

## Retour à l'onde de Louis de Broglie

CLAUDE DAVIAU

Fondation Louis de Broglie, 23 rue Marsoulan, 75012 Paris  
email : [claudedaviau@nordnet.fr](mailto:claudedaviau@nordnet.fr)

RÉSUMÉ. L'onde de de Broglie est une onde physique se propageant dans l'espace en fonction du temps. Elle a été remplacée, dans la théorie quantique par un opérateur qui n'est qu'un outil de calcul de probabilités. L'onde de de Broglie est cependant capable de rendre compte de la plupart des résultats expérimentaux obtenus dans les accélérateurs, rassemblés dans le modèle standard. Elle convient aussi pour les monopôles magnétiques, les invariances de jauge, les systèmes de particules. L'équation d'onde de Dirac pour l'électron se généralise en une équation d'onde pour l'ensemble (électron, neutrino, quarks u et d avec trois états de couleur chacun) des objets de la première génération. Elle est invariante de forme dans un groupe plus vaste que le groupe de la relativité, ce qui a de nombreuses conséquences. L'existence d'un formalisme lagrangien est cause mais aussi conséquence de l'équation d'onde. Celle-ci possède un terme de masse compatible avec l'invariance relativiste et les invariances de jauge électro-faibles et fortes. L'existence d'une densité de probabilité est la traduction de l'égalité entre masse gravitationnelle et masse d'inertie. Les invariances de jauge de la théorie quantique sont naturellement compatibles, grâce aux termes de masse, avec la relativité générale. Dans le cas de l'atome d'hydrogène il existe un ensemble de solutions chirales ressemblant étroitement à l'ensemble connu depuis 1928 : même nombre d'états, mêmes nombres quantiques, même niveaux d'énergie. En suivant l'idée de de Broglie du photon comme fusion de deux spineurs, on peut associer à chacun des quatre vecteurs d'espace-temps formant les potentiels de la jauge électro-faible quatre vecteurs dont les composantes font partie des densités tensorielles de l'onde spinorielle. L'équation d'onde du second ordre de l'électron fixe alors la valeur de l'angle de Weinberg-Salam à  $30^\circ$ . Cela signifie que les deux parties du groupe de jauge sont étroitement liées, la jauge chirale étant le produit de la jauge électrique par la jauge en  $W^3$ .

*ABSTRACT. The de Broglie's wave is a physical wave propagating along time in the physical space. It has been replaced, in quantum theory by an operator that was only a tool calculating probabilities. Nevertheless the de Broglie's wave is able to account for most of the experimental results obtained in particle accelerators and assembled in the standard model. It fits for magnetic monopoles, gauge invariances, particle systems. The Dirac wave equation for the electron is generalized as a wave equation for all objects of the first generation (electron, neutrino, quarks  $u$  and  $d$  with three states of color each). It is form invariant under a greater group than the relativistic group. This induces many consequences. The existence of a Lagrangian formalism is both cause and consequence of the wave equation. This equation has a mass term compatible both with relativistic invariance and with gauge invariances of electro-weak and strong interactions. The existence of a density of probability is a consequence of the equality between gravitational and inertial mass. The gauge invariances of the quantum theory are naturally compatible, by mass terms, with general relativity. Following the idea of L. de Broglie on the photon as made of two Dirac waves, the space-time vectors which are the potentials of the electro-weak gauge group are associated to four vectors whose components are tensorial densities of the spinor wave. The second-order wave equation of the electron fixes then the value of the Weinberg-Salam angle to  $30^\circ$ . This means that the two parts of the electro-weak group are strictly united, the chiral gauge being the product of the electric gauge by the  $W^3$  gauge.*

Louis de Broglie est arrivé à l'idée d'une onde associée au mouvement de toute particule matérielle à partir d'une double considération. Tout d'abord la physique de l'électromagnétisme devait nécessairement tenir compte de la relativité, à l'époque fort peu reconnue. La physique se devait aussi de réunir les deux domaines dans lesquels un principe de minimum donnait les lois d'évolution : l'optique, à partir du principe de Fermat, la mécanique, à partir du principe de Maupertuis. Dans sa thèse [1] Louis de Broglie a réuni ces deux principes autour d'une onde relativiste et similaire à une onde de lumière puisque réunissant les principes de Maupertuis et de Fermat. L'onde a été trouvée expérimentalement dans le cas de l'électron, elle provoque des effets d'interférence pour les électrons arrivant sur un cristal. Elle est utilisée quotidiennement dans les microscopes électroniques.

Deux ans plus tard E. Schrödinger obtint une équation d'onde pour l'onde de de Broglie [2] et simultanément on découvrait que l'électron était doté d'un spin avec un rapport gyromagnétique double de celui attendu pour une particule électriquement chargée en rotation. L'inconvénient de l'équation de Schrödinger est qu'elle n'est pas relativiste. Ses

avantages sont très nombreux, non seulement elle a permis de rendre compte des niveaux d'énergie de l'atome de Bohr, mais elle fonctionne pour tout système d'électrons. L'onde de Schrödinger, dans le cas d'un système, est une fonction du temps et de chaque coordonnée de chaque particule composant le système, à valeur dans le corps des nombres complexes. Le carré du module de l'onde doit être normalisé, l'intégrale d'espace doit être égale à 1. Cette règle s'applique, par exemple dans le calcul des solutions pour l'électron d'un atome d'hydrogène. Elle a pour conséquence que les différentes solutions sont orthogonales pour un produit scalaire qui est, non pas un produit scalaire euclidien à valeurs réelles, mais un produit scalaire hermitien à valeurs complexes, qui s'obtient par une intégrale à tout l'espace du carré du module de l'onde.

L'équation de Schrödinger dans le cas du potentiel électrique coulombien rend compte de l'existence des niveaux d'énergie, mais seulement en première approximation. D'une part elle ne donne pas la structure fine que Sommerfeld avait calculée à partir de la mécanique relativiste de l'électron, d'autre part elle ne donne pas le bon nombre des états quantiques. Pour le nombre quantique principal  $n$  elle prévoit  $n^2$  états, quand les spectres atomiques nécessitent  $2n^2$  états. On corrige cela, dans la physique simplifiée destinée aux chimistes en disant qu'il faut tenir compte du spin de l'électron qui multiplie par deux le nombre de possibilités.

De Broglie, qui était un relativiste convaincu, a immédiatement obtenu une équation relativiste à partir de l'équation de Schrödinger, c'est l'équation baptisée aujourd'hui équation de Klein-Gordon. Elle a de grands défauts, elle ne donne pas le bon nombre d'états ni les bons nombres quantiques dans le cas de l'atome d'hydrogène, elle ne permet pas de définir une probabilité utilisable, elle comporte des solutions à énergie négative qui provoqueraient des catastrophes si elles avaient la possibilité d'exister.

Pour obtenir le spin de l'électron, une première équation d'onde fut proposée par Pauli. Celle-ci utilise une onde qui est une fonction de l'espace et du temps à valeur dans  $\mathbb{C}^2$ . Elle nécessite l'utilisation de matrices complexes. Ces matrices complexes étaient bien connues à l'époque parce qu'elles avaient été introduites en physique par la mécanique des matrices d'Heisenberg, théorie antérieure à l'équation d'onde de Schrödinger mais que celle-ci permettait de retrouver. Appliquée à l'atome d'hydrogène l'équation de Pauli fournit des résultats meilleurs, mais ne donne toujours pas le bon nombre des états. Les matrices de Pauli auront néanmoins un très bel avenir, et d'abord elles vont servir à Dirac

pour obtenir son équation d'onde relativiste de l'électron.

Les équations d'onde de Schrödinger et de Pauli comportent une dérivée du premier ordre par rapport au temps et des dérivées d'ordre 2 par rapport aux coordonnées d'espace, alors que la relativité travaille dans l'espace-temps. Dirac essaya donc de donner aux coordonnées d'espace le même statut que la coordonnée de temps, il lui fallait une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Il comprit qu'il lui fallait plus de composantes que pour l'équation de Pauli, donc il considéra une onde qui était une fonction de l'espace-temps dans  $\mathbb{C}^4$  et obtint une équation d'onde [3] comportant des matrices complexes  $4 \times 4$  construites à partir des matrices de Pauli. C'est cette équation qui donne tous les bons résultats concernant l'électron, à savoir le spin  $1/2$ , le rapport gyromagnétique double, et surtout un ensemble de solutions, dans le cas de l'atome d'hydrogène, correspondant pleinement à ce qui était attendu pour expliquer les spectres atomiques.

