Charge des quarks, bosons de jauge et principe de Pauli

C. Daviau [a], **J. Bertrand** [b]

[a] Le Moulin de la Lande, 44522 Pouillé-les-coteaux, France
claude.daviau@nordnet.fr

[b] 15 Avenue Danielle Casanova, 95210 St Gratien, France
bertrandjacques-m@orange.fr

Résumé : Les bosons de jauge du modèle standard sont des vecteurs d'espace-temps dont les composantes font partie des densités tensorielles obtenues à partir de l'onde de spin 1/2. La variance sous Cl_3^* de ces vecteurs, variance compatible avec la relativité générale, implique l'anti-symétrisation des ondes des systèmes de fermions (principe de Pauli). En découle l'additivité de la masse-énergie. Les valeurs des charges électriques des quarks u et d sont calculées à partir de l'équation d'onde électron+neutrino+quarks et de son groupe de jauge $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

ABSTRACT. The gauge bosons of the standard model are space-time vectors whose components are amongst the tensor densities available from the wave with spin 1/2. The variance under Cl_3^* of these vectors, which is compatible with General Relativity, implies the anti-symmetrization of the wave of systems of fermions (Pauli principle). From this the additivity of mass-energy results. The value of the electric charge of the u and d quarks are calculated from the wave equation for electron+neutrino+quarks and from its $U(1)\times SU(2)\times SU(3)$ gauge group.

keywords : invariance group, Dirac equation, electromagnetism, weak interactions, strong interactions, Clifford algebras, electric charge, quark, Pauli principle.

P.A.C.S.: 15A66, 35Q41, 81T13, 83E15

1 Introduction

Les quarks ont été introduits en physique à la suite du succès du groupe $SU(3)$, généralisant la symétrie dite d'isospin entre le proton et le neutron, pour expliquer la diversité des baryons observés dans les accélérateurs de particules. Les octuplets et décuplets de baryons observés ont été associés à des représentations d'un groupe $SU(3)$ de saveur, ces particules étant elles-mêmes composées de trois quarks. Les quarks correspondent quant à eux à la représentation de plus faible dimension de ce groupe. En conséquence la charge du quark u est positive et égale à -2 fois la charge du quark d. A partir de ce seul rapport des deux charges, nous allons voir que la valeur des charges est parfaitement déterminée.

L'onde des quarks est incluse dans une onde pour toutes les particules et antiparticules de ce que l'on appelle la première génération, à savoir l'électron, son neutrino, et les deux quarks u et d avec chacun trois états de couleur r, g, b, et leurs antiparticules. Cette onde est, du point de vue physique, la généralisation de l'onde de de Broglie de l'électron, de spin 1/2. Du point de vue mathématique c'est une fonction $\Psi = \Psi(x)$ de l'espace et du temps, les coordonnées d'espace et de temps étant incluses dans $x = x^\mu \sigma_\mu$ avec $x^0 = ct$, $\sigma_0 = 1$; les autres σ_μ sont les matrices de Pauli qui engendrent une représentation matricielle de l'algèbre de Clifford Cl_3 de l'espace physique. L'onde Ψ est à valeur dans l'algèbre de Clifford $Cl_{1,5}$ d'un espace-temps à deux dimensions supplémentaires d'espace, dont nous n'avons besoin ici que parce que cette algèbre est une sous-algèbre de $M_8(\mathbb{C})$, l'algèbre (sur le corps des réels) des matrices complexes 8×8. Donc il suffit de savoir calculer par blocs un produit de matrices pour pouvoir suivre la suite, le lecteur pouvant se référer à [1], [2], [3] Chapitre 1 pour plus de détails. Les explications nécessaires pour comprendre la physique sous-jacente sont dans l'article-compagnon [4].

Après avoir étudié l'onde spinorielle, nous expliquons ici comment l'onde des bosons de jauge du modèle standard s'obtient à partir des densités tensorielles sans dérivées que l'on peut former avec l'onde spinorielle. Une liste exhaustive de ces densités est fournie dans l'appendice A. Les bosons de jauge présents dans l'équation d'onde spinorielle doivent évidemment satisfaire la loi de transformation qui constitue le groupe d'invariance de jauge. Le fait que le photon a une masse propre nulle est le point d'ancrage qui permet d'associer sans ambiguïté possible à chacun des bosons de jauge un des vecteurs d'espace-temps dont les composantes proviennent de la liste des densités possibles. L'invariance sous le groupe Cl_3^*, qui généralise l'invariance relativiste et qui est compatible avec la relativité générale (voir [3] Chap. 9), associe à tout élément du groupe d'invariance une transformation linéaire agissant à la fois sur l'onde spinorielle et sur les vecteurs d'espace-temps. Le principal but du présent article est d'expliquer comment cette linéarité implique l'anti-symétrisation des ondes dans le cas d'un système de fermions suivant la même équation d'onde, et ayant donc la même densité lagrangienne.

Par blocs de matrices 4×4, les blocs étant éléments de l'algèbre de Clifford de l'espace-temps usuel $Cl_{1,3}$, on a

$$\Psi = \begin{pmatrix} l & r \\ g & b \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

où l désigne l'onde leptonique et les $\mathbf{c}$ désignent les trois couleurs $c = r, g, b$ de l'onde des quarks. Ces éléments de l'algèbre d'espace-temps s'écrivent par blocs de matrices 2×2 :

$$l = \begin{pmatrix} e & n \\ \widehat{n} & \widehat{e} \end{pmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} d_c & u_c \\ \widehat{u}_c & \widehat{d}_c \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

où e désigne l'onde de l'électron, n celle de son neutrino, d_c l'onde du quark d de couleur c, u_c l'onde du quark u de couleur c. La conjugaison $e \mapsto \widehat{e}$ désigne l'automorphisme principal de l'algèbre d'espace. C'est la traduction en algèbre d'espace et pour l'onde spinorielle de la transformation P de la théorie quantique des champs. On a précisément

$$e = R + L = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix}, \ \widehat{e} = \widehat{R} + \widehat{L} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \eta_1 & -\xi_2^* \\ \eta_2 & \xi_1^* \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

$$n = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -\zeta_2^* \\ 0 & \zeta_1^* \end{pmatrix}, \ \widehat{n} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 \\ \zeta_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Cette onde a comme composantes les spineurs chiraux de Weyl : l'onde droite ξ de l'électron, associée à $R = e\frac{1+\sigma_3}{2}$, l'onde gauche η de l'électron associée à $L = e\frac{1-\sigma_3}{2}$, l'onde du neutrino électronique ζ qui est uniquement gauche, d'après les résultats expérimentaux sur les interactions faibles. Nous avons supposé, dans nos précédents travaux [5], [6], [7], [8], [9] qu'il en est de même pour les ondes des quarks :

$$d_c = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -\eta_{2dc}^* \\ 0 & \eta_{1dc}^* \end{pmatrix}, \ \widehat{d_c} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \eta_{1dc} & 0 \\ \eta_{2dc} & 0 \end{pmatrix}, \ c = r, g, b, \tag{1.5}$$

$$u_c = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -\eta_{2uc}^* \\ 0 & \eta_{1uc}^* \end{pmatrix}, \ \widehat{u}_c = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \eta_{1uc} & 0 \\ \eta_{2uc} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Ceci est donc dans la droite ligne du modèle de Weinberg-Salam des interactions électro-faibles [10] et du monopôle magnétique de G. Lochak [11], [12], [13].

2 L'invariance de jauge électro-faible

Le groupe d'invariance de jauge électro-faible est engendrée par 4 opérateurs, un pour chacune des dimensions du groupe de jauge. Dans le cas des quarks, ces opérateurs $\underline{P}_n$ sont associés à 4 potentiels de jauge, qui sont des vecteurs d'espace-temps : $\underline{W}^0 = \underline{B}$, $\underline{W}^1$, $\underline{W}^2$, $\underline{W}^3$.

$$\underline{W}^j = L^\mu W^j_\mu,\ j = 1,2,3\ ;\ \underline{D} = L^\mu D_\mu\ ;\ L^0 = L_0\ ;\ L^j = -L_j, \quad (2.1)$$

pour $j = 1,2,3$. Le lien entre l'algèbre $Cl_{1,5}$ et l'algèbre d'espace-temps $Cl_{1,3}$ est réalisé par la représentation matricielle :

$$L_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \\ \gamma_\mu & 0 \end{pmatrix}\ ;\ L_4 = \begin{pmatrix} 0 & -I_4 \\ I_4 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ L_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{i} = \gamma_{0123}, \quad (2.2)$$

tandis que le lien entre l'algèbre d'espace-temps et l'algèbre d'espace est réalisé grâce à la représentation matricielle utilisant les spineurs ξ et η de Weyl :

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\ ;\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ;\ \gamma^j = -\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

La dérivation covariante prend la forme :

$$\underline{D}(\Psi) = \underline{\partial}(\Psi) + \underline{\mathrm{b}}\ \underline{P}_0(\Psi) + \underline{\mathrm{w}}^j \underline{P}_j(\Psi) + \underline{\mathrm{b}}^k \underline{\mathbf{i}}\Gamma_k\Psi;\ \underline{\mathrm{w}}^j = \mathrm{w}^{j\mu} L_\mu = \frac{g_2}{2}\underline{W}^j$$
$$\underline{\mathrm{b}} = \mathrm{b}^\mu L_\mu = \frac{g_1}{2}\underline{B}\ ;\ \underline{\mathrm{b}}^k = \mathrm{b}^{k\mu} L_\mu = \frac{g_3}{2}\underline{G}^k\ ;\ \underline{\mathbf{i}} = L_{0123}. \quad (2.4)$$

Les g_1, g_2, g_3 sont trois constantes propres à chacun des sous-groupes du groupe de jauge. Les deux premières sont liées à la charge $q = \frac{e}{\hbar c}$. Pour la partie $U(1) \times SU(2)$ du groupe de jauge du modèle standard, on utilise deux projecteurs $\underline{P}_\pm$ tels que

$$\underline{P}_\pm(\Psi) = \frac{1}{2}(\Psi \pm \underline{\mathbf{i}}\Psi L_{21}). \quad (2.5)$$

Trois des quatre opérateurs agissent sur les quarks de la même manière que sur la partie leptonique de l'onde :

$$\underline{P}_1(\Psi) = \underline{P}_+(\Psi)L_{35},\ L_{35} = L_3L_5, \quad (2.6)$$
$$\underline{P}_2(\Psi) = \underline{P}_+(\Psi)L_{5012}, \quad (2.7)$$
$$\underline{P}_3(\Psi) = \underline{P}_+(\Psi)L_{0132}. \quad (2.8)$$

Le quatrième opérateur, celui lié à la jauge chirale, agit différemment sur la partie leptonique par rapport à la partie des quarks :

$$\underline{P}_0(\Psi) = \begin{pmatrix} P_0(l) & P'_0(r) \\ P'_0(g) & P'_0(b) \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

$$P_0(l) = l\gamma_{21} + P_-(l)\mathbf{i} = l\gamma_{21} + \frac{1}{2}(l\mathbf{i} + \mathbf{i}l\gamma_{30}), \tag{2.10}$$

$$P'_0(\mathbf{c}) = k\mathbf{c}\gamma_{21} + P_-(\mathbf{c})\mathbf{i} = k\mathbf{c}\gamma_{21} + \frac{1}{2}(\mathbf{ci} + \mathbf{ic}\gamma_{30}). \tag{2.11}$$

Il est nécessaire, par suite de l'utilisation au paragraphe suivant des projecteurs $P^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm L_{012345})$ dans les opérateurs $\underline{\mathbf{i}}\Gamma_k$ du groupe de jauge $SU(3)$ de la chromodynamique, qu'il y ait un même nombre k quelque soit la couleur. Le projecteur $\underline{P}_0$ de la jauge chirale $U(1)$ a donc forcément cette forme. Nous avons établi dès [14], et repris dans le bon cadre d'espace-temps [1], [2], [3] qu'il suffit de choisir $k = -\frac{1}{3}$ pour obtenir les 4 valeurs des charges des quarks u, d, et de leurs antiquarks $\overline{\mathrm{u}}$, $\overline{\mathrm{d}}$. Pour obtenir ce résultat qui est l'un des deux buts de cet article, nous disposons maintenant du lien qui existe entre les potentiels et l'onde Ψ, les composantes des potentiels faisant partie des densités tensorielles sans dérivée que fournissent les 9 spineurs chiraux de l'onde (2 spineurs, droit et gauche, pour l'électron, 1 pour le neutrino et pour chacun des 2 quarks avec 3 états, soit au total 1 spineur droit et 8 spineurs gauches).

