i$ , où  $w^i = \frac{dx^i}{ds}$  est le quadrivitesse de la particule, correspondant à un contact parfait entre le fluide et la particule.

4. Dans un ensemble statistique de particules se déplaçant sur le même fluide relativiste, la densité de probabilité de mesurer la particule est

$$p = \frac{n}{\sqrt{1-(v/c)^2}} .$$

On retrouve ainsi, dans le domaine non relativiste  $p = \rho$ ,  $\rho$

étant la densité du fluide de Madelung. Ce résultat suppose que les trajectoires du fluide sont suffisamment complexes et enchevêtrées pour que l'hypothèse d'ergodicité puisse s'appliquer, comme dans le cas non relativiste [9].

### 6 L'équation de Klein-Gordon [1],[2].

L'équation de Klein-Gordon se détermine en remplaçant dans l'équation de l'énergie relativiste

$$\left(\frac{H-qV}{c}\right)^2 = m^2 c^2 + (\vec{P}-q\vec{A})^2 \tag{26}$$

l'énergie  $H$  et l'impulsion généralisée  $\vec{P}$  par les opérateurs linéaires  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  et  $-i\hbar \vec{\nabla}$ . On obtient ainsi l'équation relativiste pour une particule sans spin à une seule fonction d'onde

$$\left(\left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{q}{c} V\right)^2 - (-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A})^2\right)\Psi = m^2 c^2 \Psi \tag{27}$$

que l'on peut développer en

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Delta \Psi + \frac{2i}{\hbar c^2} qV \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{2iq}{\hbar c} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \Psi + \frac{1}{\hbar^2} (m^2 c^2 - \frac{q^2}{c^2} (V^2 - A^2)) \Psi = 0 \quad (28)$$

Prenons l'équation complexe conjuguée de l'éqn. (28), multiplions la par  $\Psi$  et retranchons la de l'éqn.(28) multipliée par  $\Psi^*$ . En regroupant des termes de dérivée temporelle, les termes de dérivée spatiale et en utilisant l'équation de Lorentz pour les potentiels

$$\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div} \vec{A} = 0 \quad (29)$$

on obtient une équation de conservation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (30)$$

avec la densité

$$\rho = -\frac{i\hbar}{2mc^2} \left( \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \frac{q}{mc^2} \Psi \Psi^* V \quad (31)$$

et la densité de courant

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi \vec{\nabla} \Psi^* - \Psi^* \vec{\nabla} \Psi \right) - \frac{q}{mc} \Psi \Psi^* \vec{A} \quad (32)$$

Cependant, de par les dérivées temporelles de l'éqn. (31), la densité ne peut rester positive, comme elle l'est pour le fluide de Madelung relativiste, et ne peut donc être associée à une densité de probabilité d'une particule. Cette difficulté a pu être contournée en montrant que cette équation peut décrire la dynamique d'une particule et d'une anti-particule, une particule d'énergie négative remontant le temps décrivant le mouvement d'une anti-particule libre dans l'espace réel [12-13].

**7 Particule dans un champ uniforme.**

Examinons le mouvement unidimensionnel d'une particule dans un champ électrique uniforme selon l'axe Ox. Les composantes du quadri vecteur vitesse s'écrivent

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} ; u^1 = \frac{u}{c\sqrt{1-(u/c)^2}} ; u^2 = u^3 = 0 \tag{33}$$

où u est la vitesse du fluide. Le champ électrique est uniforme dirigé selon la direction Ox, si bien que,

$$E_x = \frac{F}{q} ; E_y = E_z = 0 ; \vec{B} = 0 \tag{34}$$

où F est choisi positif. Il en résulte que les composantes non nulles du tenseur électromagnétique sont

$$F_{01} = \frac{F}{q} ; F_{10} = -\frac{F}{q} \tag{35}$$

Le champ électrique étant uniforme, n et u seront indépendant du temps. L'équation de conservation de la densité du fluide s'écrit alors

$$\frac{nu}{c\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} = J_0 \tag{36}$$