Néanmoins c'est à partir de l'équation de Schrödinger que s'est constituée la théorie quantique. Même dans le cas du photon, objet essentiellement relativiste, la théorie aujourd'hui encore dominante suppose que l'onde suit une équation de Schrödinger et qu'elle est une fonction à valeur dans un espace d'opérateurs sur un espace vectoriel hermitien qu'on n'a pas à définir, fonction du temps et des coordonnées des différents objets décrits. On ne se préoccupe pas du fait que l'onde de Dirac ne se réduit pas à l'équation de Schrödinger, ni que les équations d'onde non relativistes ne donnent pas le bon nombre des états. Néanmoins la théorie prétend à l'universalité, et même dénie à tout autre modèle le statut de théorie scientifique, alors qu'elle utilise elle-même chaque fois que nécessaire l'équation de Dirac qui est en dehors des postulats pourtant considérés obligatoires.

Les trois équations d'onde précédentes ont en commun d'être invariantes de jauge électrique. Cela signifie que l'on peut ajouter à la phase de l'onde une quantité quelconque, à condition de faire varier en conséquence les termes de potentiel électrique, qui prennent en physique relativiste la forme d'un vecteur d'espace-temps. Cette invariance de jauge électrique a engendré une théorie de l'électromagnétisme dite théorie quantique des champs englobant à la fois l'électron et le photon.

Dans le même temps où se constituait cette théorie quantique des champs le domaine d'étude s'élargissait, avec la découverte du neutron, du muon, des antiparticules, et l'existence d'autres types d'interaction. On connaît aujourd'hui 4 types d'interaction entre objets physiques. La

gravitation fut la première interaction connue. Depuis qu'Einstein a relié le champ de gravitation à la structure même de notre espace-temps la gravitation reste à part, malgré une multitude de tentatives d'unification avec l'électromagnétisme ou la théorie quantique des champs. Outre la gravitation et l'électromagnétisme, deux autres domaines ont été reconnus et explorés à l'aide des invariances de jauge : les interactions faibles et les interactions fortes.

Les interactions faibles sont notamment responsables de la radioactivité  $\beta$  qui se traduit par exemple par la décomposition d'un neutron en proton plus électron, plus des particules très légères, neutrinos et antineutrinos. A la surprise générale, on s'est rendu compte que ces interactions ne respectaient pas la parité d'espace. Le neutrino ne comporte alors qu'une onde gauche tandis que l'antineutrino ne comporte qu'une onde droite. La physique a cherché à unifier électromagnétisme et interactions faibles, la synthèse a donné le groupe de jauge électrofaible  $U(1) \times SU(2)$  [4]. La multiplication des particules trouvées dans les grands accélérateurs a conduit à supposer ces particules composées de quelques objets moins nombreux, par exemple le neutron est pensé comme composé de trois quarks u, d, d et le proton de trois quarks u, u, d. Le groupe de jauge permettant d'expliquer les interactions fortes liant ces quarks est un groupe  $SU(3)$  dit de couleur, chaque quark existe en trois états r, g, b. Cette chromodynamique présente de grandes difficultés de calcul, parce que la constante de couplage n'est pas petite, donc la méthode d'approximations successives à la base des calculs de la théorie quantique des champs ne peut bien fonctionner qu'à très haute impulsion-énergie.

Un autre point important est qu'on a trouvé les leptons (électrons, neutrinos) et les quarks en trois exemplaires. La première découverte inattendue a été celle du muon, qui ressemble beaucoup à un électron tout en étant beaucoup plus lourd. L'ensemble des fermions découverts constitue aujourd'hui trois familles, appelées souvent générations, et il y a de bonnes raisons de penser qu'il n'y en pas d'autres.

## 1 Trois développements de l'équation de Dirac

Le premier développement est le moins connu, c'est la mécanique ondulatoire du photon de Louis de Broglie [5][6]. Après avoir étudié et fait étudier l'équation d'onde de l'électron [7] Louis de Broglie revint à l'onde du photon, premier exemple historique du dualisme onde-particule. Il proposa une équation d'onde pour un assemblage de deux ondes de Dirac.

Il obtint les équations de Maxwell de l'électromagnétisme, avec en plus un terme de masse. Ce terme de masse brise l'invariance de jauge, donc ce développement a été oublié. De Broglie a généralisé cette construction par "fusion" d'ondes de Dirac, pour obtenir le spin  $3/2$  et le graviton de spin 2. L'équation d'onde du graviton donne une approximation linéaire de la relativité générale [8].

Le second développement est une reconstruction par D. Hestenes [9][10] de l'équation de Dirac sous une forme mathématique différente. Il utilise l'algèbre de Clifford réelle de l'espace-temps, alors que l'algèbre des matrices de Dirac est une complexification de cette algèbre, complexification qu'avait aussi utilisée la théorie du photon de de Broglie. Ce second développement permet d'écrire l'équation d'onde de l'électron dans un cadre mathématique beaucoup plus proche de celui de la physique pré-quantique. Il permet aussi d'étudier de manière plus aisée les tenseurs que l'on peut construire à partir de l'onde de l'électron. On peut reprocher à ce second développement de ne pas avoir amené de nouveaux résultats physiques.

Le troisième développement est la théorie du monopôle magnétique de G. Lochak. Elle part de l'existence, dans l'onde de Dirac, de deux phases et non pas d'une seule. La phase "électrique" est bien connue puisque elle est commune aux équations de Dirac, Pauli et Schrödinger. Mais l'onde de Dirac comporte deux parties, une onde droite et une onde gauche. Ces deux parties tournent du même angle dans la jauge électrique, et peuvent tourner en sens inverse dans une deuxième invariance de jauge. Lochak a compris que cette seconde invariance de jauge correspond à un monopôle magnétique [11][12][13], c'est-à-dire à une particule qui, au lieu d'avoir une charge électrique, possède une charge magnétique. Comme le terme de masse de l'équation de Dirac relie l'onde droite à l'onde gauche, il est impossible que ces ondes tournent en sens inverse avec le terme de masse de l'équation linéaire. Lochak a obtenu la forme générale, non linéaire, du terme de masse compatible avec cette seconde jauge. Dans le cas où cette masse est nulle les deux parties, gauche et droite, de l'onde évoluent indépendamment l'une de l'autre, ce qui fait ressembler le monopôle magnétique à un neutrino. Les développements expérimentaux de la théorie sont prometteurs. [14][15][16][17][18]. Lochak a mis en évidence que le graviton de la théorie de la fusion est accompagné de deux photons, l'un électrique, l'autre magnétique [19][20][21].

## 2 L'équation d'onde non linéaire homogène

Ayant remarqué que le terme de masse de l'équation d'onde du monopôle était aussi compatible avec la première jauge, la jauge électrique, j'ai remplacé le terme de masse linéaire de l'équation de Dirac par le terme de masse de l'équation du monopôle, dans le cas particulier où l'équation d'onde est homogène. On peut dire aussi : dans ce cas particulier l'équation non linéaire admet l'équation de Dirac comme approximation linéaire.

En faisant cela je suivais les réflexions de Louis de Broglie sur la non-linéarité. La théorie quantique est essentiellement linéaire, puisque les états sont nécessairement à valeur dans des espaces vectoriels complexes d'opérateurs et puisque l'équation d'onde est linéaire. Lorsqu'il a remis en cause cette théorie linéaire, après l'avoir longtemps explorée et enseignée, Louis de Broglie a expliqué pourquoi la véritable équation pour son onde devait être non linéaire. La gravitation est essentiellement non linéaire. Les lois linéaires, en physique, sont toujours des approximations linéaires de lois plus compliquées. Louis de Broglie cherchait en outre à lier l'électron-particule à l'électron-onde, ce que sait faire la théorie de la gravitation pour le mouvement d'une petite masse. Le problème, lorsque l'on pense que la véritable équation est non linéaire, c'est que la non-linéarité n'est pas une propriété, mais une absence de propriété, et donc cela ne peut pas permettre de savoir comment trouver la bonne équation.