3 Equation d'onde et potentiels de jauge

L'équation d'onde avec terme de masse, invariante de forme sous le groupe Cl_3^* qui étend l'invariance relativiste, et invariante de jauge sous le groupe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ du modèle standard, s'écrit :

$$0 = (\underline{D}\Psi)L_{012} + m\rho\chi; \ \chi = \begin{pmatrix} \chi_b & \chi_g \\ \chi_r & \chi_l \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

où les a_j (ci-dessous) ne dépendent que de Ψ_l tandis que les s_j ne dépendent que des quarks. Nous détaillons les s_j et les χ_c dans l'appendice A. Nous avons maintenant[1] :

$$a_1 = 2(\xi_1\eta_1^* + \xi_2\eta_2^*); \ a_2 = 2(\zeta_1^*\eta_2^* - \zeta_2^*\eta_1^*); \ a_3 = 2(\xi_1\zeta_1^* + \xi_2\zeta_2^*), \tag{3.2}$$

$$\rho^2 = a_1a_1^* + a_2a_2^* + a_3a_3^* + \sum_{j=1}^{j=15} s_js_j^*. \tag{3.3}$$

[1]Nous avons utilisé précédemment [9] un terme de masse plus compliqué comportant deux masses propres et deux termes ρ_1 et ρ_2.

Comme seule la partie $U(1) \times SU(2)$ du groupe de jauge agit sur l'électron-neutrino, l'équation d'onde se sépare en une équation pour la partie lepton et une équation d'onde pour la partie quarks :

$$0 = (\underline{D}\Psi^l)L_{012} + m\rho \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \chi_l \end{pmatrix}; \ \Psi^l = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$0 = (\underline{D}\Psi^q)L_{012} + m\rho\chi^q; \ \chi^q = \begin{pmatrix} \chi_b\chi_g \\ \chi_r \ 0 \end{pmatrix}; \ \Psi^q = \begin{pmatrix} 0 \ r \\ g \ b \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Nous avons pour la partie leptonique :

$$\mathbf{D}l\gamma_{012} + m\rho\chi_l = 0; \ \mathbf{D} = \boldsymbol{\partial} + \mathbf{b}P_0 + \mathbf{w}^j P_j, \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu; \ \mathbf{b} = \gamma^\mu \mathrm{b}_\mu; \ \mathbf{w}^k = \gamma^\mu \mathrm{w}^k_\mu,$$

$$\chi_l = \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} a_1^*(R+L) + a_2^* n\sigma_1 + a_3^* n & -a_2^* L\sigma_1 + a_3^* R \\ a_2\widehat{L}\sigma_1 + a_3\widehat{R} & a_1(\widehat{R}+\widehat{L}) - a_2\widehat{n}\sigma_1 + a_3\widehat{n} \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Nous avons obtenu en [9] pour la partie leptonique du potentiel électromagnétique :

$$A = D_R - D_L - D_n \ ; \quad D_R = D^\mu_R\sigma_\mu = RR^\dagger$$

$$D_L = D^\mu_L\sigma_\mu = LL^\dagger \ ; \quad D_n = D^\mu_n\sigma_\mu = nn^\dagger \tag{3.8}$$

Ce vecteur d'espace-temps vérifie dans Cl_3

$$A = A^\mu\sigma_\mu = e\sigma_3 e^\dagger + n\sigma_3 n^\dagger, \tag{3.9}$$

on établit dans l'annexe B que c'est la partie leptonique de

$$\underline{A} = \underline{D}_R - \underline{D}_L - \underline{D}_n - \underline{D}_{dr} - \underline{D}_{dg} - \underline{D}_{db} - \underline{D}_{ur} - \underline{D}_{ug} - \underline{D}_{ub}$$

$$\underline{D}_{dc} = D^\mu_{dc}L_\mu; \ D_{dc} = D^\mu_{dc}\sigma_\mu = d_c d_c^\dagger, \ c = r, g, b,$$

$$\underline{D}_{uc} = D^\mu_{uc}L_\mu; \ D_{uc} = D^\mu_{uc}\sigma_\mu = u_c u_c^\dagger, \tag{3.10}$$

$$\underline{A} = A^\mu L_\mu = \langle \Psi L_{031}\widetilde{\Psi}_c - \Psi_c L_{031}\widetilde{\Psi}\rangle_1, \tag{3.11}$$

où $\langle M\rangle_1$ désigne la partie vectorielle du multivecteur M et Ψ_c désigne l'onde conjuguée de charge :

$$\Psi_c = \begin{pmatrix} \bar{l} & \bar{r} \\ \bar{g} & \bar{b} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

L'onde conjuguée de charge, dans le modèle standard, vérifie[2]

$$\bar{l}=\begin{pmatrix}-e\sigma_1 & -n\sigma_1\\ \widehat{n}\sigma_1 & \widehat{e}\sigma_1\end{pmatrix},\ \bar{\mathbf{c}}=\begin{pmatrix}-d_c\sigma_1 & -u_c\sigma_1\\ \widehat{u}_c\sigma_1 & \widehat{d}_c\sigma_1\end{pmatrix};\ \Psi_c=L_{0123}\Psi L_{23}. \quad (3.13)$$

L'appendice B calcule les potentiels du groupe de jauge $SU(2)$, qui vérifient :

$$W^1 = D_{Ln}+7_V+8_V+9_V, \quad (3.14)$$

$$W^2 = d_{Ln}-7_v-8_v-9_v, \quad (3.15)$$

$$W^3 = D_n-D_L+D_{ur}+D_{ug}+D_{ub}-D_{dr}-D_{dg}-D_{db}. \quad (3.16)$$

Le modèle de Weinberg–Salam des interactions faibles utilise un potentiel A, un angle θ_W et un terme Z^0 tel que

$$g_1=\frac{q}{\cos(\theta_W)}\ ;\ \ g_2=\frac{q}{\sin(\theta_W)}\ ;\ \ q=\frac{e}{\hbar c}, \quad (3.17)$$

$$-g_1B+g_2W^3=\sqrt{g_1^2+g_2^2}Z^0=\frac{2q}{\sin(2\theta_W)}Z^0, \quad (3.18)$$

$$B=\cos(\theta_W)A-\sin(\theta_W)Z^0\ ;\ W^3=\sin(\theta_W)A+\cos(\theta_W)Z^0, \quad (3.19)$$

$$B+iW^3=e^{i\theta_W}(A+iZ^0)\ ;\ \ A+iZ^0=e^{-i\theta_W}(B+iW^3). \quad (3.20)$$

Nous avons déduit de l'équation d'onde du second ordre de l'électron [9] que l'angle de Weinberg-Salam vérifiait nécessairement :

$$g_2=2q;\ \sin(\theta_W)=\frac{q}{g_2}=\frac{q}{2q}=\frac{1}{2}, \quad (3.21)$$

$$\cos(\theta_W)=\frac{\sqrt{3}}{2};\ g_1=\frac{2q}{\sqrt{3}}. \quad (3.22)$$

Ceci nous donne pour le potentiel de Cabibbo et Ferrari de la jauge chirale :

$$g_1B=2q(\frac{2}{3}A-\frac{1}{3}W^3). \quad (3.23)$$

Suivant T. Socroun [15] nous avons incorporé les constantes dans les potentiels en (2.4), ce qui revient à généraliser la prescription de covariance

[2]Cette relation entre l'onde fermionique et l'onde anti-fermionique est strictement équivalente à celle de la mécanique quantique relativiste ([3] Sec. 2.5). Pour l'onde fermionique de seconde et troisième génération, les indices 1,2,3 doivent être permutés circulairement.

des lois physiques d'A. Einstein. Avec $\mathrm{a} = \mathrm{a}^\mu \sigma_\mu = \frac{q}{2} A$ et $\mathbf{a} = \mathrm{a}^\mu \gamma_\mu$ nous obtenons donc simplement :

$$4\mathbf{a} = 3\mathbf{b} + \mathbf{w}^3. \tag{3.24}$$

Ceci implique une relation exacte simple entre les trois jauges :

$$\begin{aligned} g_1 B' &= g_1 B - 2\nabla\theta \\ &= \frac{2q}{3}(2A - W^3 - \frac{3}{q}\nabla\theta) \\ &= \frac{2q}{3}\Big[2[A - \frac{1}{q}\nabla(2\theta)] - (W^3 - \frac{2}{g_2}\nabla\theta)\Big]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

La jauge chirale $U(1)$ apparaît donc être la composée, dans un ordre quelconque, d'une transformation de jauge électrique d'angle 2θ (l'onde gauche et l'onde droite tournent en sens inverse et l'onde du neutrino ne tourne pas) et d'une transformation de jauge d'isospin faible d'angle θ (l'onde gauche de l'électron et celle du neutrino tournent en sens inverse) :

$$\begin{aligned} &A \mapsto A' = A - \frac{1}{q}\nabla(2\theta);\ R \mapsto R' = e^{2i\theta}R;\ L \mapsto L' = e^{-2i\theta}L;\ n' = n \\ &W^3 \mapsto W'^3 = W^3 - \frac{2}{g_2}\nabla\theta;\ R'' = R';\ L'' = e^{i\theta}L';\ n'' = e^{-i\theta}n' \\ &B \mapsto B'' = B - \frac{2}{g_1}\nabla\theta;\ R'' = e^{2i\theta}R;\ L'' = e^{i\theta}L' = e^{-i\theta}L;\ n'' = e^{-i\theta}n. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Passons maintenant aux quarks, en utilisant le fait que la charge du quark u est égale à l'opposé du double de la charge du quark d. Cela signifie, pour chaque valeur de $c = r, g, b$, que la transformation de jauge électrique vérifie :

$$A \mapsto A' = A - \frac{1}{q}\nabla(2\theta);\ d'_c = e^{ia\theta}d_c;\ u'_c = e^{-2ia\theta}u_c, \tag{3.27}$$

où a est une constante à déterminer. La paire d-u fonctionne comme la paire e-n pour la partie $SU(2)$ du groupe de jauge, nous avons donc :

$$W^3 \mapsto W'^3 = W^3 - \frac{2}{g_2}\nabla\theta;\ d''_c = e^{i\theta}d'_c;\ u''_c = e^{-i\theta}u'_c, \tag{3.28}$$

Pour la jauge chirale, on remplace P_0 par P'_0 c'est-à-dire qu'on remplace γ_{21} par $k\gamma_{21}$. Les ondes droites et les ondes gauches tournent différemment, mais nous n'avons pour les quarks u et d que des ondes gauches, qui se transforment comme L et n dans cette jauge, ce qui donne

$$B \mapsto B'' = B - \frac{2}{g_1}\nabla\theta;\ d''_c = e^{-ik\theta}d_c;\ u''_c = e^{-ik\theta}u_c. \tag{3.29}$$

On a donc nécessairement

$$e^{-ik\theta}d_c = d''_c = e^{i\theta}d'_c = e^{i\theta}e^{ia\theta}d_c = e^{i(1+a)\theta}d_c;\ -k = 1+a, \tag{3.30}$$

$$e^{-ik\theta}u_c = u''_c = e^{-i\theta}u'_c = e^{-i\theta}e^{-2ia\theta}u_c = e^{i(-1-2a)\theta}u_c;\ -k = -1-2a,$$

$$1+a = -1-2a, \tag{3.31}$$

$$a = -\frac{2}{3}, \tag{3.32}$$

$$k = -1+\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}. \tag{3.33}$$

Donc la valeur que nous avons utilisée jusqu'ici, et qui donne les valeurs attendues des charges des quarks (voir par exemple [1] 6.3), est obligatoire du fait que les quarks u et d appartiennent à la représentation de dimension minimale du groupe $SU(3)$ de saveur, à l'origine de l'hypothèse des quarks. Les valeurs +2/3 et -1/3 de la charge du proton, pour les quarks u et d, ne font donc plus partie des paramètres libres du modèle standard de la physique quantique. Rappelons que ces valeurs des charges, $2|e|/3$ pour le quark u et $-|e|/3$ pour le quark d, suffisent à expliquer la charge $|e|$ du proton et la charge nulle du neutron, donc la nullité des charges de tous les atomes non ionisés.