où J<sub>0</sub> est une constante d'intégration que l'on peut nommer la densité de flux de particules. Les composantes non nulles du tenseur d'énergie-impulsion sont

$$T_0^1 = eu_0u^1 ; T_1^1 = eu_1u^1 + T_1^1 \tag{37}$$

L'équation (25) écrite pour  $i = 0$  s'écrit

$$\frac{dT_0^1}{dx} = F_{01} J^1 \tag{38}$$

que l'on peut encore écrire, en utilisant l'éqn.(36),

$$\frac{d}{dx} \left( e^{\frac{u}{c}} \frac{1}{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} \right) = F J_0 \tag{39}$$

On en déduit,

$$e^{\frac{u}{c}} \frac{1}{1 - (u/c)^2} = F J_0 x + C_0 \tag{40}$$

qui traduit un mouvement limité pour les  $x$  négatifs et illimité pour les  $x$  positifs puisque le membre de gauche de l'éqn.(40) doit rester positif. Aux petites distances, le mouvement est non relativiste,  $u \ll c$  et  $e \approx nmc^2$ . Il

résulte des éqns.(36) et (40) que  $C_0 \approx nmc^2 \frac{u}{c} \approx mc^2 J_0$ . L'éqn.(25) écrite pour  $i = 1$  s'écrit

$$\frac{dT_1^1}{dx} = F_{10} J^0 \tag{41}$$

que l'on peut encore écrire, en utilisant l'éqn.(16),

$$\frac{d}{dx} \left( -e \left(\frac{u}{c}\right)^2 \frac{1}{1 - (u/c)^2} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} n \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2(\sqrt{n}) / dx^2}{\sqrt{n}} \right) = -F n u^0 \tag{42}$$

et en déduire, en utilisant les équations (36) et (40), l'équation importante de l'article

$$\frac{u}{c} \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{c} (Fx + mc^2) \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2(\sqrt{n}) / dx^2}{\sqrt{n}} \right) = F \quad (43)$$

Le même problème avec l'équation de Klein-Gordon se pose en écrivant l'éqn.(28) pour une fonction d'onde stationnaire à une dimension d'espace proportionnelle à  $\exp-i \frac{Wt}{\hbar}$ ,

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} ((W + Fx)^2 - m^2 c^4) \Psi = 0 \quad (44)$$

où  $W = E + mc^2$  est l'énergie de l'état stationnaire, énergie de repos incluse, et où l'on a remplacé  $qV$  par  $-Fx$ . Avec une telle solution, on détermine à partir des éqns.(31) et (32)

$$\rho = \frac{W + Fx}{mc^2} \Psi \Psi^* \quad (45)$$

et

$$j = \rho u = \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi \frac{d\Psi^*}{dx} - \Psi^* \frac{d\Psi}{dx} \right) \quad (46)$$

si bien que

$$u(x) = i \frac{\hbar c^2}{2(W + Fx)} \frac{\left( \Psi \frac{d\Psi^*}{dx} - \Psi^* \frac{d\Psi}{dx} \right)}{\Psi \Psi^*} \quad (47)$$

### 8 Limite classique.

Lorsque  $\hbar = 0$  dans l'éqn.(43), celle-ci devient

$$\frac{u}{c} \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{c} (Fx + mc^2) \right) = F \quad (48)$$

que l'on peut transformer en posant  $y = \left( \frac{u}{c} \right)^2$  en

$$\frac{1}{2} \frac{dy}{dx} (Fx + mc^2) + (y-1)F = 0 \quad (49)$$

qui s'intègre pour donner

$$y = 1 - \frac{m^2 c^4}{(Fx + mc^2)^2} \quad (50)$$

et donc, le mouvement relativiste classique

$$\frac{u}{c} = \frac{\sqrt{\left( \frac{\gamma}{c^2} x + 1 \right)^2 - 1}}{\frac{\gamma}{c^2} x + 1} \quad (51)$$

où  $\gamma = F/m$  est l'accélération uniforme du mouvement.