J'avais, avec l'équation non linéaire homogène, l'avantage d'avoir l'équation linéaire tout près, donc je savais au moins comment commencer à chercher les solutions. Ces solutions ne sont simples que dans le cas des ondes planes, qui sont certes faciles à calculer, mais sans grande signification physique, car dans la nature aucune onde n'est illimitée et infiniment régulière. Même dans ce cas très simple l'équation non linéaire donne un résultat tout différent en ce qui concerne le signe de l'énergie.

Cette question du signe de l'énergie, au départ, avait beaucoup perturbé Dirac, qui espérait bien trouver une équation d'onde sans les intempestives énergies négatives de l'équation de Klein-Gordon. Or les énergies négatives étaient encore présentes dans les solutions de son équation d'onde. De plus on ne peut pas les supprimer, on a besoin d'elles pour décomposer l'onde de Dirac en composantes de Fourier. Il a aussi été établi par Møller qu'on ne peut pas fabriquer un paquet d'onde de très petite dimension sans elles. En 1934 la physique a découvert le positron, et la physique quantique a réinterprété les solutions à énergie négative

comme les ondes correspondant au positron. Ceci est loin d'être simple, parce que, dans la nature, les positrons ont exactement la même énergie au repos que les électrons, et qu'il faut deux fois 511 keV pour produire une paire électron-positron. Avec l'équation non linéaire homogène, il n'existe pas d'énergie négative pour l'électron. Mais il en existe pour le positron, la conjugaison de charge changeant le signe de la fréquence, mais pas le signe de la densité d'énergie liée à la densité lagrangienne, ce qui paraît conforme à l'expérience.

Conforté par ce premier résultat, je me suis attaqué au cas beaucoup plus compliqué des solutions pour l'atome d'hydrogène. Ces solutions avaient été calculées par Darwin dès 1928, en adaptant la résolution faite à partir de l'équation de Pauli [22]. Cette résolution est fort compliquée, elle fait intervenir un opérateur qui n'est pas le moment cinétique, mais dont on calcule cependant les valeurs et vecteurs propres. Or il n'y a aucune raison pour que cet opérateur puisse convenir à l'équation non linéaire. Il existait une autre méthode, trouvée peu de temps auparavant par H. Krüger [23], qui est du point de vue mathématique la méthode classique de résolution des équations aux dérivées partielles. Elle consiste à séparer les variables, et le mérite de Krüger est d'avoir trouvé de manière très remarquable comment, en coordonnées sphériques, on peut séparer les variables dans le cadre de l'algèbre de Clifford d'espace-temps. Or dans cette résolution l'angle d'Yvon-Takabayasi, qui fait la différence entre l'équation non linéaire homogène et l'équation de Dirac, est fonction d'une seule coordonnée angulaire et de la coordonnée radiale, donc la méthode de séparation des variables commence de la même manière pour les deux équations d'onde [24].

Après, il y a un gros problème. L'équation non linéaire admet l'équation de Dirac comme approximation linéaire seulement dans le cas où l'angle d'Yvon-Takabayasi est nul ou négligeable. C'est le cas, par exemple, pour les ondes planes à énergie positive, où cet angle est nul. Pour les solutions à énergie négative c'est faux, parce que l'angle est proche de  $\pi$ , donc les solutions de l'une ne sont plus des solutions de l'autre. Dans les solutions pour l'atome d'hydrogène calculées par Darwin l'angle d'Yvon-Takabayasi est une fonction compliquée de la coordonnée radiale et de la coordonnée angulaire. Presque partout et pour toutes les solutions l'angle est petit et il est même nul dans le plan  $z=0$ . Donc je pensais pouvoir finir de résoudre l'équation non linéaire en utilisant une méthode d'approximation numérique de l'équation différentielle radiale.

Lorsque j'ai entrepris cette résolution numérique, je me suis aperçu qu'elle ne marchait bien que pour les solutions dans lesquelles les polynômes radiaux sont des constantes. Pour toutes les autres solutions il existe des valeurs de la variable radiale pour laquelle la valeur de l'onde est singulière, non inversible en algèbre de Clifford. Et au voisinage des points de ces cercles les solutions de l'équation non linéaire n'ont pas pour approximation les solutions de l'équation de Dirac. J'avais alors suffisamment confiance dans mon équation pour soupçonner que c'était l'équation de Dirac qui ne marchait pas, et que les solutions calculées en 1928, que l'on trouve dans tous les bons manuels [25], ne sont pas les bonnes. J'ai alors repris la résolution par séparation des variables, et j'ai effectivement trouvé un autre ensemble de solutions, caractérisées par les mêmes nombres quantiques, orthonormalisables elles aussi, et possédant absolument partout un angle d'Yvon-Takabayasi partout défini et partout petit [26]. Ce sont ces solutions qui sont les approximations des solutions de l'équation non linéaire homogène.

La résolution nous apprend trois choses : elle fonctionne avec les ondes droites et gauches, alors que, auparavant, on n'utilisait les ondes droites et gauches que pour les grandes vitesses. La séparation des variables est équivalente à la méthode basée sur les opérateurs de moment cinétique. Le produit scalaire euclidien, naturel dans un cadre mathématique d'algèbre de Clifford réelle, et le produit scalaire hermitien de la théorie quantique, fournissent exactement les mêmes règles d'orthonormalisation. Ayant obtenu récemment [27] une équation d'onde pour électron+neutrino j'ai repris le calcul des solutions pour l'atome d'hydrogène, et j'ai eu la surprise de trouver un autre ensemble de solutions chirales, avec les mêmes résultats physiques : même nombre d'état, mêmes nombres quantiques, mêmes niveaux d'énergie [28].

### 3 L'algèbre d'espace $Cl_3$

La seconde coïncidence est encore plus importante pour expliquer pourquoi les nombres complexes ont envahi la physique quantique : l'algèbre engendrée par les matrices de Pauli, qui est l'algèbre des matrices complexes  $2 \times 2$ , est isomorphe (c'est-à-dire identique du point de vue algébrique), à l'algèbre de Clifford  $Cl_3$  de l'espace physique. Il s'agit d'un isomorphisme d'algèbres réelles, un comble dans un domaine où règne l'idée que les espaces vectoriels sur le corps des complexes sont les seuls outils possibles pour la physique quantique.

J'ai alors compris que la théorie de Dirac pouvait se raconter dans le

cadre de cette algèbre de l'espace physique. La première chose que j'ai repérée était le caractère incomplet de la théorie de Dirac avec matrices complexes. Là où elle compte 16 densités tensorielles et s'en félicite, il existe en fait 36 densités tensorielles [29], car il y a 28 paires et 8 carrés que l'on peut former à partir des 8 paramètres réels de l'onde. Ceci peut bien sûr se généraliser : quand on passe des 8 paramètres de l'onde de l'électron aux 12 paramètres de l'onde électron+neutrino on aura, au lieu des  $36 = 8 \times 9/2$  densités tensorielles sans dérivées de l'onde de l'électron,  $78 = 12 \times 13/2$  densités tensorielles sans dérivées (voir [30] B.2). Et quand on passe aux 36 paramètres de l'onde complète électron+neutrino+quarks on obtient pas moins de  $666 = 36 \times 37/2$  densités tensorielles sans dérivées [31].

La seconde chose qui apparaît est que le  $i$  unique de la théorie quantique des champs est remplacé par un  $i\sigma_3$ , qui, lui, n'est pas unique mais en trois exemplaires. C'est la clef de l'existence des trois générations du modèle standard, mais je manquais à l'époque terriblement d'arguments pour le justifier. Par ailleurs il existe une quatrième possibilité, mais seulement pour le neutrino [32].

