Ondes du fluide de Madelung relativiste

PIERRE PELCÉ

Institut de Recherches sur les Phénomènes Hors Equilibre,
49 rue Joliot-Curie, BP146, 13013 Marseille, France

RÉSUMÉ. Nous déterminons la relation de dispersion des ondes du fluide de Madelung relativiste. On retrouve certaines caractéristiques de la mécanique ondulatoire, à petit nombre d'onde par la dépendance quadratique de la particule libre non relativiste, et à grand nombre d'onde par la dépendance linéaire des particules ultra-relativistes. Par contre cette relation ne contient pas l'oscillation de repos de L. de Broglie de fréquence mc^2 / h, si importante dans la mécanique ondulatoire et la théorie quantique des champs. Une comparaison avec ces théories concurrentes ou complémentaires, permet d'évaluer l'importance de ce fluide relativiste dans la théorie quantique.

ABSTRACT. We determine the dispersion relation of the waves of the relativistic Madelung fluid. One recovers some features of the wave mechanics, at small wave number, the quadratic dependance of the free non relativistic particle, and at large wave number the linear dependance of the ultra relativistic particles. However, this relation does not exhibit the rest oscillation term introduced by L. de Broglie of frequency mc^2 / h*, so important for the wave mechanics and the quantum theory of fields. A comparison with these concurrent or complementary theories allows to evaluate the importance of this relativistic fluid for the quantum theory.*

1 Introduction.

L'équation de Schrödinger peut être déterminée de plusieurs façons, dont deux qui se trouvent être finalement assez complémentaires. La première introduit le concept de fonction d'onde et d'amplitude de probabilité, cette dernière ayant une signification mathématique un peu obscure. Avec une règle de correspondance entre quantités physiques et opérateurs linéaires, il est possible de déterminer l'équation linéaire de Schrödinger, dont l'interprétation physique, issue de l'école de Copenhague, est d'oublier le concept de trajectoire d'une particule, et de ne s'intéresser qu'à des probabilités de mesurer telle ou telle quantité physique au cours d'une mesure [1]. D'une tout autre façon, on peut considérer que la particule est transportée par un éther fluide compressible sans viscosité ni pression, et constater que si l'on suppose l'écoulement potentiel, densité et potentiel de fluide se regroupent en une seule variable complexe analogue à la fonction d'onde, qui satisfait aussi l'équation de Schrödinger [2]. Le concept de trajectoire de particule est alors restauré puisque la particule suit une ligne de courant du fluide. En fait, cette notion a été introduite assez tôt par L.De Broglie [3] avec le concept de double solution, repris plus tard par D.Bohm [4], constatant que le fluide de Madelung [5] que l'on pouvait déterminer à partir de l'équation de Schrödinger pouvait être utilisé à cet effet.

Cette dualité de description, ou coïncidence intriguante, s'affaiblit notablement dans le domaine relativiste. Dans la première interprétation, la fonction d'onde est préservée, et l'équation relativiste correspondante est l'équation de Klein-Gordon. Celle-ci a l'avantage de préserver aussi la relation énergie-quantité de mouvement relativiste classique, mais l'important défaut de ne pas préserver en général une densité positive que l'on puisse associer à une densité de probabilité [3]. Dirac résoud cette dernière difficulté en établissant une équation relativiste qui restaure une densité positive mais doit considérer quatre fonctions d'onde couplées adaptées à la description d'une particule de spin 1/2 [6]. Dans la seconde interprétation, il est intéressant de réaliser l'extension dans le domaine relativiste du fluide de Madelung comme tout fluide ordinaire [7]. Alors que le fluide de Madelung a la propriété de factoriser ses variables densité ρ et potentiel d'écoulement φ en une seule fonction d'onde $\Psi=\sqrt{\rho}\exp i\varphi$ solution de l'équation de Schrödinger, il n'en est de même pour l'extension relativiste que jusqu'à l'ordre $(v/c)^2$. Au delà, la fonction d'onde est perdue et il faut conserver les variables densité n, quadrivitesse u^μ et énergie interne e, pour résoudre toute configuration d'écoulement relativiste, comme par exemple, celle du fluide accéléré dans un champ uniforme [8]. Nous étudions ici une autre configuration d'écoulement, celle des petits mouvements au voisinage de l'état de repos, et déterminons la relation de dispersion des ondes de la particule libre supportée par ce fluide. Dans une dernière partie, nous comparons les approches de la mécanique ondulatoire, du fluide relativiste, et de la théorie des champs, permettant de mieux comprendre la nature du problème de la détermination de la trajectoire relativiste d'une particule élémentaire de spin 0.