Le même problème avec l'équation de Klein-Gordon se pose en écrivant que la fonction d'onde stationnaire est de la forme,

$$\Psi(x,t) = \exp -i \frac{Wt}{\hbar} \exp i \frac{S}{\hbar} \quad (52)$$

avec  $W \approx mc^2$ . Insérée dans l'éqn.(28), elle permet d'obtenir

$$\frac{1}{c^2}(mc^2 + Fx)^2 - \left(\frac{dS}{dx}\right)^2 = m^2 c^2 \tag{53}$$

La vitesse  $u$  du mouvement s'obtient à partir des éqns.(47) et (52) ,

$$u = - \frac{c^2 \frac{dS}{dx}}{mc^2 + Fx} \tag{54}$$

Exprimant  $u$  dans l'éqn.(53) à l'aide de l'éqn.(54), on retrouve l'éqn.(51).

**9 Limite non relativiste.**

Aux petites distances, le mouvement est non relativiste, et on peut négliger, dans l'éqn.(43),  $(u/c)^2$  devant 1 et approximer  $n$  à  $\rho$  comme au §4, négliger  $Fx$  devant  $mc^2$ , qui est le même ordre d'approximation en  $(u/c)^2$  si l'on note que  $Fx$  est d'ordre  $\frac{u^2}{2m}$ . L'éqn.(43) devient alors

$$\frac{1}{2} mc^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{c}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2(\sqrt{\rho}) / dx^2}{\sqrt{\rho}}\right) = F \tag{55}$$

En introduisant alors  $a$  et  $S$  comme  $\rho = a^2$  et  $u = \frac{1}{m} \frac{dS}{dx}$ , les éqns. (36) et (55) deviennent

$$a^2 \frac{dS}{dx} = J_0 c \quad (56)$$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dS}{dx} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m a} \frac{1}{dx^2} = Fx + E$$

qui sont les équations que l'on obtient en séparant les parties réelle et imaginaire de l'équation de Schrödinger dans un champ uniforme

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E + Fx)\Psi = 0 \quad (57)$$

Cette même équation peut aussi s'obtenir comme limite non relativiste de l'équation de Klein-Gordon stationnaire (44) en posant  $W = E + mc^2$  avec

$E \ll mc^2$  puisque alors  $(W + Fx)^2 - m^2 c^4 \approx 2mc^2(E + Fx)$ .

L'éqn.(57) se résoud de façon analytique en introduisant la nouvelle

coordonnée sans dimension  $\xi = (x + \frac{E}{F}) \left( \frac{2mF}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}}$  pour obtenir

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \xi\Psi = 0 \quad (58)$$

Cette équation différentielle du second ordre dite équation de Airy admet deux solutions indépendantes  $A_i(x)$  et  $B_i(x)$  [10] qui oscillent de façon analogue pour les  $x$  négatifs,

$$A_i(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-\xi)^{\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}(-\xi)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \xi \rightarrow -\infty$$

$$B_i(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-\xi)^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{2}{3}(-\xi)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \xi \rightarrow -\infty \quad (59)$$

Pour les grandes valeurs positives de  $x$ ,  $A_i(x)$  et  $B_i(x)$  respectivement décroît et croît exponentiellement comme



$$\begin{aligned}
 A_i(\xi) &\approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\xi)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{2}{3}(\xi)^{\frac{3}{2}}\right) \quad \xi \rightarrow +\infty \\
 B_i(\xi) &\approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\xi)^{\frac{1}{4}}\exp\left(\frac{2}{3}(\xi)^{\frac{3}{2}}\right) \quad \xi \rightarrow +\infty
 \end{aligned}
 \tag{60}$$

De façon très intéressante, les interprétations de Copenhague et hydrodynamique diffèrent dans les solutions de l'éqn.(58) qu'il faut considérer. Dans la première interprétation la fonction d'onde est une densité de probabilité et doit donc être normée à l'unité. La seule solution admissible est donc

$$\Psi(\xi) = A\sqrt{\pi}A_i(-\xi)
 \tag{61}$$

dont le facteur de normalisation A est déterminé en égalant le courant de probabilité de chaque onde qui la compose à  $\frac{1}{2\pi\hbar}$  [11].