Il existe un autre important isomorphisme d'algèbres, entre l'algèbre d'espace et la sous-algèbre paire de l'algèbre d'espace-temps. Donc l'équation d'onde de l'électron peut s'écrire de manière équivalente dans l'une ou l'autre de ces algèbres. Si on travaille avec l'algèbre d'espace-temps on obtient la forme d'Hestenes pour l'équation de Dirac ou l'équation non linéaire homogène. L'algèbre d'espace est néanmoins à privilégier, à la fois pour des raisons physiques et pour des raisons mathématiques. La physique moderne utilise, avec les spineurs gauche et droit de Weyl, un espace orienté. Comme le raccord entre le formalisme des matrices complexes et le formalisme de l'algèbre d'espace se fait justement à l'aide des spineurs de Weyl, l'algèbre d'espace est le formalisme le plus commode pour travailler avec cet espace orienté. La conjugaison de charge, par exemple, est plus simple si on travaille avec l'algèbre d'espace. Il y a aussi des raisons mathématiques, la plupart des définitions et théorèmes sur les limites, la continuité, la dérivation, supposent que les espaces topologiques sur lesquels on travaille soient séparés. L'espace physique usuel étant naturellement doté d'une métrique est un espace séparé. L'espace-temps doté de la métrique d'espace-temps n'est pas un espace séparé, deux points distincts de cet espace pouvant être à distance nulle l'un de l'autre. L'espace-temps pseudo-euclidien ne convient donc pas bien à l'étude des équations d'onde, qui nécessitent des dérivées

partielles, donc une topologie séparée est pour le moins recommandée.

## 4 Un plus grand groupe d'invariance

J'ai ensuite comparé les différents formalismes, souhaitant établir que le plus simple était le meilleur des trois. Le critère de valeur était forcément le caractère relativiste de l'onde de Dirac. Or cette invariance de l'onde de Dirac, que l'on appelle habituellement invariance de forme, passe nécessairement par l'utilisation de l'algèbre d'espace, dans laquelle on écrit les vecteurs d'espace-temps :

$$x = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Ceux-ci forment la partie auto-adjointe de l'algèbre. Le sujet a été étudié de manière détaillée depuis que Pauli en 1927 a inventé ses matrices, mais toujours d'une manière discutable parce qu'utilisant la méthode des opérateurs infinitésimaux [33] et ensuite seulement la fonction exponentielle. Or travailler avec des opérateurs infinitésimaux revient à travailler dans l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie. Le problème est double : d'une part deux groupes de Lie différents peuvent avoir la même algèbre de Lie (c'est l'origine des représentations à deux valeurs utilisées en mécanique quantique pour le spin). D'autre part l'exponentielle ne permet d'atteindre généralement qu'une partie du groupe, avec quelques exceptions simples comme le groupe des rotations de l'espace. J'ai repris à zéro et sans idée préconçue cette question de l'invariance relativiste, évitant d'utiliser l'outil douteux des opérateurs infinitésimaux. Je n'ai donc pas posé de condition sur les matrices utilisées, alors que tout le monde avait jusqu'ici imposé aux matrices un déterminant égal à 1. Ne pas prendre cette condition ne provoque en fait aucune catastrophe. Les propriétés dont on a besoin restent vraies. La première chose qui change est qu'au lieu d'obtenir le groupe de Lorentz restreint on obtient un groupe plus vaste, celui des dilatations de Lorentz, qui sont le produit d'une rotation de Lorentz et d'une homothétie de rapport positif.

Plus important, parmi les matrices utilisées, celles qui sont inversibles constituent un groupe de Lie de dimension 8, tandis que le groupe des dilatations est seulement de dimension 7. Ces deux groupes sont de dimension différente, donc le groupe important est le groupe  $Cl_3^*$  des éléments inversibles et non plus le groupe des dilatations. Ce changement de groupe d'invariance est extrêmement important quand on veut inclure la gravitation (voir [30] chapitre 9). Ensuite il existe non pas un mais

deux homomorphismes du groupe  $Cl_3^*$  dans le groupe des dilatations. Ceci est la raison de l'existence des deux sortes d'ondes, les droites et les gauches. Si l'on note  $\xi$  le spineur droit de Weyl et  $\eta$  le spineur gauche, et avec

$$M = s + v^1\sigma_1 + v^2\sigma_2 + v^3\sigma_3 + iw^1\sigma_1 + iw^2\sigma_2 + iw^3\sigma_3 + ip, \quad (2)$$

$$\widehat{M} = s - v^1\sigma_1 - v^2\sigma_2 - v^3\sigma_3 + iw^1\sigma_1 + iw^2\sigma_2 + iw^3\sigma_3 - ip, \quad (3)$$

La dilatation  $D$  définie par  $M$  s'écrit

$$x' = D(x) = MxM^\dagger; \quad \xi' = M\xi; \quad \eta' = \widehat{M}\eta. \quad (4)$$

On pourra remarquer que deux matrices sont utilisées pour agir sur  $x$ , tandis qu'une seule est utilisée pour les spineurs  $\xi$  et  $\eta$ . La conséquence est que, dans une rotation d'angle  $2\theta$ , les ondes ne tournent que de  $\theta$ , et en plus elles tournent différemment quand on a affaire à une rotation de Lorentz.

L'invariance sous le groupe  $Cl_3^*$  concerne tout l'électromagnétisme, y compris l'électromagnétisme comportant des photons ou des monopôles magnétiques [34].

Pour l'électron, on s'aperçoit aisément de la ressemblance qui existe entre les éléments inversibles utilisés dans cette invariance de forme et l'onde  $\phi$  elle-même, qui est une fonction  $(x, t) \mapsto \phi(x, t)$  de l'espace et du temps à valeur dans l'algèbre d'espace. Le déterminant de  $\phi = \phi(x, t)$  a pour module l'invariant  $\rho$  et pour argument l'angle d'Yvon-Takabayasi. Cet angle est défini si et seulement si  $\rho$  n'est pas nul, ou si et seulement si  $\phi$  est inversible. C'est cette condition qui n'est pas satisfaite partout pour les solutions de Darwin [22], et qui est satisfaite pour mes solutions, partout et pour chacune des solutions, parce que deux polynômes de Gegenbauer successifs n'ont aucun zéro commun (c'est un théorème valable pour toute famille de polynômes orthogonaux).

Et de même que les matrices de  $Cl_3^*$  définissent des dilatations, les valeurs de l'onde  $\phi$  définissent, en chaque point  $(x, t)$  de l'espace-temps, une dilatation dont le rapport de dilatation est le module  $\rho$  du déterminant. Sur les 8 paramètres de l'onde, Lochak puis Hestenes dix ans plus tard en avaient repéré 6 comme étant les paramètres angulaires d'une rotation de Lorentz. En fait ce sont les paramètres d'un élément de  $SL(2, \mathbb{C})$  qui est identifié à une rotation, à tort car la physique quantique utilise là une fonction qui n'est pas biunivoque. Lochak avait trouvé l'interprétation physique du septième paramètre, l'angle d'Yvon-Takabayasi, comme

angle de la jauge magnétique qui est aussi la jauge chirale. Le huitième paramètre,  $\rho$ , était considéré comme un paramètre probabiliste, alors que c'est en fait un paramètre d'échelle, le rapport d'une dilatation. On verra plus loin ce que cela implique pour la probabilité, qui est la composante de temps d'un vecteur d'espace-temps et qui n'est pas un invariant relativiste. L'interprétation de  $\rho$  comme paramètre d'échelle se généralise à l'onde complète électron+neutrino+quarks, alors que l'interprétation statistique n'y a plus aucun sens.

L'existence inévitable en physique d'un paramètre d'échelle vient de la différence qui existe entre la mesure en mathématique et la mesure en physique. En mathématique une mesure est une application additive d'une famille borélienne d'ensembles dans  $\mathbb{R}^+$ . Une probabilité est un exemple type d'une telle mesure. Le résultat d'un calcul de probabilité est un nombre, comme 0,2 ou 0,5. Le résultat d'une mesure, en physique, est un "nombre-de-quelque-chose". Par exemple si je mesure la longueur d'un segment de droite je vais trouver 5 mètres. Pour raccorder les deux types de mesure, il faut avoir quelque chose qui donne la longueur numérique du mètre lui-même.