4 Origine du principe de Pauli

Pour la jauge de couleur, nous allons changer de base de calcul par rapport à la forme usuelle des générateurs de $SU(3)$, qui a le grand inconvénient de ne pas être symétrique sous la permutation des couleurs. Nous utilisons h^j, p^j, q^j, $j = 1,2,3$ tels que :

$$h^1 = \mathrm{b}^1;\ h^2 = \mathrm{b}^2;\ p^1 = \mathrm{b}^6;\ p^2 = \mathrm{b}^7;\ q^1 = \mathrm{b}^4;\ q^2 = -\mathrm{b}^5 \tag{4.1}$$

$$\mathrm{b}^3 = \frac{3}{2}h^3;\ \mathrm{b}^8 = \frac{\sqrt{3}}{2}(h^3+2p^3);\ q^3 = -h^3-p^3. \tag{4.2}$$

Et les opérateurs :

$$\Delta_j^1 = \underline{\mathbf{i}}\Gamma_j,\ j = 1,2,3;\ \Delta_1^2 = \underline{\mathbf{i}}\Gamma_6;\ \Delta_2^2 = \underline{\mathbf{i}}\Gamma_7;\ \Delta_1^3 = \underline{\mathbf{i}}\Gamma_4, \tag{4.3}$$

$$\Delta_2^3 = -\underline{\mathbf{i}}\Gamma_5;\ \Delta_3^2(\Psi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{i}g & -\mathbf{i}b \end{pmatrix};\ \Delta_3^3(\Psi) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i}r \\ 0 & \mathbf{i}b \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

qui permettent d'écrire la dérivation covariante en mettant en évidence la symétrie par permutation des couleurs : $r \mapsto g \mapsto b \mapsto r$ impliquant $h \mapsto p \mapsto q \mapsto h$ et $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ pour les indices des opérateurs Δ :

$$\underline{D}(\Psi) = \underline{\partial}(\Psi) + \underline{\mathrm{b}}\ \underline{P}_0(\Psi) + \underline{\mathrm{w}}^j \underline{P}_j(\Psi) + \underline{h}^k \Delta_k^1(\Psi) + \underline{p}^k \Delta_k^2(\Psi) + \underline{q}^k \Delta_k^3(\Psi),$$
$$\underline{h}^k = h^{k\mu} L_\mu;\quad \underline{p}^k = p^{k\mu} L_\mu;\quad \underline{q}^k = q^{k\mu} L_\mu. \tag{4.5}$$

Les potentiels de la jauge $SU(3)$ sont calculés dans l'appendice B :

$$h^1 = h^{1\mu}\sigma_\mu = \frac{g_3}{2}(1_V + 4_V), \tag{4.6}$$

$$h^2 = h^{2\mu}\sigma_\mu = \frac{g_3}{2}(-1_v - 4_v), \tag{4.7}$$

$$h^3 = h^{3\mu}\sigma_\mu = \frac{g_3}{2}(D_{ur} + D_{dr} - D_{ug} - D_{dg}), \tag{4.8}$$

$$p^1 = p^{1\mu}\sigma_\mu = \frac{g_3}{2}(2_V + 5_V), \tag{4.9}$$

$$p^2 = p^{2\mu}\sigma_\mu = \frac{g_3}{2}(-2_v - 5_v), \tag{4.10}$$

$$p^3 = p^{3\mu}\sigma_\mu = \frac{g_3}{2}(D_{ug} + D_{dg} - D_{ub} - D_{db}), \tag{4.11}$$

$$q^1 = q^{1\mu}\sigma_\mu = \frac{g_3}{2}(3_V + 6_V), \tag{4.12}$$

$$q^2 = q^{2\mu}\sigma_\mu = \frac{g_3}{2}(-3_v - 6_v), \tag{4.13}$$

$$q^3 = q^{3\mu}\sigma_\mu = \frac{g_3}{2}(D_{ub} + D_{db} - D_{ur} - D_{dr}). \tag{4.14}$$

On vérifiera qu'il n'y a que 8 potentiels en réalité, puisque la somme $h^3 + p^3 + q^3$ est nulle. On peut remarquer que le potentiel électromagnétique A est la somme de deux termes :

$$A_p = D_R - D_L - D_n - D_{dr} - D_{ug} - D_{ub}, \tag{4.15}$$

$$A_n = -D_{dg} - D_{db} - D_{ur}, \tag{4.16}$$

On a noté A_p le potentiel de la première ligne, qui correspond à tous les objets d'un atome d'hydrogène, à savoir un électron avec son neutrino et un proton avec trois quarks, un d et deux u de couleurs différentes, tandis que le potentiel de la seconde ligne correspond aux trois objets d'un neutron, à savoir un u et deux d de couleurs différentes. Il se trouve que cette distinction reste possible pour la jauge $SU(3)$. Par contre elle n'est pas possible pour la jauge $SU(2)$ qui mélange les ondes u et d d'une même couleur. L'onde électronique n'apparait séparée de l'onde des quarks que si nous considérons l'équation d'onde en oubliant que les potentiels dépendent de l'onde des quarks. Les constituants des noyaux sont non seulement les protons et les neutrons, mais aussi les paires protons–neutrons. La physique nucléaire ne peut pas non plus faire abstraction du cortège électronique pour tous les phénomènes électro-faibles, ce que Filippov ([16]) a bien mis en évidence. Les monopôles magnétiques leptoniques contribuent de la même manière aux potentiels électro-faibles vus par les nucléons.

Les 12=1+3+8 vecteurs d'espace-temps qui sont appelés habituellement bosons de jauge dans le modèle standard permettent d'obtenir pour l'équation d'onde fermionique à la fois l'invariance de jauge, c'est ainsi qu'on les obtient dans l'appendice B, mais aussi l'invariance relativiste de forme de l'équation d'onde, comme faisant partie de l'invariance sous Cl_3^* : à tout élément M inversible de Cl_3, algèbre de Clifford de l'espace physique à trois dimensions, on associe la dilatation D de Lorentz telle que

$$x = x^\mu \sigma_\mu \mapsto x' = x'^\mu \sigma_\mu = M x M^\dagger, \tag{4.17}$$

$$\underline{x} = x^\mu L_\mu \mapsto \underline{x}' = x'^\mu L_\mu = \underline{M}\ \underline{x}\ \underline{\widetilde{M}};\ \underline{M} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix};\ N = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \widehat{M} \end{pmatrix},$$

$$\xi \mapsto \xi'(x') = M\xi;\ \eta \mapsto \eta'(x') = \widehat{M}\eta;\ \Psi \mapsto \Psi'(x') = \underline{M}\Psi. \tag{4.18}$$

Ceci entraîne que les vecteurs potentiels notés avec des majuscules, comme A, W^k, etc, se comportent comme x, ils sont dits contravariants :

$$D'_L = L'L'^\dagger = MLL^\dagger M^\dagger = MD_L M^\dagger,$$

$$D'_R = R'R'^\dagger = MRR^\dagger M^\dagger = MD_R M^\dagger, \tag{4.19}$$

$$\underline{A} \mapsto \underline{A}' = \underline{M}\ \underline{A}\ \underline{\widetilde{M}}. \tag{4.20}$$

Ces vecteurs contravariants peuvent être considérés comme "mobiles avec les sources" du champ de jauge. Les vecteurs notés avec des minuscules, qui contiennent en facteur les constantes, se comportent au contraire comme les opérateurs différentiels, ils sont dits covariants :

$$\nabla = \sigma^\mu \partial_\mu;\ \boldsymbol{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu;\ \underline{\nabla} = L^\mu \partial_\mu;\ \nabla' = \sigma^\mu \partial'_\mu;\ \boldsymbol{\partial}' = \gamma^\mu \partial'_\mu, \tag{4.21}$$

$$\nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M};\ \boldsymbol{\partial} = \widetilde{N}\boldsymbol{\partial}' N;\ \underline{\partial} = \underline{\widetilde{M}}\ \underline{\partial'}\ \underline{M}, \tag{4.22}$$

$$\mathbf{w}^j = \overline{M}\mathbf{w}'^j\widehat{M};\ \mathbf{a} = \overline{M}\mathbf{a}'\widehat{M};\ h^k = \overline{M}h'^k\widehat{M}, \tag{4.23}$$

et ainsi de suite pour les 12 vecteurs potentiels, car les "constantes" de structures ne sont constantes que si le déterminant de M appartient à $SL(2,\mathbb{C})$, c'est-à-dire si :

$$\det(M) = re^{i\theta} \tag{4.24}$$

vérifie $r = 1$. Covariance et contravariance sont compatibles parce que (voir [3] page 52) :

$$q = q'r^2;\ g_1 = g'_1 r^2;\ g_2 = g'_2 r^2;\ g_3 = g'_3 r^2;\ M\overline{M} = \det(M). \tag{4.25}$$

Que ce soit sous forme contravariante ou covariante, les potentiels de jauge se transforment de manière linéaire dans une dilatation de Lorentz, et la transformation de l'onde (4.18) est également linéaire. Or le potentiel électrique vu par un électron d'un atome est la somme des potentiels créés par les différents composants du noyau de cet atome, ainsi que des autres électrons. Donc nous pouvons poser en règle générale que les potentiels créés par plusieurs fermions s'ajoutent nécessairement. Considérons maintenant deux solutions Ψ^1 et Ψ^2 de l'équation d'onde fermionique (3.1) et considérons par exemple le potentiel D^1_R créé par Ψ^1 et le potentiel D^2_R créé par Ψ^2, avec

$$R^1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \xi^1_1 & 0 \\ \xi^1_2 & 0 \end{pmatrix};\ R^2 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \xi^2_1 & 0 \\ \xi^2_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

Nous aurons $R = R^1 + R^2$ et $D_R = D^1_R + D^2_R$ si et seulement si :

$$(R^1 + R^2)(R^1 + R^2)^\dagger = R^1 R^{1^\dagger} + R^2 R^{2^\dagger}, \tag{4.27}$$

$$R_1 R_2^\dagger = -R_2 R_1^\dagger \tag{4.28}$$

$$2\begin{pmatrix} \xi^1_1 & 0 \\ \xi^1_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^{2^*}_1 & \xi^{2^*}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} \xi^2_1 & 0 \\ \xi^2_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^{1^*}_1 & \xi^{1^*}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

c'est-à-dire si et seulement si les produits sont antisymétriques :

$$\xi^1_1\xi^{2^*}_1 = -\xi^2_1\xi^{1^*}_1;\ \xi^1_2\xi^{2^*}_1 = -\xi^2_2\xi^{1^*}_1$$
$$\xi^1_1\xi^{2^*}_2 = -\xi^2_1\xi^{1^*}_2;\ \xi^1_2\xi^{2^*}_2 = -\xi^2_2\xi^{1^*}_2. \tag{4.30}$$