Dans l'interprétation hydrodynamique, la fonction d'onde est le champ  $\Psi$  qui guide la particule, qui n'a donc pas la contrainte d'être borné aux grandes valeurs de x. La trajectoire rectiligne considérée ici est simple, et l'hypothèse d'ergodicité, indispensable pour assurer l'égalité du champ  $\Psi$  et de la densité de probabilité n'est certainement pas satisfaite. Pour réaliser un mouvement unidimensionnel des x négatifs aux x positifs, il convient de ne prendre que l'onde du mouvement dans le sens positif, c'est-à-dire

$$\Psi(\xi) = A\sqrt{\pi}(B_i(-\xi) + iA_i(-\xi))
 \tag{62}$$

dont le coefficient A est déterminé par la condition de vitesse initiale, par exemple à  $x = 0$ . Aux grandes valeurs de x, le champ  $\Psi$  se comporte donc, d'après l'éqn.(59), comme

$$\Psi(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\xi)^{\frac{1}{4}}\exp\left(\frac{2i}{3}\xi^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)
 \tag{63}$$

de vitesse proportionnelle à  $\sqrt{\xi}$ , comme on peut la déterminer par la dérivée de la phase du champ.

### 10 Résolution numérique de $u(x)$ dans un champ uniforme.

Nous résolvons ici de façon numérique avec MATLAB les équations (43) et (44) par la méthode de Runge-Kutta [14] en posant  $m = \hbar = c = 1$  et en les transformant en systèmes d'équations du premier ordre, pour l'éqn.(46),

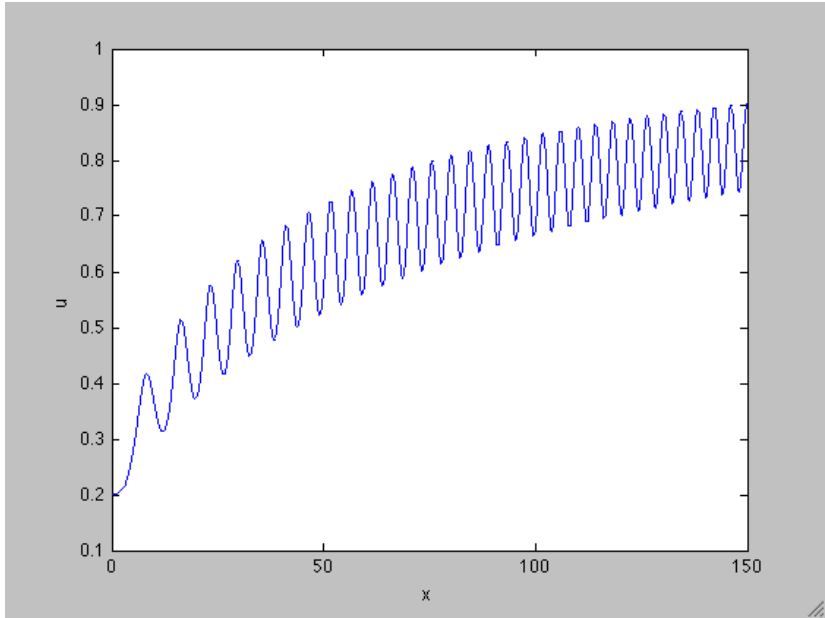
$$\begin{aligned} \frac{da}{dx} &= p \\ \frac{dp}{dx} &= -aQ \\ \frac{dQ}{dx} &= F\sqrt{1-u^2} - \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}(Fx+1) \frac{du}{dx} \end{aligned} \quad (64)$$

où d'après l'éqn.(36),  $\frac{a^2 u}{\sqrt{1-u^2}} = C_0$ .