Finalement le bon lien entre ces deux types de mesure attribue au champ électromagnétique et à tous les autres champs de jauge un comportement en  $r^0$ , c'est-à-dire qu'ils ne changent pas quelque soit  $r$  [35][36]. La plupart des grandeurs physiques varient dans une dilatation, même les grandeurs invariantes sous le groupe de Lorentz, comme les masses propres qui varient en  $r^3$  ou les charges électriques qui varient en  $r^2$ . Les longueurs, d'espace ou de temps, varient bien sûr en  $r$ , donc les vitesses ne varient pas. Ainsi on peut dire que les masses propres se comportent comme des volumes, les charges comme des surfaces.  $\rho$  se comporte comme une longueur, la masse réduite  $m$  présente dans l'équation d'onde se comporte comme  $r^{-1}$ . C'est en effet le produit  $m\rho$  qui est invariant. Le passage à un groupe d'invariance plus grand signifie plus de contraintes, donc moins d'invariants. La "constante" de Planck  $\hbar$  varie en fait en  $r^4$ , c'est-à-dire comme un volume d'espace-temps. Tout ceci est cohérent avec toutes les lois connues de la mécanique et de l'électromagnétisme. Mieux, cela justifie l'existence du facteur de Planck liant masse propre et fréquence.

Mais cela suppose quand même de changer quelques mauvaises habitudes, comme celle prise en théorie quantique de poser  $\hbar = 1$  et celle prise en électromagnétisme d'utiliser des unités différentes pour mesurer les champs électriques et les champs magnétiques. Deux autres mauvaises

habitudes devront aussi être abandonnées : celle qui abaisse ou élève à volonté les indices de tenseur en utilisant le tenseur métrique, parce que la contravariance, en  $r$ , et la covariance, en  $r^{-1}$ , ne sont pas du tout équivalentes. Le formalisme des matrices complexes de l'équation de Dirac est aussi à proscrire, parce que cette écriture n'est équivalente avec celle de l'algèbre de Clifford que lorsque  $r = 1$  et qu'elle interdit de voir le paramètre d'échelle.

## 5 Lagrangien et équation d'onde

L'invariance du produit  $m\rho$ , qui est le terme de masse de la densité lagrangienne, conduit à écrire l'équation d'onde de l'électron sous une forme invariante [36]. Comme l'onde, en algèbre d'espace, est une fonction à valeur dans un espace de dimension  $2^3 = 8$ , l'équation d'onde est équivalente à 8 équations numériques. Plusieurs de ces équations numériques étaient bien connues, comme la conservation du courant de probabilité. La plus remarquable est la partie réelle, qui est tout simplement la relation  $\mathcal{L} = 0$ ,  $\mathcal{L}$  étant la densité lagrangienne. On sait depuis la thèse de Louis de Broglie que l'onde suit une loi découlant d'un principe de minimum [1]. On peut obtenir cette loi par les équations de Lagrange à partir de la densité lagrangienne. Dans le cas d'une équation d'onde homogène, la densité est nulle lorsque les équations de Lagrange sont satisfaites. Ici nous avons le lien inverse, c'est la densité lagrangienne qui découle de l'équation d'onde, en étant simplement la partie scalaire réelle de l'équation d'onde.

Le lien entre le lagrangien et l'équation d'onde est donc double. De plus ce nouveau lien est plus fort que le premier car il l'implique : les équations de Lagrange qui permettent d'obtenir l'équation d'onde à partir de la densité lagrangienne viennent de la stationnarité de l'action. Celle-ci est obtenue en intégrant dans l'espace-temps la densité lagrangienne. Or en intégrant une quantité nulle l'intégrale est forcément nulle, donc l'action est stationnaire.

Le nouveau lien entre l'onde et la densité lagrangienne est automatique. Ceci explique pourquoi il existe nécessairement une densité lagrangienne dans la physique de l'électron. En contrepoint on peut aussi fabriquer des équations d'onde qui ne possèdent pas ce double lien, qui ne peuvent pas être obtenues par des équations de Lagrange à partir de leur partie scalaire [32]. La physique des ondes est donc plus générale que la physique lagrangienne. Il n'y a plus de raison de supposer que toutes les lois de la physique doivent découler d'un principe de minimum. Le

fait que dans toutes les situations connues en physique quantique il est possible de se servir d'un principe de minimum doit être justifié. On verra que c'est le cas tant pour les interactions électro-faibles que pour les interactions fortes, mais uniquement pour l'onde spinorielle. Pour les systèmes, on aura autant de densités lagrangiennes que d'ondes individuelles. Ceci a déjà été vu dans la mécanique ondulatoire du photon, qui comporte deux densités lagrangiennes et deux tenseurs d'impulsion-énergie [8].

Avec l'équation non linéaire homogène, il existe deux courants conservatifs alors que la physique de l'électricité ne nécessite qu'un seul courant conservatif. Et justement on sait maintenant que l'électron n'est pas actif seulement dans l'interaction électrique, il interagit aussi avec son neutrino, dans ce qu'on appelle interaction faible.

## 6 Le groupe de jauge électro-faible

Les interactions électromagnétiques et les interactions faibles ont été unifiées dans le cadre de la théorie quantique des champs par le modèle de Weinberg-Salam [4]. Cela devait nécessairement être transposable en algèbre de Clifford et de manière invariante sous le groupe d'invariance plus vaste et plus contraignant qui régit tout l'électromagnétisme. J'ai traduit la dérivation covariante du modèle de Weinberg-Salam d'abord dans le cas le plus simple, qui est le cas de l'électron-neutrino [37]. La transposition au cas des quarks a été facile. Rétrospectivement, on peut dire que la seule chose vraiment compliquée est l'électron, qui comporte à la fois une onde droite et une onde gauche. Le groupe d'invariance agit par des multiplications à gauche, en algèbre de Clifford, tandis que l'invariance de jauge agit par des multiplications à droite. Les deux ne se gênent pas. Mais il y a une exception, c'est l'électron pour lequel les transformations du groupe le plus simple a priori, le groupe  $U(1)$ , sont engendrées par le terme  $i$  orienteur de l'espace, qui commute avec n'importe quoi en algèbre d'espace, avec pour résultat que le groupe agit à la fois par une multiplication à gauche et par une multiplication à droite. Une fois que l'on a réussi à transposer l'action de ce groupe  $U(1)$ , tout le reste des transformations de jauge est beaucoup plus simple, parce que cela correspond seulement à des multiplications à droite, donc cela ne peut pas interférer avec le groupe d'invariance de forme, qui agit à gauche. L'utilisation de l'algèbre de Clifford simplifie grandement les calculs. Le groupe de jauge est engendré par quatre opérateurs,  $P_0$  pour la jauge chirale  $U(1)$ ,  $P_1, P_2, P_3$  pour le groupe  $SU(2)$ . Toute la

complication de l'isospin électro-faible est reportée dans le projecteur  $P_0$ .

Ce qui fonctionne pour la paire électron-neutrino peut être transposé pour le monopôle magnétique, ce qui oblige à postuler l'existence d'un troisième spineur, équivalent du spineur du neutrino. Il faut bien sûr tenir compte de ce que la charge du monopôle est beaucoup plus grande que la charge de l'électron ([18] 7.3). L'onde du monopôle magnétique est similaire à celle de la paire électron-neutrino. En conséquence le monopôle magnétique est comme tous les leptons insensible aux interactions fortes.

Dans un premier temps, avec l'électron et le positron, le neutrino et l'antineutrino, il nous fallait  $4 \times 8 = 32$  degrés de liberté. Comme les 8 paramètres de l'électron tiennent dans une matrice complexe  $2 \times 2$ , il suffit d'utiliser une matrice complexe  $4 \times 4$  pour caser les 32 paramètres réels nécessaires. Il se trouve que l'algèbre  $M_4(\mathbb{C})$  de ces matrices complexes  $4 \times 4$  est aussi l'algèbre de Clifford  $Cl_{2,3}$ , algèbre de Clifford d'un espace-temps avec deux dimensions de temps. La place que prennent les différentes composantes, électron, neutrino, positron et antineutrino, est largement contrainte par l'exigence d'invariance. Inversement on peut dire que ces contraintes plus fortes nous disent comment s'y prendre, par exemple pour passer de la paire électron-neutrino à la paire des quarks u-d.

De même, pour obtenir les interactions fortes, il suffit d'ajouter la couleur aux quarks, qui ont alors trois fois plus de degrés de liberté. Leptons plus quarks, on a à nouveau 4 fois plus de degrés de liberté, on passe donc à 128, ce qui tient dans une matrice complexe  $8 \times 8$ . L'algèbre  $M_8(\mathbb{C})$  des matrices complexes  $8 \times 8$  est aussi une algèbre de Clifford, c'est notamment  $Cl_{3,4}$  ou  $Cl_{2,5}$ .