La règle d'anti-symétrisation des fermions obtenue par Pauli est donc équivalente à l'addition des potentiels de jauge. La linéarité des dilatations, tant pour l'onde que pour les potentiels, est compatible avec cette règle. Soit en effet D une dilatation de dilatateur M et $R = R_1 + R_2$. On a :

$$\begin{aligned} &R'_1 = MR_1;\ R'_2 = MR_2;\ R' = R'_1 + R'_2 = MR_1 + MR_2 = MR \\ &D'_R = MD_R M^\dagger = M(R_1 R_1^\dagger + R_2 R_2^\dagger)M^\dagger = {D_1}'_R + {D_2}'_R \end{aligned} \tag{4.31}$$

La règle d'anti-symétrisation a une conséquence directe sur le courant de densité de probabilité, qui vaut, pour l'onde complète :

$$J = D_R + D_L + D_n + D_{ur} + D_{ug} + D_{ub} + D_{dr} + D_{dg} + D_{db} \tag{4.32}$$

puisqu'elle implique que J est la somme du courant J^1 de la solution Ψ^1 et du courant J^2 de la solution Ψ^2, ce qui est considéré comme étant un système de deux électrons. Comme on a, pour un électron dans un état stationnaire d'énergie E, proportionnalité entre J^0 et la densité d'énergie T_0^0 du tenseur d'impulsion-énergie de l'onde ([3] Sec. 9.2) :

$$T_0^0 = E\frac{J^0}{\hbar c}, \tag{4.33}$$

le fait que les courants J s'ajoutent implique que l'impulsion-énergie s'ajoute aussi. On obtiendra en intégrant à tout l'espace, dans le cas de deux électrons de même énergie :

$$\iiint dvT_0^0 = 2E;\quad \iiint dv\frac{J^0}{\hbar c} = 2. \tag{4.34}$$

Donc on verra deux électrons d'énergie E, mais parler de densité de probabilité n'a plus aucun sens avec cette somme égale à 2.

5 Identité et lagrangien

L'équation d'onde (3.1) peut être obtenue, par les équations de Lagrange, à partir de la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\langle\widetilde{\Psi}(\underline{D}\Psi)L_{012}\rangle + m\rho \tag{5.1}$$

où $\langle M\rangle$ désigne la partie scalaire de M. Le fait que l'équation d'onde peut être obtenue à partir de la densité lagrangienne est bien connu, mais le fait que la densité lagrangienne est la partie réelle de l'équation d'onde n'est visible que si l'on passe à la forme invariante de l'équation d'onde, en multipliant (3.1) par $\widetilde{\Psi}$ à gauche ce qui donne

$$0 = \widetilde{\Psi}(\underline{D}\Psi)L_{012} + m\rho\widetilde{\Psi}\chi. \tag{5.2}$$

Car le calcul de $\widetilde{\Psi}\chi$ donne

$$\langle\widetilde{\Psi}\chi\rangle = 2;\ \frac{1}{2}\langle\widetilde{\Psi}(\underline{D}\Psi)L_{012} + m\rho\widetilde{\Psi}\chi\rangle = \mathcal{L} = 0 \tag{5.3}$$

On peut donc voir que l'équation d'onde est très particulière, puisque dépendant de sa seule partie réelle. Elle peut même s'exprimer sans son terme de masse propre parce que l'on a l'identité :

$$\begin{aligned} m\rho =&(D\widehat{R})i\sigma_3\overline{R} + (D\widehat{L})i\sigma_3\overline{L} + (D\widehat{n})i\sigma_3\overline{n} \\ &+ (D\widehat{d}_r)i\sigma_3\overline{d}_r + (D\widehat{d}_g)i\sigma_3\overline{d}_g + (D\widehat{d}_b)i\sigma_3\overline{d}_b \\ &+ (D\widehat{u}_r)i\sigma_3\overline{u}_r + (D\widehat{u}_g)i\sigma_3\overline{u}_g + (D\widehat{u}_b)i\sigma_3\overline{u}_b. \end{aligned} \tag{5.4}$$

La théorie quantique des champs et ses extensions (théorie des cordes, supersymétrie, etc) fait de la masse propre $m_0 = m\hbar c$ une grandeur fondamentale, parce que valeur propre de toute représentation du groupe de Poincaré. Or ce groupe n'est pas le groupe d'invariance de l'onde fermionique : il est trop gros, car il contient les symétries P et T qui ne sont pas physiquement réalisables. Il est trop petit car il ne contient ni Cl_3^*, ni même son sous-groupe $SL(2,\mathbb{C})$, qui n'est pas isomorphe au groupe restreint de Lorentz. Il ne faut donc pas s'étonner des valeurs extraordinairement diverses des masses propres des particules. Avec la même masse propre, neutrino, électron et quarks u et d peuvent présenter des invariants $m\rho$ complètement différents.

6 Conclusion

La double liaison que nous avons mis précédemment en évidence entre l'équation d'onde et la densité lagrangienne de l'onde fermionique concerne aussi tous les bosons de jauge : ceux-ci sont à l'œuvre dans l'équation d'onde, et ils sont dépendants de l'onde de manière quadratique, tout comme le courant de probabilité. Donc l'équation d'onde fermionique est faussement linéaire, elle ne semble linéaire que parce que les potentiels de jauge ne sont pas écrits comme dépendants de l'onde. Par ailleurs les potentiels sont les grandeurs importantes, les champs de jauge comme le champ électromagnétique sont des grandeurs secondaires, ce sont seulement les dérivées des potentiels. Et les potentiels ne sont plus "extérieurs", ils sont intérieurs à l'onde, dépendant d'elle. Pour que l'électron puisse voir le potentiel créé par le proton, il faut alors nécessairement que l'électron et le proton participent à la même onde. L'onde à valeur dans $Cl_{1,5}$, qui s'est introduite pour des raisons de symétrie, permet cela. Nous avons précédemment montré [8] que des solutions existent pour l'électron-neutrino de l'atome d'hydrogène, avec des potentiels différents du potentiel utilisé précédemment. Ces solutions offrent toutes les propriétés qui ont fait le succès de l'équation de Dirac.

De multiples objets de la physique quantique, avec un nombre variable et fluctuant de "particules", apparaissent maintenant comme les solutions multiples d'une même équation d'onde. Cette onde quantique apte à héberger aussi bien les quarks que les électrons et leurs neutrinos, mais aussi tous les composants d'un atome d'hydrogène, voire d'un atome de deutérium, ressemble donc fort au champ unitaire cherché par A. Einstein.

On a considéré jusqu'ici le modèle standard, qui donne toute satisfaction sur le plan expérimental, comme forcément provisoire étant donné l'abondance des paramètres à rajouter. Tel qu'il apparaît quand on le regarde du point de vue physique avec l'onde spinorielle de L. de Broglie, et avec l'outil mathématique des algèbres de Clifford, ce modèle est plus solide que jamais.

La théorie quantique des champs a regardé jusqu'ici de très haut l'onde de Louis de Broglie pour l'électron et le photon. C'est pourtant la théorie des champs qui s'est embourbée dans des voies sans issue comme la théorie des cordes. Nos travaux prouvent que l'onde spinorielle est capable de rendre compte de manière satisfaisante et unifiée des quatre interactions fondamentales, les trois du modèle standard, électromagnétisme, interactions faibles, interactions fortes, et la gravitation qu'elle permet en outre d'intégrer (voir [7] et surtout [3] Chapitre 9) grâce à la présence d'un terme de masse dans l'équation d'onde de spin 1/2 (le modèle standard avait été obligé de supprimer la masse propre de l'électron pour obtenir la symétrie de jauge électro-faible).

La communauté scientifique célèbre aujourd'hui le centenaire de la Relativité Générale, et se montre hélas excessivement critique par rapport aux travaux postérieurs d'Albert Einstein. Avec un énorme courage, il a cherché jusqu'au bout de ses forces un dépassement du fossé qui s'était creusé entre cette physique rationnelle de l'invariance des lois qu'il avait inventée de toutes pièces, et la physique quantique naissante puis foisonnante. Il nous faut aujourd'hui pleinement réévaluer le travail d'Albert Einstein. L'invariance de toutes les lois physiques sous Cl_3^*, groupe incluant strictement le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ venant de l'équation d'onde de l'électron, permet de rapprocher les deux branches longtemps divergentes issues de l'électromagnétisme classique, physique quantique et gravitation.

Grand expert de la thermodynamique, Einstein ne pouvait pas se satisfaire d'une physique quantique refusant de sortir de la stationnarité. L'insertion, qu'il avait complètement réalisée, de la gravitation dans la physique des champs, dont l'outil mathématique principal est l'équation aux dérivées partielles, ne pouvait pas s'accorder à l'interprétation probabiliste qui néglige la réalité de l'onde quantique en n'en regardant qu'un aspect somme toute secondaire, un seul paramètre dépendant quadratiquement des 36 de l'onde fermionique.

Ajoutons qu'Einstein ne pouvait pas savoir l'importance en physique quantique de la chiralité, cette importance n'ayant été découverte que juste après sa mort. Hélas pour lui, son programme d'inclusion de la physique quantique dans la physique des tenseurs ne pouvait en aucun cas aboutir : le groupe fondamental d'invariance Cl_3^* est un groupe de Lie de dimension 8 qui agit sur la géométrie par un groupe de dilatations de dimension 7. La dimension manquante correspond justement à l'angle chiral de la jauge du monopôle magnétique. Donc la chiralité agit sur l'onde spinorielle, mais elle disparaît des symboles de Christoffel, donc de la géométrie différentielle ([3] Chap. 9). On peut unifier toutes les interactions, mais en partant de l'onde quantique, plus générale, pas en partant de la géométrie différentielle.

Il n'empêche que c'est sur les bases rationnelles de l'invariance, du temps irréversible et du calcul rigoureux, donc sur l'héritage d'Albert Einstein, que se bâtira la physique de ce siècle.

7 Appendice A : Les densités tensorielles

Chaque spineur est une fonction de l'espace-temps dans Cl_3 qui comporte deux variables complexes, donc 4 paramètres réels. Avec n paramètres réels on peut former n carrés et $n(n-1)/2$ paires, donc on a $n(n+1)/2$ produits possibles. Avec les 4 paramètres réels d'un spineur on obtient 10 produits qui permettent de définir un vecteur d'espace-temps et un bivecteur d'espace-temps et avec $\overline{M} = \widehat{M}^\dagger$ on a :

$$D_R = RR^\dagger;\; D_L = LL^\dagger;\; D_n = nn^\dagger;\; D_{dr} = d_r d_r^\dagger;\; D_{dg} = d_g d_g^\dagger$$
$$D_{db} = d_b d_b^\dagger;\; D_{ur} = u_r u_r^\dagger;\; D_{ug} = u_g u_g^\dagger;\; D_{ub} = u_b u_b^\dagger \tag{7.1}$$
$$S_R = R\sigma_1\overline{R};\; S_L = L\sigma_1\overline{L};\; S_n = n\sigma_1\overline{n};\; S_{dr} = d_r\sigma_1\overline{d}_r;\; S_{dg} = d_g\sigma_1\overline{d}_g$$
$$S_{db} = d_b\sigma_1\overline{d}_b;\; S_{ur} = u_r\sigma_1\overline{u}_r;\; S_{ug} = u_g\sigma_1\overline{u}_g;\; S_{ub} = u_b\sigma_1\overline{u}_b. \tag{7.2}$$