Pour l'éqn.(44)

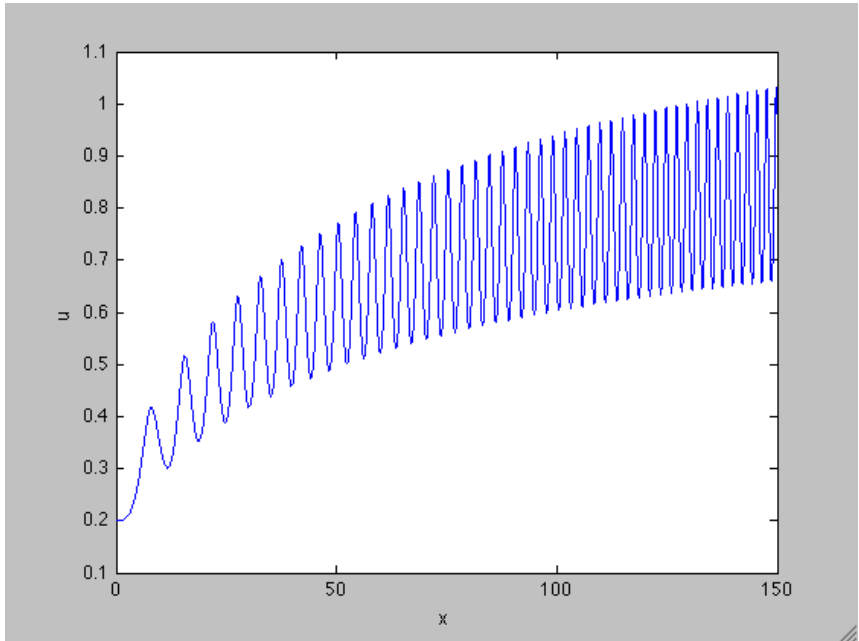
$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dx} &= \Psi_1 \\ \frac{d\Psi_1}{dx} &= -((1+E+Fx)^2 - 1)\Psi \end{aligned} \quad (65)$$

Nous intégrons un mouvement dans un champ uniforme  $F=0.005$  à vitesse initiale  $u = 0.2$  à  $x = 0$ . D'après le §9, les deux problèmes coïncident à basse vitesse puisque associés à l'équation de Schrödinger avec une énergie stationnaire  $E = 0.02$  si  $a(0)=1$ ,  $p(0)=0$ ,  $Q(0)=0$ . On a alors  $C_0=0.204124$ . Les conditions initiales pour l'équation de Klein-Gordon doivent être alors  $\Psi(0)=1$ ,  $\Psi_1(0)=0.204i$  en utilisant l'éqn.(47).



**Fig.1** : Vitesse  $u$  adimensionnée à la vitesse de la lumière fonction de  $x$  par l'équation du fluide de Madelung relativiste en champ uniforme. Vitesse initiale  $u(0)=0.2$ , Champ uniforme  $F=0.005$ . La vitesse de la particule sature à la vitesse de la lumière aux grandes valeurs de  $x$ .

Les deux vitesses respectivement représentées sur les figures 1 et 2 sont comparables, croissantes avec  $x$  et oscillantes, semblables à l'éqn.(63) à distance pas trop grande. Aux grandes distances, les effets relativistes se manifestent fortement, la vitesse saturant à la vitesse de la lumière pour le fluide de Madelung relativiste, dépassant la vitesse de la lumière pour l'équation de Klein-Gordon. Ce comportement est un exemple de plus pour l'inapplicabilité de l'équation de Klein-Gordon à décrire une dynamique à une particule.



**Fig.2** : Vitesse  $u$  adimensionnée à la vitesse de la lumière fonction de  $x$  par l'équation de Klein-Gordon en champ uniforme. Vitesse initiale  $u(0)=0.2$ ; Champ uniforme  $F=0.005$ . A partir de  $x \approx 130$ , la vitesse de la particule dépasse la vitesse de la lumière.