Le principal gain que l'on obtient lorsqu'on travaille avec ces matrices  $8 \times 8$ , c'est que le groupe de jauge qui généralise l'invariance électro-faible est très exactement le groupe  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$  du modèle standard, et pas un autre, et que la partie  $SU(3)$  responsable des interactions fortes n'agit que sur les quarks et ignore automatiquement les leptons. Ceci était bien connu expérimentalement et devait être ajouté aux hypothèses du modèle standard. On comprend aussi du coup pourquoi les théories dites de grande unification, qui supposaient qu'à haute énergie la différence entre leptons et quarks disparaissait, n'ont pas marché. La différence entre leptons et quarks se traduit dans le langage de la théorie quantique des champs par la conservation du nombre baryonique.

Cette loi de conservation provient donc de la structure même de l'onde. Ceci permet de comprendre sa conservation stricte, qui n'avait pas reçu jusqu'ici de véritable justification.

Ayant obtenu facilement un bon nombre des aspects du modèle standard, j'ai ensuite essayé de transposer à l'onde à valeur matricielle  $4 \times 4$ , ou à valeur matricielle  $8 \times 8$  la transformation géométrique associée à l'onde de l'électron. Or là rien ne marchait, et l'analyse des difficultés a conduit à reprendre ce que dit le modèle standard concernant la conjugaison de charge et la parité d'espace.

## 7 Conjugaison de charge, prédominance des ondes gauches

Pour obtenir l'équation d'onde du positron, à partir de l'équation d'onde de l'électron, la mécanique quantique lie l'onde du positron à l'onde de l'électron. Cette liaison est aisément transposable à l'onde à valeur dans l'algèbre d'espace. Notant  $e$  l'onde de l'électron,  $p$  celle du positron,  $n$  celle du neutrino et  $a$  celle de l'antineutrino, la liaison de la théorie quantique s'écrit :

$$\hat{p} = \hat{e}\sigma_1; \quad \hat{a} = \hat{n}\sigma_1. \quad (5)$$

Et ainsi de suite pour les autres anti-particules. Lorsque l'on utilise ce lien, 16 degrés de liberté subsistent, donc l'algèbre d'espace-temps  $Cl_{1,3}$  suffit, il n'y a pas besoin de dimension d'espace-temps supplémentaire pour l'onde de la paire électron-neutrino. Puis, quand on passe aux quarks, on doit encore doubler la dimension des matrices, mais l'onde n'est pas à valeur dans  $Cl_{2,5}$ , seulement dans sa sous-algèbre  $Cl_{1,5}$ . Avec cela on obtient à nouveau le lien entre l'onde et la transformation géométrique. Autre avantage de cette liaison entre l'onde de la particule et de l'antiparticule, on n'a besoin que de deux dimensions supplémentaires d'espace et on ne touche pas au temps orienté. Le temps reste celui de la thermodynamique.

Utiliser des dimensions d'espace-temps supplémentaires est une recette ancienne, la première tentative par Kaluza va bientôt être centenaire. Ajouter deux dimensions a aussi déjà été tenté [38]. Les théories de cordes en ajoutent beaucoup plus que 2. Chaque fois que l'on augmente le nombre de dimensions de notre espace, on doit justifier que nous ne pouvons pas nous déplacer dans ces directions supplémentaires.

Avec l'onde et son groupe d'invariance c'est automatique, le groupe d'invariance traite de manière complètement séparée les quatre dimensions d'espace-temps et les deux dimensions supplémentaires d'espace [18].

Nous n'avons pas non plus utilisé un autre précepte du modèle standard, qui fait que nous pouvons annuler l'onde droite du neutrino (qui est l'onde gauche de l'antineutrino). Si on considère une onde droite du neutrino, celle-ci ne sert à rien, elle ne subit aucune interaction, ni électrique ni faible. Tout se passe comme si elle n'existait pas. L'avantage de l'annuler est qu'alors on descend à seulement 12 fonctions numériques, et qu'on obtient alors une identité remarquable qui donne pour le déterminant de la matrice  $4 \times 4$  de l'électron-neutrino une somme de deux carrés, donc la valeur de l'onde en chaque point est très généralement inversible. Or nous avons besoin de l'inverse pour passer de l'onde de la particule à l'onde d'un système [39]. De la même manière, si nous supposons que l'onde des quarks est uniquement gauche (et l'onde des antiquarks droite) nous obtenons une seconde identité remarquable disant elle aussi que le déterminant de la matrice  $8 \times 8$  est une somme de deux carrés, donc l'inverse existe sauf cas très particulier [18]. L'onde est constituée du maximum de fonctions numériques, 36, compatible avec l'inversibilité des valeurs de l'onde. Ceci ne justifie pas la prédominance des ondes gauches, mais justifie que l'un des deux types d'onde soit dominant.

## 8 Retour à l'onde de Louis de Broglie

L'onde de la paire électron+neutrino, de même que l'onde électron+neutrino+ quarks u et d, est une onde bien plus proche de la conception de Louis de Broglie que de l'onde de la théorie quantique des champs. C'est en effet du point de vue mathématique un objet parfaitement défini, calculable, sur lequel on peut appliquer les règles bien assises des mathématiques et de l'informatique pour la physique du champ électromagnétique pré-quantique. L'onde est une fonction de l'espace ordinaire (orienté) et du temps ordinaire (orienté), à valeur dans une algèbre de Clifford. Une algèbre est un espace vectoriel, donc l'onde interfère avec elle-même lorsqu'elle se propage.

Nous venons d'obtenir l'équation d'évolution de cette onde. L'équation d'onde est, dans le cas de la paire électron-neutrino, une généralisation de l'onde non-linéaire homogène de l'électron [27]. Cette équation d'onde comporte le terme covariant qui assure l'invariance sous le groupe de jauge électro-faible, et un terme de masse généralisant le terme de

masse de l'électron. L'équation est invariante de forme sous le groupe d'invariance plus large générant les dilatations (elle est donc en particulier invariante relativiste), et elle est complètement invariante de jauge. Le terme de masse est compatible avec le groupe complet de la jauge électro-faible.

Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser le mécanisme de brisure spontanée de la symétrie de jauge pour justifier l'existence de la masse.

L'équation d'onde électron+neutrino peut elle-même être généralisée à l'onde électron+neutrino+quarks. Le terme différentiel est la dérivée covariante qui donne le groupe de jauge du modèle standard. Le terme de masse se sépare en le terme de masse de l'équation du lepton et un terme de masse similaire pour la partie des quarks [31]. Le lien entre l'équation d'onde et la densité lagrangienne est le même que pour l'électron, ou pour la paire électron-neutrino : l'équation  $\mathcal{L} = 0$  est la partie scalaire réelle de l'équation d'onde. L'équation d'onde est invariante de forme sous  $CI_3^*$ , donc invariante relativiste, et invariante de jauge sous le groupe  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$  du modèle standard. Elle a été obtenue par les équations de Lagrange à partir de la densité lagrangienne qui en est la partie scalaire réelle. L'équation d'onde apparaît sous la forme qu'elle a parce que c'est la forme la plus simple possédant ces propriétés d'invariance.

Il existe une densité de probabilité dans le cas de l'onde de l'électron, et on peut la généraliser au cas électron+neutrino+quarks. Il existe alors un courant total conservatif. Ce courant ne peut cependant pas être interprété comme donnant la probabilité de présence de LA particule, vu qu'il y a une paire d'objets au moins et non un seul. Quand on passe au cas électron+neutrino+quarks, le fait que la partie leptonique ne voit pas l'interaction forte correspond à une séparation en deux parties de l'équation d'onde. Il en résulte l'existence de deux courants conservatifs, l'un pour la somme du courant de l'électron et du neutrino, l'autre pour la somme de six courants, soit deux quarks avec trois états chacun. La notion de probabilité de présence n'a évidemment aucun sens pour ces 6 objets partageant le même courant. Toute la querelle sur l'interprétation de l'onde quantique apparaît ici vide de sens.