Chaque paire de spineurs permet de définir $4 \times 4 = 16$ produits qui donnent le terme général d'un multivecteur d'espace-temps, somme d'un scalaire, d'un vecteur, d'un bivecteur, d'un pseudo-vecteur et d'un pseudo-scalaire. Il y a 9 spineurs, mais comme l'équation d'onde sépare leptons et quarks nous n'avons besoin que des 3 paires de spineurs leptoniques et des 15 paires de spineurs provenant des 6 quarks. On utilise donc :

$$2R\overline{L} = a_1 + S_{RL};\; 2L\overline{R} = a_1 - S_{RL};\; a_1 = R\overline{L} + L\overline{R};\; S_{RL} = R\overline{L} - L\overline{R}$$
$$2n\sigma_1\overline{L} = a_2 + S_{nL};\; -2L\sigma_1\overline{n} = a_2 - S_{nL}$$
$$a_2 = n\sigma_1\overline{L} - L\sigma_1\overline{n};\; S_{nL} = n\sigma_1\overline{L} + L\sigma_1\overline{n}, \tag{7.3}$$
$$2R\overline{n} = a_3 + S_{Rn};\; 2n\overline{R} = a_3 - S_{Rn};\; a_3 = R\overline{n} + n\overline{R};\; S_{Rn} = R\overline{n} - n\overline{R}.$$

On a :

$$a_1 = 2(\xi_1\eta_1^* + \xi_2\eta_2^*);\; a_2 = 2(\zeta_1^*\eta_2^* - \zeta_2^*\eta_1^*);\; a_3 = 2(\xi_1\zeta_1^* + \xi_2\zeta_2^*). \tag{7.4}$$

Pour les leptons les termes impairs d'espace-temps sont :

$$I_{RL} = D_{RL} + id_{RL} = 2R\sigma_1L^\dagger;\; I_{RL}^\dagger = D_{RL} - id_{RL} = 2L\sigma_1R^\dagger,$$
$$D_{RL} = R\sigma_1L^\dagger + L\sigma_1R^\dagger;\; d_{RL} = i(-R\sigma_1L^\dagger + L\sigma_1R^\dagger),$$
$$I_{Ln} = D_{Ln} + id_{Ln} = 2nL^\dagger;\; I_{Ln}^\dagger = D_{Ln} - id_{Ln} = 2Ln^\dagger,$$
$$D_{Ln} = nL^\dagger + Ln^\dagger;\; d_{Ln} = i(-nL^\dagger + Ln^\dagger), \tag{7.5}$$
$$I_{Rn} = D_{Rn} + id_{Rn} = 2R\sigma_1n^\dagger;\; I_{Rn}^\dagger = D_{Rn} - id_{Rn} = 2n\sigma_1R^\dagger,$$
$$D_{Rn} = R\sigma_1n^\dagger + n\sigma_1R^\dagger;\; d_{Rn} = i(-R\sigma_1n^\dagger + n\sigma_1R^\dagger).$$

a_1 et S_{RL} sont connus dans la théorie de Dirac de l'électron :

$$a_1 = \det(e) = \Omega_1 + i\Omega_2 = \rho_e e^{i\beta} = e\overline{e} = 2(\xi_1\eta_1^* + \xi_2\eta_2^*) \tag{7.6}$$

où Ω_1, Ω_2 sont les deux invariants relativistes de l'onde électronique et β est l'angle de Yvon-Takabayasi. Puis on utilise :

$$s_1 = 2(\eta^*_{2ur}\eta^*_{1ug} - \eta^*_{1ur}\eta^*_{2ug});\ B_1 = u_g\sigma_1\overline{u}_r + u_r\sigma_1\overline{u}_g, \tag{7.7}$$
$$s_2 = 2(\eta^*_{2ug}\eta^*_{1ub} - \eta^*_{1ug}\eta^*_{2ub});\ B_2 = u_b\sigma_1\overline{u}_g + u_g\sigma_1\overline{u}_b, \tag{7.8}$$
$$s_3 = 2(\eta^*_{2ub}\eta^*_{1ur} - \eta^*_{1ub}\eta^*_{2ur});\ B_3 = u_r\sigma_1\overline{u}_b + u_b\sigma_1\overline{u}_r, \tag{7.9}$$
$$s_4 = 2(\eta^*_{2dr}\eta^*_{1dg} - \eta^*_{1dr}\eta^*_{2dg});\ B_4 = d_g\sigma_1\overline{d}_r + d_r\sigma_1\overline{d}_g, \tag{7.10}$$
$$s_5 = 2(\eta^*_{2dg}\eta^*_{1db} - \eta^*_{1dg}\eta^*_{2db});\ B_5 = d_b\sigma_1\overline{d}_g + d_g\sigma_1\overline{d}_b, \tag{7.11}$$
$$s_6 = 2(\eta^*_{2db}\eta^*_{1dr} - \eta^*_{1db}\eta^*_{2dr});\ B_6 = d_r\sigma_1\overline{d}_b + d_b\sigma_1\overline{d}_r, \tag{7.12}$$
$$s_7 = 2(\eta^*_{2ur}\eta^*_{1dr} - \eta^*_{1ur}\eta^*_{2dr});\ B_7 = d_r\sigma_1\overline{u}_r + u_r\sigma_1\overline{d}_r, \tag{7.13}$$
$$s_8 = 2(\eta^*_{2ug}\eta^*_{1dg} - \eta^*_{1ug}\eta^*_{2dg});\ B_8 = d_g\sigma_1\overline{u}_g + u_g\sigma_1\overline{d}_g, \tag{7.14}$$
$$s_9 = 2(\eta^*_{2ub}\eta^*_{1db} - \eta^*_{1ub}\eta^*_{2db});\ B_9 = d_b\sigma_1\overline{u}_b + u_b\sigma_1\overline{d}_b, \tag{7.15}$$
$$s_{10} = 2(\eta^*_{2ur}\eta^*_{1dg} - \eta^*_{1ur}\eta^*_{2dg});\ B_{10} = d_g\sigma_1\overline{u}_r + u_r\sigma_1\overline{d}_g, \tag{7.16}$$
$$s_{11} = 2(\eta^*_{2ug}\eta^*_{1db} - \eta^*_{1ug}\eta^*_{2db});\ B_{11} = d_b\sigma_1\overline{u}_g + u_g\sigma_1\overline{d}_b, \tag{7.17}$$
$$s_{12} = 2(\eta^*_{2ub}\eta^*_{1dr} - \eta^*_{1ub}\eta^*_{2dr});\ B_{12} = d_r\sigma_1\overline{u}_b + u_b\sigma_1\overline{d}_r, \tag{7.18}$$
$$s_{13} = 2(\eta^*_{2ur}\eta^*_{1db} - \eta^*_{1ur}\eta^*_{2db});\ B_{13} = d_b\sigma_1\overline{u}_r + u_r\sigma_1\overline{d}_b, \tag{7.19}$$
$$s_{14} = 2(\eta^*_{2ug}\eta^*_{1dr} - \eta^*_{1ug}\eta^*_{2dr});\ B_{14} = d_r\sigma_1\overline{u}_g + u_g\sigma_1\overline{d}_r, \tag{7.20}$$
$$s_{15} = 2(\eta^*_{2ub}\eta^*_{1dg} - \eta^*_{1ub}\eta^*_{2dg});\ B_{15} = d_g\sigma_1\overline{u}_b + u_b\sigma_1\overline{d}_g. \tag{7.21}$$

Pour les termes impairs d'espace-temps on définit :

$$1_V = u_r u_g^\dagger + u_g u_r^\dagger;\ 1_v = i(-u_r u_g^\dagger + u_g u_r^\dagger), \tag{7.22}$$
$$2_V = u_g u_b^\dagger + u_b u_g^\dagger;\ 2_v = i(-u_g u_b^\dagger + u_b u_g^\dagger), \tag{7.23}$$
$$3_V = u_b u_r^\dagger + u_r u_b^\dagger;\ 3_v = i(-u_b u_r^\dagger + u_r u_b^\dagger), \tag{7.24}$$
$$4_V = d_r d_g^\dagger + d_g d_r^\dagger;\ 4_v = i(-d_r d_g^\dagger + d_g d_r^\dagger), \tag{7.25}$$
$$5_V = d_g d_b^\dagger + d_b d_g^\dagger;\ 5_v = i(-d_g d_b^\dagger + d_b d_g^\dagger), \tag{7.26}$$
$$6_V = d_b d_r^\dagger + d_r d_b^\dagger;\ 6_v = i(-d_b d_r^\dagger + d_r d_b^\dagger), \tag{7.27}$$
$$7_V = d_r u_r^\dagger + u_r d_r^\dagger;\ 7_v = i(-d_r u_r^\dagger + u_r d_r^\dagger), \tag{7.28}$$
$$8_V = d_g u_g^\dagger + u_g d_g^\dagger;\ 8_v = i(-d_g u_g^\dagger + u_g d_g^\dagger), \tag{7.29}$$
$$9_V = d_b u_b^\dagger + u_b d_b^\dagger;\ 9_v = i(-d_b u_b^\dagger + u_b d_b^\dagger), \tag{7.30}$$

$$A_V = d_g u_r^\dagger + u_r d_g^\dagger;\ A_v = i(-d_g u_r^\dagger + u_r d_g^\dagger), \tag{7.31}$$
$$B_V = d_b u_g^\dagger + u_g d_b^\dagger;\ B_v = i(-d_b u_g^\dagger + u_g d_b^\dagger), \tag{7.32}$$
$$C_V = d_r u_b^\dagger + u_b d_r^\dagger;\ C_v = i(-d_r u_b^\dagger + u_b d_r^\dagger), \tag{7.33}$$
$$D_V = d_b u_r^\dagger + u_r d_b^\dagger;\ D_v = i(-d_b u_r^\dagger + u_r d_b^\dagger), \tag{7.34}$$
$$E_V = d_r u_g^\dagger + u_g d_r^\dagger;\ E_v = i(-d_r u_g^\dagger + u_g d_r^\dagger), \tag{7.35}$$
$$F_V = d_g u_b^\dagger + u_b d_g^\dagger;\ F_v = i(-d_g u_b^\dagger + u_b d_g^\dagger). \tag{7.36}$$

Les termes de masse vérifient [5] :

$$\rho^2\chi_l = \begin{pmatrix} a_1^* e + a_2^* n\sigma_1 + a_3^* n & -a_2^* L\sigma_1 + a_3^* R \\ a_2\widehat{L}\sigma_1 + a_3\widehat{R} & a_1\widehat{e} - a_2\widehat{n}\sigma_1 + a_3\widehat{n} \end{pmatrix}, \tag{7.37}$$

$$\rho^2\chi_r = \tag{7.38}$$
$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} s_4^* d_g - s_6^* d_b - s_7^* u_r \\ -s_{12}^* u_b - s_{14}^* u_g \end{pmatrix}\sigma_1 & \begin{pmatrix} s_1^* u_g - s_3^* u_b + s_7^* d_r \\ +s_{10}^* d_g + s_{13}^* d_b \end{pmatrix}\sigma_1 \\ \begin{pmatrix} -s_1\widehat{u}_g + s_3\widehat{u}_b - s_7\widehat{d}_r \\ -s_{10}^*\widehat{d}_g - s_{13}^*\widehat{d}_b \end{pmatrix}\sigma_1 & \begin{pmatrix} -s_4\widehat{d}_g + s_6\widehat{d}_b + s_7\widehat{d}_r \\ +s_{12}^*\widehat{u}_b + s_{14}^*\widehat{u}_g \end{pmatrix}\sigma_1 \end{pmatrix},$$

$$\rho^2\chi_g = \tag{7.39}$$
$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} s_5^* d_b - s_4^* d_r - s_8^* u_g \\ -s_{10}^* u_r - s_{15}^* u_b \end{pmatrix}\sigma_1 & \begin{pmatrix} s_2^* u_b - s_1^* u_r + s_8^* d_g \\ +s_{11}^* d_b + s_{14}^* d_r \end{pmatrix}\sigma_1 \\ \begin{pmatrix} -s_2\widehat{u}_b + s_1\widehat{u}_r - s_8\widehat{d}_g \\ -s_{11}^*\widehat{d}_b - s_{14}^*\widehat{d}_r \end{pmatrix}\sigma_1 & \begin{pmatrix} -s_5\widehat{d}_b + s_4\widehat{d}_r + s_8\widehat{u}_g \\ +s_{10}^*\widehat{u}_r + s_{15}^*\widehat{u}_b \end{pmatrix}\sigma_1 \end{pmatrix},$$

$$\rho^2\chi_b = \tag{7.40}$$
$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} s_6^* d_r - s_5^* d_g - s_9^* u_b \\ -s_{11}^* u_g - s_{13}^* u_r \end{pmatrix}\sigma_1 & \begin{pmatrix} s_3^* u_r - s_2^* u_g + s_9^* d_b \\ +s_{12}^* d_r + s_{15}^* d_g \end{pmatrix}\sigma_1 \\ \begin{pmatrix} -s_3\widehat{u}_r + s_2\widehat{u}_g - s_9\widehat{d}_b \\ -s_{12}^*\widehat{d}_r - s_{15}^*\widehat{d}_g \end{pmatrix}\sigma_1 & \begin{pmatrix} -s_6\widehat{d}_r + s_5\widehat{d}_g + s_9\widehat{u}_b \\ +s_{11}^*\widehat{u}_g + s_{13}^*\widehat{u}_r \end{pmatrix}\sigma_1 \end{pmatrix}.$$