## 11 Une expérience paradoxale ?

Nous avons étudié le mouvement d'une particule relativiste de spin 0 dans un champ uniforme en supposant que celle-ci est transportée par le fluide de Madelung relativiste dont nous établissons ici les équations de la dynamique. Par construction, la densité du fluide est ici toujours positive, contrairement à l'équation relativiste de Klein-Gordon associée elle aussi à un fluide, mais de densité qui ne le reste pas toujours. Cependant, cette dernière équation préserve la fonction d'onde de la particule dans tout le domaine relativiste alors que le fluide de Madelung relativiste ne la préserve que jusqu'à l'ordre  $(v/c)^2$ . Mais, dans le cadre de cette interprétation hydrodynamique, seul le résultat obtenu avec le fluide de Madelung relativiste est acceptable, puisque

conduisant à une vitesse du mouvement toujours inférieure à la vitesse de la lumière.

Cette étude suggère qu'il est possible de déterminer le mouvement rectiligne uniformément accéléré d'une particule de spin 0 de façon certaine dès lors que son mouvement n'est pas perturbé par l'émission des photons de rayonnement.

Son application concerne rigoureusement toute particule élémentaire chargée de spin 0. Donc pas directement les mésons où la particule  $\alpha$ , qui sont composées de particules de spin 1/2 mais pourquoi pas un boson de Higgs si sa durée de vie est suffisante. Remarquons cependant que cette particule est décrite par un champ complexe, comme une fonction d'onde, mais où sont importants non pas l'amplitude et la phase, mais les parties réelle et imaginaire qui sont deux champs scalaires [15], dont la structure est essentielle pour le mécanisme de brisure de symétrie [16]. Il ne peut donc s'accorder avec le fluide de Madelung relativiste qui ne préserve la fonction d'onde que jusqu'à l'ordre  $(v/c)^2$ . Il peut être cependant intéressant de réaliser des expériences avec ces particules composées mentionnées ci-dessus, et de comparer leur mouvement avec le résultat pur spin 0 présenté dans cet article. Par exemple, les mésons ont une durée de vie très courte, de l'ordre de  $10^{-8}$  à  $10^{-19}$  s, et peuvent donc parcourir au plus une distance de 3m, à une vitesse proche de celle de la lumière.

## Références

- [1] De Broglie L., Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire (La théorie de la double solution) Gauthier-Villars, Paris (1956).
- [2] De Broglie L., L'électron magnétique, Hermann et Cie éditeurs (1934).
- [3] ATLAS collaboration, Observation of a new particle in the search for the standard model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC, Phys.Lett.B, 716, 1-29, (2012).
- [4] Madelung E., Quantentheorie in hydrodynamischer form, Zts.f.Phys.40, 322-326, (1926).
- [5] Pelcé P., Another derivation of the Schrödinger equation, Eur.J.Phys.17, 116-117, (1996).
- [6] Landau L. et Lifchitz E., Mécanique des fluides, Editions Mir Moscou (1971).

- [7] Pelcé P., Une autre équation relativiste pour une particule de spin 0, Cahier non soumis, ni publié (2009).
- [8] Bohm D., A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables, I and II, Physical Review, 85, 166-193 (1952).
- [9] Bohm D. and Hiley B.J., The undivided universe (Routledge) (1993).
- [10] Bender C.M. and Orszag S.A., Advanced mathematical methods for scientists and engineers, McGraw-Hill Inc (1978).
- [11] Landau L. et Lifchitz E., Mécanique quantique, Editions Mir Moscou (1967).
- [12] Béréstetski V., Lifchitz E. et Pitayevski L., Théorie Quantique Relativiste première partie, tome IV du cours de Physique Théorique de Landau et Lifchitz (Editions Mir Moscou) (1972).
- [13] Weinberg S. The quantum field theory, Cambridge University Press (2007).
- [14] Grivet J.P., Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur, EDP Sciences (2009).
- [15] Itzykson C. and Zuber J.B., Quantum field theory, McGraw-Hill Inc. (1980).
- [16] Higgs P.W., Broken symmetries and the masses of Gauge Bosons, Phys.Rev.Lett. 13, 508-509 (1964).

*(Manuscrit reçu le 20 février 2014)*