## 9 L'onde et la gravitation

Si la probabilité n'est pas une probabilité de présence, de quoi s'agit-il ? Comme il existe une densité lagrangienne, que cette densité lagran-

gienne est invariante sous les translations, le théorème de Noether permet d'en déduire l'existence d'un tenseur conservatif d'impulsion-énergie. Dans le cas de l'électron seul, ce tenseur est connu sous le nom de tenseur de Tétrode. Il ne dépend que des composantes et des dérivées partielles des composantes de l'onde. Hestenes a établi que ce tenseur donnait la loi de Laplace du mouvement de l'électron, et j'ai retrouvé le même résultat pour l'équation non linéaire homogène ([35] B.2.3). Donc on peut considérer le tenseur de Tétrode comme donnant la masse-énergie liée aux forces, c'est-à-dire la masse d'inertie. Il existe une deuxième forme pour l'énergie de l'électron, c'est la valeur  $E$  du coefficient du temps dans la phase de l'onde. Cette forme de masse-énergie, proportionnelle à la fréquence, est, on le sait en astronomie, dépendante du champ de gravitation. On peut donc considérer la masse-énergie d'horloge  $E$  comme la masse gravitationnelle de l'électron. Le principe d'équivalence qui est le fondement de la relativité générale dit que la masse gravitationnelle est égale à la masse d'inertie. Avec ce que nous savons de l'énergie dans le cas de l'électron, cela se traduit [30] par : l'intégrale de la densité d'énergie du tenseur de Tétrode est égale à l'énergie  $E$ . Pour une onde stationnaire, si on divise la densité d'énergie du tenseur de Tétrode par  $E$  on obtient  $J^0/\hbar c$ . Donc l'intégrale d'espace de  $J^0/\hbar c$  doit être égale à 1, donc  $J^0/\hbar c$  doit être une densité de probabilité. L'existence d'une probabilité est donc tout simplement la traduction à l'onde de Louis de Broglie de l'égalité physique entre masse gravitationnelle et masse d'inertie, base de la gravitation d'Einstein.

Ceci justifie aussi la normalisation de l'onde : l'équation d'onde étant homogène, à toute solution  $\phi$  et tout nombre réel  $k$  on peut associer une solution  $k\phi$ . Mais la densité d'impulsion-énergie de  $k\phi$  est celle de  $\phi$  multipliée par  $k^2$ . L'amplitude de l'onde, donc  $k$ , est déterminée par l'égalité entre l'énergie totale et l'intégrale de la densité d'énergie  $T_0^0$  du tenseur de Tétrode. Après cette intégration la masse-énergie gravitationnelle est vue comme un vecteur d'espace-temps énergie-impulsion de particule, elle peut donc donner au niveau astronomique, où l'on intègre à tout l'espace la densité des énergies des particules, une densité symétrique d'impulsion-énergie, ce qui est compatible avec le tenseur symétrique utilisé par Einstein en relativité générale [41][30].

D'autre part l'équivalence masse inerte - masse grave règle aussi la question de l'énergie négative des antiparticules. Pour l'électron la conjugaison de charge ne change que le terme différentiel de l'équation d'onde [40], sans changer quoi que ce soit aux termes de charge et au terme

de masse. Comme le tenseur de Tétrode est justement constitué par ces seules dérivées, on a pour le positron un tenseur de Tétrode opposé à celui de l'électron. En prenant alors une énergie  $-E$  pour la phase on conserve une densité d'énergie positive pour l'onde, et en l'intégrant on retrouve la masse-énergie positive de l'antiparticule. Et l'on a en prime les coefficients négatifs nécessaires pour l'analyse de Fourier ou pour fabriquer un paquet d'ondes suffisamment petit conforme au calcul de Møller.

En outre la charge électrique du positron n'est pas opposée mais égale à celle de l'électron, elle apparaît opposée dans l'invariance de jauge parce que les signes des dérivées partielles ont changé. Pour le positron un signe moins supplémentaire et malencontreux apparaît dans le terme de masse de l'équation de Dirac, dû au fait que l'angle d'Yvon-Takabayasi est proche de  $\pi$ .

## 10 Bosons

L'univers physique ne comporte pas que des fermions, il comporte aussi des bosons, et on ne saurait oublier que la physique quantique a commencé avec la lumière. Il faut donc aussi étudier les bosons, ce que nous avons commencé à faire [42]. Un boson de jauge se compose, si l'on prend comme exemple le photon de L. de Broglie, d'un vecteur d'espace-temps potentiel  $A$  et d'un champ bivectoriel associé  $F$ . On peut commencer par l'étude du groupe de jauge électro-faible, parce que l'onde leptonique ignore les interactions fortes. Les vecteurs potentiels  $B$  pour la jauge chirale  $U(1)$ ,  $W^1$ ,  $W^2$ ,  $W^3$  pour la jauge  $SU(2)$ , sont reliés aux vecteurs d'espace-temps  $A$  et  $Z^0$  par l'angle de Weinberg-Salam  $\theta_W$  : si l'on note  $g_1$  et  $g_2$  les constantes de couplage des deux groupes on a

$$q = g_1 \cos(\theta_W) = g_2 \sin(\theta_W) = \frac{e}{\hbar c}, \quad (6)$$

$$-g_1 B + g_2 W^3 = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} Z^0. \quad (7)$$

$$B + iW^3 = e^{i\theta_W} (A + iZ^0), \quad (8)$$

$$B = \frac{g_1}{q} A - \frac{g_1}{g_2} W^3. \quad (9)$$

Nommant  $R$  et  $L$  les ondes droite et gauche de l'électron et  $n$  l'onde gauche du neutrino, on a pour le potentiel  $A$  et le champ électromagnétique  $F$  du photon de L. de Broglie

$$A = D_R - D_L - D_n; \quad D_R = RR^\dagger; \quad D_L = LL^\dagger; \quad D_n = nn^\dagger. \quad (10)$$

Alors que la relation entre champ électromagnétique et potentiel est  $F = \frac{1}{2}(\nabla\widehat{A} - A\widehat{\nabla})$  en électromagnétisme de Maxwell et  $F = \nabla\widehat{A}$  dans l'électromagnétisme de L. de Broglie, nous avons utilisé la seule dérivation possible qui n'utilise que l'équation d'onde spinorielle, et qui a les bonnes propriétés d'invariance :

$$F = \dot{A}; \quad \dot{D}_n = (\nabla\widehat{n})\bar{n} - n(n^\dagger\widehat{\nabla}) \quad (11)$$

Avec cette dérivation le champ  $F$  se trouve être le seul des 9 champs possibles qui soit de masse nulle, c'est pourquoi l'identification de  $A$  comme potentiel électromagnétique est certaine. L'invariance de jauge indique que les autres potentiels sont

$$\begin{aligned} W^1 &= D_{Ln}; \quad D_{Ln} + id_{Ln} = 2nL^\dagger, \\ W^2 &= d_{Ln}, \\ W^3 &= D_n - D_L. \end{aligned} \quad (12)$$

Alors l'équation d'onde de l'électron est l'habituelle équation d'onde issue de l'équation de Dirac seulement si

$$g_2 = 2q; \quad \sin(\theta_W) = \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Le groupe de jauge électro-faible et l'angle  $\theta_W$  datent de 1967. La théorie a été validée expérimentalement par la découverte des bosons  $W$  et  $Z^0$ . La valeur expérimentale de l'angle a été trouvée proche de  $30^\circ$ , donc on a très vite trouvé une justification à cette valeur. Comme il s'agit d'un paramètre libre dans la théorie électro-faible, on a appelé à la rescousse les interactions fortes et élargi la symétrie de jauge à des groupes compacts,  $SU(5)$  et plus tard  $SO(10)$ , groupes dits de grande unification. Ces groupes avaient l'avantage de justifier les  $30^\circ$ . Ils prédisaient aussi la désintégration du proton. Des détecteurs gigantesques ont été mis en place pour observer ces désintégrations. Mais on n'a pas vu l'ombre d'une seule désintégration de proton, il a fallu abandonner la grande unification, et le problème de l'angle de Weinberg-Salam est resté posé.