8 Appendice B : Calcul des potentiels de jauge

8.1 Sous-groupe engendré par $\underline{P}_3$

On a

$$\underline{P}_3(\Psi) = \Psi_L L_{0132} = -\begin{pmatrix} l_L\mathbf{i} & r\mathbf{i} \\ g\mathbf{i} & b\mathbf{i} \end{pmatrix}, \tag{8.1}$$

$$-l_L\mathbf{i} = \begin{pmatrix} -iL & in \\ -i\widehat{n} & i\widehat{L} \end{pmatrix};\ -r\mathbf{i} = \begin{pmatrix} -id_r & iu_r \\ -i\widehat{u}_r & i\widehat{d}_r \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Ceci donne

$$\Psi'_L = [\exp(\theta\underline{P}_3)](\Psi_L) = \Psi_L e^{\theta L_{0132}} = \begin{pmatrix} l_L e^{-\theta\mathbf{i}} & re^{-\theta\mathbf{i}} \\ ge^{-\theta\mathbf{i}} & be^{-\theta\mathbf{i}} \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

La transformation de jauge vérifie :

$$\mathrm{w}'^j_\mu\underline{P}_j = \Big[\exp(\theta\underline{P}_3)\mathrm{w}^j_\mu\underline{P}_j - \partial_\mu[\exp(\theta\underline{P}_3)]\Big]\exp(-\theta\underline{P}_3), \tag{8.4}$$

ce qui nous donne :

$$\mathrm{w}'^3 = \mathrm{w}^3 - \nabla\theta, \tag{8.5}$$

$$\mathrm{w}'^1 = \cos(2\theta)\mathrm{w}^1 - \sin(2\theta)\mathrm{w}^2, \tag{8.6}$$

$$\mathrm{w}'^2 = \sin(2\theta)\mathrm{w}^1 + \cos(2\theta)\mathrm{w}^2. \tag{8.7}$$

Dans la transformation de jauge (8.4) on a, pour $c = r, g, b$:

$$L' = Le^{-i\theta};\ n' = ne^{i\theta};\ d'_c = d_c e^{-i\theta};\ u'_c = u_c e^{i\theta}, \tag{8.8}$$

$$2n'L'^\dagger = D'_{Ln} + id'_{Ln} = e^{2i\theta}2nL^\dagger = e^{2i\theta}(D_{Ln} + id_{Ln}), \tag{8.9}$$

$$D'_{Ln} = \cos(2\theta)D_{Ln} - \sin(2\theta)d_{Ln}, \tag{8.10}$$

$$d'_{Ln} = \sin(2\theta)D_{Ln} + \cos(2\theta)d_{Ln}. \tag{8.11}$$

Pour les quarks on a de même :

$$2u'_r d'^\dagger_r = 7'_V - i7'_v = e^{2i\theta}2u_r d_r^\dagger = e^{2i\theta}(7_V - i7_v), \tag{8.12}$$

$$7'_V = \cos(2\theta)7_V - \sin(2\theta)(-7_v), \tag{8.13}$$

$$(-7'_v) = \sin(2\theta)7_V + \cos(2\theta)(-7_v), \tag{8.14}$$

avec deux autres relations similaires pour les couleurs g et b, on est donc amené à :

$$\mathrm{w}^1 = \mathrm{w}^{1\mu}\sigma_\mu = q(D_{Ln} + 7_V + 8_V + 9_V) \tag{8.15}$$

$$\mathrm{w}^2 = \mathrm{w}^{1\mu}\sigma_\mu = q(d_{Ln} - 7_v - 8_v - 9_v). \tag{8.16}$$

Le calcul de ces vecteurs peut être fait directement à partir de $Cl_{1,5}$ et donne :

$$\underline{\mathrm{w}}^1 = \mathrm{w}^{1\mu}L_\mu = q\langle\Psi L_{035}\widetilde{\Psi}\underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{i}}\Psi L_{035}\widetilde{\Psi}\rangle_1, \tag{8.17}$$

$$\underline{\mathrm{w}}^2 = \mathrm{w}^{2\mu}L_\mu = q\langle\Psi L_{125}\widetilde{\Psi}\underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{i}}\Psi L_{125}\widetilde{\Psi}\rangle_1. \tag{8.18}$$

8.2 Sous-groupe engendré par $\underline{P}_2$

On a

$$\underline{P}_2(\Psi) = \Psi_L L_{5012} = \begin{pmatrix} l_L\gamma_3 & r\gamma_3 \\ g\gamma_3 & b\gamma_3 \end{pmatrix} \tag{8.19}$$

$$\Psi' = \begin{pmatrix} l'_L & r' \\ g' & b' \end{pmatrix} = [\exp(\theta\underline{P}_2)](\Psi) = \begin{pmatrix} l_L\exp(\theta\gamma_3) & r\exp(\theta\gamma_3) \\ g\exp(\theta\gamma_3) & b\exp(\theta\gamma_3) \end{pmatrix} \tag{8.20}$$

Ceci donne

$$l'_L = l_L e^{\theta\gamma_3};\ r' = re^{\theta\gamma_3};\ g' = ge^{\theta\gamma_3};\ b' = be^{\theta\gamma_3}. \tag{8.21}$$

La transformation de jauge vérifie :

$$\mathrm{w}'^j_\mu\underline{P}_j = \Big[\exp(\theta\underline{P}_2)\mathrm{w}^j_\mu\underline{P}_j - \partial_\mu[\exp(\theta\underline{P}_2)]\Big]\exp(-\theta\underline{P}_2), \tag{8.22}$$

ce qui nous donne :

$$\mathrm{w}'^2 = \mathrm{w}^2 - \nabla\theta, \tag{8.23}$$
$$\mathrm{w}'^3 = \cos(2\theta)\mathrm{w}^3 - \sin(2\theta)\mathrm{w}^1, \tag{8.24}$$
$$\mathrm{w}'^1 = \sin(2\theta)\mathrm{w}^3 + \cos(2\theta)\mathrm{w}^1. \tag{8.25}$$

Dans la transformation de jauge (8.22) on a, pour $c = r, g, b$ et avec $C = \cos(\theta)$, $S = \sin(\theta)$:

$$L' = CL + Sn;\ n' = Cn - SL;\ d'_c = Cd_c + Su_c;\ u'_c = Cu_c - Sd_c,$$
$$D'_{Ln} = n'L'^\dagger + L'n'^\dagger, \tag{8.26}$$
$$D'_{Ln} = \cos(2\theta)D_{Ln} + \sin(2\theta)(D_n - D_L), \tag{8.27}$$
$$D'_n - D'_L = -\sin(2\theta)D_{Ln} + \cos(2\theta)(D_n - D_L). \tag{8.28}$$

Pour les quarks on a de même :

$$7'_V = \cos(2\theta)7_V + \sin(2\theta)(D_{ur} - D_{dr}), \tag{8.29}$$
$$(D'_{ur} - D'_{dr}) = \sin(2\theta)7_V + \cos(2\theta)(D_{ur} - D_{dr}), \tag{8.30}$$

avec deux autres relations similaires pour les couleurs g et b, on est donc amené à :

$$\mathrm{w}^3 = q(D_n - D_L + D_{ur} + D_{ug} + D_{ub} - D_{dr} - D_{dg} - D_{db}). \tag{8.31}$$

8.3 Jauge électromagnétique et jauge chirale

Avec les opérateurs Γ_k du groupe de jauge $SU(3)$ (voir [3] p. 98) la dérivée covariante s'écrit

$$\underline{D}\Psi = \begin{pmatrix} D(g) & D(b) \\ D(l) & D(r) \end{pmatrix}, \tag{8.32}$$

avec

$$D(l) = \boldsymbol{\partial} l + \mathbf{b}P_0(l) + \mathbf{w}^1 l_L\gamma_3\mathbf{i} + \mathbf{w}^2 l_L\gamma_3 + \mathbf{w}^3 l_L(-\mathbf{i}) \tag{8.33}$$

$$\begin{aligned} D(r) =& \boldsymbol{\partial} r + \mathbf{b}P_0'(l) + \mathbf{w}^1 r\gamma_3\mathbf{i} + \mathbf{w}^2 r\gamma_3 + \mathbf{w}^3 r(-\mathbf{i}) \\ &+ (\mathbf{h}^1\mathbf{i} + \mathbf{h}^2)g + (\mathbf{q}^1\mathbf{i} - \mathbf{q}^2)b + (\mathbf{h}^3 - \mathbf{q}^3)\mathbf{i}r, \end{aligned} \tag{8.34}$$

$$\begin{aligned} D(g) =& \boldsymbol{\partial} g + \mathbf{b}P_0'(g) + \mathbf{w}^1 g\gamma_3\mathbf{i} + \mathbf{w}^2 g\gamma_3 + \mathbf{w}^3 g(-\mathbf{i}) \\ &+ (\mathbf{p}^1\mathbf{i} + \mathbf{p}^2)b + (\mathbf{h}^1\mathbf{i} - \mathbf{h}^2)r + (\mathbf{p}^3 - \mathbf{h}^3)\mathbf{i}g, \end{aligned} \tag{8.35}$$

$$\begin{aligned} D(b) =& \boldsymbol{\partial} b + \mathbf{b}P_0'(b) + \mathbf{w}^1 b\gamma_3\mathbf{i} + \mathbf{w}^2 b\gamma_3 + \mathbf{w}^3 b(-\mathbf{i}) \\ &+ (\mathbf{q}^1\mathbf{i} + \mathbf{q}^2)r + (\mathbf{p}^1\mathbf{i} - \mathbf{p}^2)g + (\mathbf{q}^3 - \mathbf{p}^3)\mathbf{i}r. \end{aligned} \tag{8.36}$$

En algèbre d'espace, la dérivée covariante prend la forme :

$$D\widehat{R} = \nabla\widehat{R} - 2i\mathrm{b}\widehat{R}, \tag{8.37}$$

$$D\widehat{L} = \nabla\widehat{L} + i\mathrm{b}\widehat{L} - i[(\mathrm{w}^1 + i\mathrm{w}^2)\widehat{n} - \mathrm{w}^3\widehat{L}], \tag{8.38}$$

$$D\widehat{n} = \nabla\widehat{n} + i\mathrm{b}\widehat{n} - i[(\mathrm{w}^1 - i\mathrm{w}^2)\widehat{L} + \mathrm{w}^3\widehat{n}]. \tag{8.39}$$

Pour la partie leptonique l'équation d'onde équivaut à :

$$D\widehat{R} = \frac{im}{\rho}(a_1^* L + a_3^* n), \tag{8.40}$$

$$D\widehat{L} = \frac{im}{\rho}(-a_1^* R - a_2^* n\sigma_1), \tag{8.41}$$

$$D\widehat{n} = \frac{im}{\rho}(a_2^* L\sigma_1 - a_3^* R). \tag{8.42}$$

Pour les quarks la dérivée covariante prend la forme :

$$\begin{aligned} D\widehat{d_r} =& \nabla\widehat{d_r} - \frac{i}{3}\mathrm{b}\widehat{d_r} - i(\mathrm{w}^1 + i\mathrm{w}^2)\widehat{u}_r + i(\mathrm{w}^3 - \mathrm{h}^3 + \mathrm{q}^3)\widehat{d_r} \\ &- i(\mathrm{h}^1 + i\mathrm{h}^2)\widehat{d_g} + i(-\mathrm{q}^1 + i\mathrm{q}^2)\widehat{d_b}, \end{aligned} \tag{8.43}$$

$$\begin{aligned} D\widehat{u}_r =& \nabla\widehat{u}_r - \frac{i}{3}\mathrm{b}\widehat{u}_r - i(\mathrm{w}^1 - i\mathrm{w}^2)\widehat{d_r} + i(-\mathrm{w}^3 - \mathrm{h}^3 + \mathrm{q}^3)\widehat{u}_r \\ &- i(\mathrm{h}^1 + i\mathrm{h}^2)\widehat{u}_g + i(-\mathrm{q}^1 + i\mathrm{q}^2)\widehat{u}_b, \end{aligned} \tag{8.44}$$

$$\begin{aligned} D\widehat{d}_g =& \nabla\widehat{d}_g - \frac{i}{3}\mathrm{b}\widehat{d}_g - i(\mathrm{w}^1 + i\mathrm{w}^2)\widehat{u}_g + i(\mathrm{w}^3 - \mathrm{p}^3 + \mathrm{h}^3)\widehat{d}_g \\ & - i(\mathrm{p}^1 + i\mathrm{p}^2)\widehat{d}_b + i(-\mathrm{h}^1 + i\mathrm{h}^2)\widehat{d}_r, \end{aligned} \tag{8.45}$$

$$\begin{aligned} D\widehat{u}_g =& \nabla\widehat{u}_g - \frac{i}{3}\mathrm{b}\widehat{u}_g - i(\mathrm{w}^1 - i\mathrm{w}^2)\widehat{d}_g + i(-\mathrm{w}^3 - \mathrm{p}^3 + \mathrm{h}^3)\widehat{u}_g \\ & - i(\mathrm{p}^1 + i\mathrm{p}^2)\widehat{u}_b + i(-\mathrm{h}^1 + i\mathrm{h}^2)\widehat{u}_r, \end{aligned} \tag{8.46}$$

$$\begin{aligned} D\widehat{d}_b =& \nabla\widehat{d}_b - \frac{i}{3}\mathrm{b}\widehat{d}_b - i(\mathrm{w}^1 + i\mathrm{w}^2)\widehat{u}_b + i(\mathrm{w}^3 - \mathrm{q}^3 + \mathrm{p}^3)\widehat{d}_b \\ & - i(\mathrm{q}^1 + i\mathrm{q}^2)\widehat{d}_r + i(-\mathrm{p}^1 + i\mathrm{p}^2)\widehat{d}_g, \end{aligned} \tag{8.47}$$

$$\begin{aligned} D\widehat{u}_b =& \nabla\widehat{u}_b - \frac{i}{3}\mathrm{b}\widehat{u}_b - i(\mathrm{w}^1 - i\mathrm{w}^2)\widehat{d}_b + i(-\mathrm{w}^3 - \mathrm{q}^3 + \mathrm{p}^3)\widehat{u}_b \\ & - i(\mathrm{q}^1 + i\mathrm{q}^2)\widehat{u}_r + i(-\mathrm{p}^1 + i\mathrm{p}^2)\widehat{u}_g, \end{aligned} \tag{8.48}$$

donc pour la partie des quarks l'équation d'onde équivaut à :

$$iD\widehat{d}_r = \frac{m}{\rho}(s_4^* d_g - s_6^* d_b - s_7^* u_r - s_{12}^* u_b - s_{14}^* u_g)\sigma_1, \tag{8.49}$$

$$iD\widehat{u}_r = \frac{m}{\rho}(s_1^* u_g - s_3^* u_b + s_7^* d_r + s_{10}^* d_g + s_{13}^* d_b)\sigma_1, \tag{8.50}$$

$$iD\widehat{d}_g = \frac{m}{\rho}(s_5^* d_b - s_4^* d_r - s_8^* u_g - s_{10}^* u_r - s_{15}^* u_b)\sigma_1, \tag{8.51}$$

$$iD\widehat{u}_g = \frac{m}{\rho}(s_2^* u_b - s_1^* u_r + s_8^* d_g + s_{11}^* d_b + s_{14}^* d_r)\sigma_1, \tag{8.52}$$

$$iD\widehat{d}_b = \frac{m}{\rho}(s_6^* d_r - s_5^* d_g - s_9^* u_b - s_{11}^* u_g - s_{13}^* u_r)\sigma_1, \tag{8.53}$$

$$iD\widehat{u}_b = \frac{m}{\rho}(s_3^* u_r - s_2^* u_g + s_9^* d_b + s_{12}^* d_r + s_{15}^* d_g)\sigma_1, \tag{8.54}$$

La dérivation des potentiels qui a été justifiée en [9] comme seule dérivation compatible avec l'équation d'onde et ayant la bonne variance relativiste donne pour $D_L = LL^\dagger$ la dérivée $\dot{D}_L = (\nabla\widehat{L})\overline{L} - L(L^\dagger\widehat{\nabla})$. Pour obtenir une dérivation covariante, on remplace dans cette dérivée les dérivées partielles par des dérivées covariantes. On obtient :

$$B_L = (D\widehat{L})\overline{L} - L(L^\dagger\widehat{D}) = -\frac{im}{\rho}(a_1^* S_{RL} + a_2^* S_{nL}), \tag{8.55}$$

$$B_R = (D\widehat{R})\overline{R} - R(R^\dagger\widehat{D}) = -\frac{im}{\rho}(a_1^* S_{RL} + a_3^* S_{Rn}), \tag{8.56}$$

$$B_n = (D\widehat{n})\overline{n} - n(n^\dagger\widehat{D}) = \frac{im}{\rho}(a_2^* S_{nL} - a_3^* S_{Rn}). \tag{8.57}$$

Pour les quarks on a

$$B_{dr} = \frac{im}{\rho}(-s_4^*B_4 + s_6^*B_6 + s_7^*B_7 + s_{12}^*B_{12} + s_{14}^*B_{14}), \tag{8.58}$$

$$B_{ur} = \frac{im}{\rho}(-s_1^*B_1 + s_3^*B_3 - s_7^*B_7 - s_{10}^*B_{10} - s_{13}^*B_{13}), \tag{8.59}$$

$$B_{dg} = \frac{im}{\rho}(-s_5^*B_5 + s_4^*B_4 + s_8^*B_8 + s_{10}^*B_{10} + s_{15}^*B_{15}), \tag{8.60}$$

$$B_{ug} = \frac{im}{\rho}(-s_2^*B_2 + s_1^*B_1 - s_8^*B_8 - s_{11}^*B_{11} - s_{14}^*B_{14}), \tag{8.61}$$

$$B_{db} = \frac{im}{\rho}(-s_6^*B_6 + s_5^*B_5 + s_9^*B_9 + s_{11}^*B_{11} + s_{13}^*B_{13}), \tag{8.62}$$

$$B_{ub} = \frac{im}{\rho}(-s_3^*B_3 + s_2^*B_2 - s_9^*B_9 - s_{12}^*B_{12} - s_{15}^*B_{15}). \tag{8.63}$$

Ceci implique :

$$B_R - B_L - B_n - B_{dr} - B_{dg} - B_{db} - B_{ur} - B_{ug} - B_{ub} = 0. \tag{8.64}$$

C'est ce qui permet d'affirmer le caractère très particulier du champ A, dont la dérivée covariante est nulle. Aucune autre combinaison des champs de jauge ne possède cette propriété, qui permet non seulement d'identifier le potentiel électromagnétique, mais en plus d'obtenir son unicité. On en déduit, en utilisant la valeur de w^3, la valeur du quatrième potentiel du groupe de jauge, celui correspondant à la jauge chirale :

$$\mathrm{b} = \frac{q}{3}(2D_R - D_L - D_{dr} - D_{dg} - D_{db}) - q(D_n + D_{ur} + D_{ug} + D_{ub}). \tag{8.65}$$

8.4 Sous-groupe engendré par $\underline{\mathbf{i}}\Gamma_1$

On a avec $C = \cos(\theta)$, $S = \sin(\theta)$:

$$\underline{\mathbf{i}}\Gamma_1 \begin{pmatrix} l & r \\ g & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i}g \\ \mathbf{i}r & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.66}$$

$$\Psi' = \begin{pmatrix} l' & r' \\ g' & b' \end{pmatrix} = [\exp(\theta\underline{\mathbf{i}}\Gamma_1)](\Psi) = \begin{pmatrix} l & Cr + S\mathbf{i}g \\ Cg + S\mathbf{i}r & b \end{pmatrix}. \tag{8.67}$$

Ceci nous donne :

$$l' = l;\ a'_j = a_j;\ b' = b; \tag{8.68}$$
$$r' = Cr + \mathbf{i}Sg;\ g' = Cg + \mathbf{i}Sr \tag{8.69}$$
$$d'_r = Cd_r + iSd_g;\ u'_r = Cu_r + iSu_g; \tag{8.70}$$
$$d'_g = Cd_g + iSd_r;\ u'_g = Cu_g + iSu_r; \tag{8.71}$$

et encore

$$\eta'^*_{1dr} = C\eta^*_{1dr} + iS\eta^*_{1dg};\ \eta'^*_{1ur} = C\eta^*_{1ur} + iS\eta^*_{1ug} \tag{8.72}$$
$$\eta'^*_{2dr} = C\eta^*_{2dr} + iS\eta^*_{2dg};\ \eta'^*_{2ur} = C\eta^*_{2ur} + iS\eta^*_{2ug} \tag{8.73}$$
$$\eta'^*_{1dg} = C\eta^*_{1dg} + iS\eta^*_{1dr};\ \eta'^*_{1ug} = C\eta^*_{1ug} + iS\eta^*_{1ur} \tag{8.74}$$
$$\eta'^*_{2dg} = C\eta^*_{2dg} + iS\eta^*_{2dr};\ \eta'^*_{2ug} = C\eta^*_{2ug} + iS\eta^*_{2ur} \tag{8.75}$$

Ceci donne pour les invariants s_j

$$s'_1 = s_1;\ s'_4 = s_4;\ s'_9 = s_9 \tag{8.76}$$
$$s'_2 = Cs_2 - iSs_3;\ s'_3 = Cs_3 - iSs_2 \tag{8.77}$$
$$s'_5 = Cs_5 - iSs_6;\ s'_6 = Cs_6 - iSs_5 \tag{8.78}$$
$$s'_{11} = Cs_{11} + iSs_{13};\ s'_{13} = Cs_{13} + iSs_{11} \tag{8.79}$$
$$s'_{12} = Cs_{12} + iSs_{15};\ s'_{15} = Cs_{15} + iSs_{12} \tag{8.80}$$
$$s'_7 = C^2s_7 - S^2s_8 + iCSs_{10} + iCSs_{14} \tag{8.81}$$
$$s'_8 = C^2s_8 - S^2s_7 + iCSs_{14} + iCSs_{10} \tag{8.82}$$
$$s'_{10} = C^2s_{10} - S^2s_{14} + iCSs_7 + iCSs_8 \tag{8.83}$$
$$s'_{14} = C^2s_{14} - S^2s_{10} + iCSs_8 + iCSs_7 \tag{8.84}$$