Notre résultat est donc la première preuve que la méthode de construction de l'onde bosonique par de Broglie était non seulement très en avance sur son temps, mais que c'est la bonne parce qu'elle peut parfaitement se concilier avec la physique des interactions de jauge, et qu'elle diminue le nombre de paramètres libres du modèle standard. En suivant

l'idée de T. Socroun d'incorporer les constantes dans les potentiels [43] on considère

$$\mathbf{b} = g_1 B ; \quad \mathbf{w} = g_2 W^3 ; \quad \mathbf{a} = qA. \quad (14)$$

$$4\mathbf{a} = 3\mathbf{b} + \mathbf{w}. \quad (15)$$

L'électromagnétisme apparaît donc comme fait d'un quart de champ faible et de trois quarts de champ chirale. Et la transformation de jauge chirale d'angle  $\theta$  apparaît comme la composée d'une transformation de jauge électrique d'angle  $2\theta$  et d'une transformation de jauge en  $W^3$  d'angle  $\theta$  [42]. Le groupe de jauge électro-faible apparaît donc déjà unifié du point de vue physique.

Il faudra bien évidemment continuer l'étude des bosons avec les gluons du groupe  $SU(3)$ . Du point de vue théorique ce n'est pas plus difficile. Du point de vue pratique c'est beaucoup plus long, car on passe de 12 à 36 paramètres donc il n'y a pas moins de 666 densités tensorielles utilisables. Pour les seuls quarks u et d il y a 15 angles analogues à l'angle d'Yvon-Takabayasi de l'électron. Comme l'avait fort bien jugé Louis de Broglie, il va rester du travail en physique pour la génération suivante.

**Remerciements** : Merci d'abord à Jacques Bertrand, avec qui j'ai travaillé grâce à la Fondation Louis de Broglie où nous nous sommes rencontrés, et sans qui ce travail n'aurait certainement jamais abouti tant il y a contribué.

Merci à la Fondation Louis de Broglie, et particulièrement à Georges Lochak, qui m'a appris l'importance des spineurs chiraux, qui m'a fait connaître tant de choses, comme l'importance de la thermodynamique, et la théorie de la lumière de Louis de Broglie qu'il a généralisée. Même si j'ai toujours été un indécrottable matheux et donc un élève insupportable et difficile pour le physicien émérite qu'il est, il me semble que la culture topologique qui a été au départ de mes travaux en physique a fini par avoir quelque utilité.

## Références

- [1] L. de Broglie. Recherches sur la théorie des quantas. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 17(1), 1924.
- [2] E. Schrödinger. *Annalen der Physik* (4), 81, 1926.
- [3] P.A.M. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proc. R. Soc. Lond.*, 117 :610–624, 1928.
- [4] S. Weinberg. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19 :1264–1266, 1967.

- [5] L. de Broglie. *La mécanique du photon, Une nouvelle théorie de la lumière : tome 1 La lumière dans le vide*. Hermann, Paris, 1940.
- [6] L. de Broglie. *tome 2 Les interactions entre les photons et la matière*. Hermann, Paris, 1942.
- [7] L. de Broglie. *L'électron magnétique*. Hermann, Paris, 1934.
- [8] L. de Broglie. *Théorie générale des particules à spin (méthode de fusion)*. Gauthier-Villars, Paris, 1954.
- [9] D. Hestenes. *Space-Time Algebra*. Gordon and Breach, New-York, 1966, 1987, 1992.
- [10] D. Hestenes. A unified language for Mathematics and Physics and Clifford Algebra and the interpretation of quantum mechanics. In Chisholm and AK Common, editors, *Clifford Algebras and their applications in Mathematics and Physics*. Reidel, Dordrecht, 1986.
- [11] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin  $\frac{1}{2}$ . *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 8(4), 1983.
- [12] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin  $\frac{1}{2}$ (partie 2). *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 9(1), 1984.
- [13] G. Lochak. Wave equation for a magnetic monopole. *Int. J. of Th. Phys.*, 24 :1019–1050, 1985.
- [14] L. Urutskoev. Review of experimental results on low-energy transformation of nucleus. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 29(h.s. 3) :1149–1164, 2004.
- [15] N. Ivoilov. Low energy generation of the strange radiation. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 31(1) :115–123, 2006.
- [16] D. Priem, C. Daviau, and G. Racineux. Transmutations et traces de monopôles obtenues lors de décharges électriques. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 34 :103, 2009.
- [17] C. Daviau, D. Fargue, D. Priem, and G. Racineux. Tracks of magnetic monopoles. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 38, 2013.
- [18] C. Daviau and J. Bertrand. *New Insights in the Standard Model of Quantum Physics in Clifford Algebra*. Je Publie, Pouillé-les-coteaux, 2014 and <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00907848>.
- [19] G. Lochak. Photons électriques et photons magnétiques dans la théorie du photon de Louis de Broglie (un renouvellement possible de la théorie du champ unitaire d'Einstein). *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 29 :297–316, 2004.
- [20] G. Lochak. “Photons électriques” et “photons magnétiques” dans la théorie du photon de de Broglie. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 33 :107–127, 2008.
- [21] G. Lochak. A theory of light with four different photons : electric and magnetic with spin 1 and spin 0. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 35 :1–18, 2010.
- [22] C.G.Darwin. *Proc. R. Soc. Lond.*, 118 :554, 1928.

- [23] H. Krüger. New solutions of the Dirac equation for central fields. In D. Hestenes and A. Weingartshofer, editors, *The Electron*. Kluwer, Dordrecht, 1991.
- [24] C. Daviau. *Equation de Dirac non linéaire*. PhD thesis, Université de Nantes, 1993.
- [25] M. E. Rose. *Relativistic electron theory*. John Wiley and sons, New-York, London, 1960.
- [26] C. Daviau. Solutions of the Dirac equation and of a nonlinear Dirac equation for the hydrogen atom. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 7((S)) :175–194, 1997.
- [27] C. Daviau and J. Bertrand. Relativistic gauge invariant wave equation of the electron - neutrino. *Journal of Modern Physics*, 5 :1001–1022, <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2014.511102>, 2014.
- [28] C. Daviau, J. Bertrand, Left Chiral Solutions for the Hydrogen Atom of the Wave Equation for Electron+Neutrino. *Journal of Modern Physics*, 6, 1647–1656. <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2015.611166>
- [29] C. Daviau. Sur les tenseurs de la théorie de Dirac en algèbre d'espace. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 23(1), 1998.
- [30] C. Daviau and J. Bertrand. *The Standard Model of Quantum Physics in Clifford Algebra*. World Scientific Publishing, Singapore, 2015.
- [31] C. Daviau and J. Bertrand. A wave equation including leptons and quarks for the standard model of quantum physics in Clifford algebra. *Journal of Modern Physics*, 5 : 2149–2173, <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2014.518210>, 2014.
- [32] C. Daviau and J. Bertrand. A lepton Dirac equation with additional mass term and a wave equation for a fourth neutrino. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 38, 2013.
- [33] M.A. Naïmark. *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*. Dunod, Paris, 1962.
- [34] C. Daviau. On the electromagnetism's invariance. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 33 :53–67, 2008.
- [35] C. Daviau. *L'espace-temps double*. JePublie, Pouillé-les-coteaux, 2011.
- [36] C. Daviau. *Double Space-Time and more*. JePublie, Pouillé-les-coteaux, 2012.
- [37] C. Daviau. Invariant quantum wave equations and double space-time. *Adv. in Imaging and Electron Physics*, 179, chapter 1 :1–137, 2013.
- [38] M. A. Tonnelat. *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*. Gauthier-Villars, Paris, 1965.
- [39] C. Daviau.  $Cl_3^*$  invariance of the Dirac equation and of electromagnetism. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 22(3) :611–623, 2012.
- [40] C. Daviau. Gauge group of the standard model in  $Cl_{1,5}$ . *ICCA10, Tartu (Estonia)*, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01055145>, 2014.
- [41] Daviau, C. and Bertrand, J. (2015). Geometry of the standard model of quantum physics, *Journal of Applied Mathematics and Physics* **3**, pp. 46–61. <http://dx.doi.org/10.4236/jamp.2015.31007>.

- [42] Daviau, C. and Bertrand, J. (2015) Electro-Weak Gauge, Weinberg-Salam Angle. Journal of Modern Physics, 6, 2080-2092. <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2015.614215>
- [43] Socroun, T. (2015). Clifford to unify general relativity and electromagnetism, *AACA* **25**, DOI 10.1007/s00006-015-0558-5.

*(Manuscrit reçu le 2 juin 2015)*