On obtient alors

$$s'_2s'^*_2 + s'_3s'^*_3 = s_2s^*_2 + s_3s^*_3 \tag{8.85}$$
$$s'_5s'^*_5 + s'_6s'^*_6 = s_5s^*_5 + s_6s^*_6 \tag{8.86}$$
$$s'_{11}s'^*_{11} + s'_{13}s'^*_{13} = s_{11}s^*_{11} + s_{13}s^*_{13} \tag{8.87}$$
$$s'_{12}s'^*_{12} + s'_{15}s'^*_{15} = s_{12}s^*_{12} + s_{15}s^*_{15} \tag{8.88}$$
$$s'_7s'^*_7 + s'_8s'^*_8 + s'_{10}s'^*_{10} + s'_{14}s'^*_{14} = s_7s^*_7 + s_8s^*_8 + s_{10}s^*_{10} + s_{14}s^*_{14} \tag{8.89}$$
$$\rho' = \rho. \tag{8.90}$$

Puis on pose

$$\chi_r = \begin{pmatrix} A_r B_r \\ \widehat{B}_r \widehat{A}_r \end{pmatrix};\ \chi'_r = \begin{pmatrix} A'_r B'_r \\ \widehat{B}'_r \widehat{A}'_r \end{pmatrix} \tag{8.91}$$

$$\chi_g = \begin{pmatrix} A_g B_g \\ \widehat{B}_g \widehat{A}_g \end{pmatrix};\ \chi'_g = \begin{pmatrix} A'_g B'_g \\ \widehat{B}'_g \widehat{A}'_g \end{pmatrix} \tag{8.92}$$

et l'on obtient

$$A'_r = CA_r - iSA_g;\ B'_r = CB_r - iSB_g \tag{8.93}$$

$$A'_g = CA_g - iSA_r;\ B'_g = CB_g - iSB_r. \tag{8.94}$$

Ceci donne finalement

$$\chi'_r = C\chi_r - \mathbf{i}S\chi_g;\ \chi'_g = C\chi_g - \mathbf{i}S\chi_r. \tag{8.95}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} &D'_{ur} + D'_{dr} - D'_{ug} - D'_{dg} \\ &= \cos(2\theta)(D_{ur} + D_{dr} - D_{ug} - D_{dg}) - \sin(2\theta)(1_v + 4_v) \end{aligned} \tag{8.96}$$

$$1'_v + 4'_v = \cos(2\theta)(1_v + 4_v) - \sin(2\theta)(D_{ur} + D_{dr} - D_{ug} - D_{dg}) \tag{8.97}$$

La transformation de jauge vérifie :

$$\mathrm{h'}^j_\mu\Delta^1_j = \Big[\exp(\theta\Delta^1_1)\mathrm{h}^j_\mu\Delta^1_j - \partial_\mu[\exp(\theta\Delta^1_1)]\Big]\exp(-\theta\Delta^1_1), \tag{8.98}$$

ce qui nous donne :

$$\mathrm{h'}^1 = \mathrm{h}^1 - \nabla\theta, \tag{8.99}$$

$$\mathrm{h'}^2 = \cos(2\theta)\mathrm{h}^2 + \sin(2\theta)\mathrm{h}^3, \tag{8.100}$$

$$\mathrm{h'}^3 = -\sin(2\theta)\mathrm{h}^2 + \cos(2\theta)\mathrm{h}^3. \tag{8.101}$$

La comparaison avec (8.97) donne

$$h^2 = \frac{g_3}{2}(-1_v - 4_v), \tag{8.102}$$

$$h^3 = \frac{g_3}{2}(D_{ur} + D_{dr} - D_{ug} - D_{dg}). \tag{8.103}$$

8.5 Sous-groupe engendré par $\underline{\mathbf{i}}\Gamma_3$

On a maintenant :

$$\underline{\mathbf{i}}\Gamma_1 \begin{pmatrix} l & r \\ g & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i}g \\ \mathbf{i}r & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.104}$$

$$\Psi' = \begin{pmatrix} l' & r' \\ g' & b' \end{pmatrix} = [\exp(\theta \underline{\mathbf{i}}\Gamma_3)](\Psi) = \begin{pmatrix} l & e^{\mathbf{i}\theta} r \\ e^{-\mathbf{i}\theta} g & b \end{pmatrix}. \tag{8.105}$$

Ceci nous donne :

$$l' = l;\ a'_j = a_j;\ b' = b, \tag{8.106}$$
$$r' = e^{\mathbf{i}\theta} r;\ g' = e^{-\mathbf{i}\theta} g, \tag{8.107}$$
$$d'_r = e^{i\theta} d_r;\ u'_r = e^{i\theta} u_r, \tag{8.108}$$
$$d'_g = e^{-i\theta} d_g;\ u'_g = e^{-i\theta} u_g, \tag{8.109}$$

et encore

$$\eta'^*_{1dr} = e^{-i\theta} \eta^*_{1dr};\ \eta'^*_{1ur} = e^{-i\theta} \eta^*_{1ur}, \tag{8.110}$$
$$\eta'^*_{2dr} = e^{-i\theta} \eta^*_{2dr};\ \eta'^*_{2ur} = e^{-i\theta} \eta^*_{2ur}, \tag{8.111}$$
$$\eta'^*_{1dg} = e^{i\theta} \eta^*_{1dg};\ \eta'^*_{1ug} = e^{i\theta} \eta^*_{1ug}, \tag{8.112}$$
$$\eta'^*_{2dg} = e^{i\theta} eta^*_{2dg};\ \eta'^*_{2ug} = e^{i\theta} \eta^*_{2ug}. \tag{8.113}$$

Ceci donne pour les invariants s_j

$$s'_1 = s_1;\ s'_2 = e^{-i\theta} s_2;\ s'_3 = e^{i\theta} s_3, \tag{8.114}$$
$$s'_4 = s_4;\ s'_5 = e^{-i\theta} s_5;\ s'_6 = e^{i\theta} s_6, \tag{8.115}$$
$$s'_9 = s_9;\ s'_8 = e^{-2i\theta} s_8;\ s'_7 = e^{2i\theta} s_7, \tag{8.116}$$
$$s'_{10} = s_{10};\ s'_{11} = e^{-i\theta} s_{11};\ s'_{12} = e^{i\theta} s_{12}, \tag{8.117}$$
$$s'_{14} = s_{10};\ s'_{15} = e^{-i\theta} s_{15};\ s'_{13} = e^{i\theta} s_{13}, \tag{8.118}$$
$$\rho' = \rho. \tag{8.119}$$

Puis on obtient

$$\chi'_r = e^{-\mathbf{i}\theta} \chi_r;\ \chi'_g = e^{\mathbf{i}\theta} \chi_g. \tag{8.120}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} 1'_V + 4'_V &= \cos(2\theta)(1_V + 4_V) + \sin(2\theta)(-1_v - 4_v) \\ -1'_v - 4'_v &= \cos(2\theta)(-1_v - 4_v) - \sin(2\theta)(1_V + 4_V) \end{aligned} \tag{8.121}$$

La transformation de jauge vérifie :

$$\mathrm{h'}^j_\mu \Delta^1_j = \Big[\exp(\theta\Delta^1_3)\mathrm{h}^j_\mu \Delta^1_j - \partial_\mu[\exp(\theta\Delta^1_3)]\Big]\exp(-\theta\Delta^1_3), \tag{8.122}$$

ce qui nous donne :

$$\mathrm{h'}^3 = \mathrm{h}^3 - \nabla\theta, \tag{8.123}$$

$$\mathrm{h'}^1 = \cos(2\theta)\mathrm{h}^1 + \sin(2\theta)\mathrm{h}^2, \tag{8.124}$$

$$\mathrm{h'}^2 = -\sin(2\theta)\mathrm{h}^1 + \cos(2\theta)\mathrm{h}^2. \tag{8.125}$$

La comparaison avec (8.121) donne

$$h^1 = \frac{g_3}{2}(1_V + 4_V) = \frac{g_3}{2}(\Psi^{rg}L_{1235}\widetilde{\Psi}^{rg}SL_4 + SL_4\Psi^{rg}L_{1235}\widetilde{\Psi}^{rg}),$$

$$\Psi^{rg} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ g & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\Psi - S\Psi S);\ S = L_{012345}, \tag{8.126}$$

$$h^2 = \frac{g_3}{2}(-1_v - 4_v) = \frac{g_3}{2}(\Psi^{rg}L_{1235}\widetilde{\Psi}^{rg}L_5 + L_5\Psi^{rg}L_{1235}\widetilde{\Psi}^{rg}), \tag{8.127}$$

$$\begin{aligned} h^3 &= \frac{g_3}{2}(D_{ur} + D_{dr} - D_{ug} - D_{dg}) \\ &= \frac{g_3}{2}(S\Psi^{rg}L_0\widetilde{\Psi}^{rg} + L_4 S\Psi^{rg}L_0\widetilde{\Psi}^{rg}L_4). \end{aligned} \tag{8.128}$$

En permutant les couleurs on obtient (4.9) à (4.14).

Références

[1] C. Daviau and J. Bertrand. *Nouvelle approche du modèle standard de la physique quantique en algèbre de Clifford.* Je Publie, Pouillé-les-coteaux, 2013

[2] C. Daviau and J. Bertrand. *New Insights in the Standard Model of Quantum Physics in Clifford Algebra.* Je Publie, Pouillé-les-coteaux, 2014 et http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00907848.

[3] C. Daviau and J. Bertrand. *The Standard Model of Quantum Physics in Clifford Algebra.* World Scientific Publishing, Singapore, 2015.

[4] C. Daviau. Retour à l'onde de Louis de Broglie. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, **40** (1), 2015.

[5] C. Daviau and J. Bertrand. Relativistic gauge invariant wave equation of the electron - neutrino. *Journal of Modern Physics*, 5 :1001–1022, http ://dx.doi.org/10.4236/jmp.2014.511102, 2014.

[6] C. Daviau and J. Bertrand. A wave equation including leptons and quarks for the standard model of quantum physics in Clifford algebra. *Journal of Modern Physics*, 5 : 2149–2173, http ://dx.doi.org/10.4236/jmp.2014.518210, 2014.
[7] Daviau, C. and Bertrand, J. (2015). Geometry of the standard model of quantum physics, *Journal of Applied Mathematics and Physics* **3**, pp. 46–61. http ://dx.doi.org/10.4236/jamp.2015.31007.
[8] C. Daviau, J. Bertrand, Left Chiral Solutions for the Hydrogen Atom of the Wave Equation for Electron+Neutrino. Journal of Modern Physics, 6, 1647–1656. http ://dx.doi.org/10.4236/jmp.2015.611166
[9] Daviau, C and Bertrand, J. (2015) Electro-Weak Gauge, Weinberg-Salam Angle *Journal of Modern Physics*, **6**, 2080-2092. http ://dx.doi.org/10.4236/jmp.2015.614215
[10] S. Weinberg. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19 :1264–1266, 1967.
[11] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 8(4), 1983.
[12] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$(partie 2). *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 9(1), 1984.
[13] G. Lochak. Wave equation for a magnetic monopole. *Int. J. of Th. Phys.*, 24 :1019–1050, 1985.
[14] C. Daviau. Invariant quantum wave equations and double space-time. *Adv. in Imaging and Electron Physics*, 179, chapter 1 :1–137, 2013.
[15] Socroun, T. (2015). Clifford to unify general relativity and electromagnetism, AACA 25, DOI 10.1007/s00006-015-0558-5
[16] D. V. Filippov, A.A. Rukhadze, L.I. Urutskoev, Effects of atomic electrons on nuclear stability and radioactive decay, *Ann. Fond. Louis de Broglie* 29, Hors Série 3, p. 1207–1217, 2004

(Manuscrit reçu le 26 octobre 2015, modifié le 4 janvier 2016)