2. Equations du fluide relativiste.

La dynamique de ce fluide contient, comme celle de tout fluide relativiste non dissipatif sans pression [7], six variables, deux scalaires et quatre composantes d'un quadrivecteur. La densité du fluide n dans le référentiel de repos de l'élément de volume de fluide donné, qui est positive, ainsi que la densité propre de l'énergie interne du fluide e dans le même référentiel, cette dernière quantité contenant également l'énergie de repos nmc^2 de la particule associée au fluide, où m est la masse de repos. Les quatre composantes du quadrivitesse

$$u^i=\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}},\frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\right) \tag{1}$$

où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse tridimensionnel, satisfont la condition de normalisation $u^i u_i = 1$. L'équation de conservation de la densité du fluide s'exprime à l'aide du quadrivecteur densité de courant de particules $j^i = nu^i$,

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i}=0 \tag{2}$$

La loi de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement du fluide s'exprime à l'aide du tenseur d'énergie impulsion T_{ik}, qui doit être étendu dans le domaine relativiste à partir du tenseur Π_{ik} [8]

$$T_{ik}=eu_i u_k+T'_{ik} \tag{3}$$

avec

$$T'_{ik}=-\frac{\hbar^2}{4m}Q_{ik} \tag{4}$$

où Q_{ik} est le tenseur quantique

$$Q_{ik} = \frac{\partial^2 n}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x^i}\frac{\partial n}{\partial x^k} \tag{5}$$

avec la propriété

$$\frac{\partial Q_i^k}{\partial x^k} = 2n\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\Box\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) \tag{6}$$

Pour retrouver l'expression non relativiste de ce tenseur, on fera la substitution $n \to \rho\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} \approx \rho - \frac{\rho v^2}{2c^2}$ si bien que $n \approx \rho$ et $e \approx m\rho c^2$.

Ce tenseur étant défini, les équations du mouvement sans champ extérieur sont

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0 \tag{7}$$

3. Ondes

Etudions les petits mouvements du fluide de Madelung relativiste, ce qui revient à linéariser les équations du fluide relativiste autour de l'état de repos de densité ρ_0. On simplifie le calcul en ne considérant qu'une dimension d'espace, disons x, si bien que le quadrivitesse (1) §2 peut être approximé par $u^i = (1, \frac{u}{c})$ en notation contravariante, $u_i = (1, -\frac{u}{c})$ en notation covariante. On peut donc, à partir des équations (3) et (4), réécrire le tenseur d'énergie-impulsion sous la forme

$$T_i^k = e u_i u^k - \frac{\hbar^2}{4m} Q_i^k \tag{8}$$

et réécrire l'éqn.(7) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(e u_i u^k) - \frac{\hbar^2}{4m} 2n \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\Box\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) = 0 \tag{9}$$

On peut alors écrire les équations (2) et (9) pour i= 0 et i=1 respectivement sous la forme

$$\frac{\partial n}{c\partial t}+\rho_0\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad (10) \tag{10}$$

et

$$\begin{gathered}\frac{\partial e}{c\partial t}+\rho_0 mc^2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\hbar^2}{2mc}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)n=0\\ -\rho_0 mc^2\frac{\partial u}{c\partial t}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)n=0\end{gathered} \tag{11}$$

où n et e sont redéfinies comme les perturbations de leurs valeurs de repos ρ_0 et $\rho_0 mc^2$. Cherchant des solutions des équations(10) et (11) sous la forme

$$\begin{gathered}n=a\ \mathrm{expi}(\omega t-kx)\\ u=b\ \mathrm{expi}(\omega t-kx)\\ e=d\ \mathrm{expi}(\omega t-kx)\end{gathered} \tag{12}$$

on obtient trois relations entre les coefficients a, b et d,

$$\omega a=\rho_0 ckb \tag{13}$$

et

$$\begin{gathered}\frac{\omega}{c}d-\rho_0 mc^2kb+\frac{\hbar^2\omega}{4mc}\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)a=0\\ -\rho_0 mc\omega b=\frac{\hbar^2 k}{4mc}\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)a\end{gathered} \tag{14}$$

Eliminant a et b entre l'éqn.(13) et la seconde des équations(14), on obtient la relation de dispersion des ondes

$$\omega^2 = \frac{\dfrac{\hbar^2 k^4}{4m^2}}{1+\dfrac{\hbar^2 k^2}{4m^2 c^2}} \tag{15}$$

On retrouve les cas limites des particules non relativistes, $\omega = \dfrac{\hbar k^2}{2m}$, et ultra relativistes $\omega = ck$, en faisant k petit et k grand dans la relation (15). On retrouve directement la relation de dispersion des ondes à petit nombre d'onde $\omega = \dfrac{\hbar k^2}{2m}$ à partir des équations du fluide de Madelung non relativiste

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \vec{v}) = 0 \tag{16}$$

et

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v}\right) = \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right) \tag{17}$$

en les linéarisant autour de la solution uniforme $\rho = \rho_0$, $v = 0$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{18}$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{4m^2 \rho_0}\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 \rho}{dx^2}\right) \tag{19}$$

4. Relations à la mécanique quantique.

Nous disposons donc à présent de trois dynamiques relativistes pouvant être associées à une particule élémentaire de spin 0, l'équation de Klein-

Gordon issue de la mécanique ondulatoire, le fluide de Madelung relativiste de la mécanique des fluides et le champ scalaire de Higgs de la théorie des champs.

Comparons la relation (15) à la relation de dispersion des ondes des particules libres relativistes de la mécanique quantique

$$\omega^2=\frac{m^2c^4}{\hbar^2}+c^2k^2 \tag{20}$$

La mécanique ondulatoire associe à une particule au repos (k = 0), un phénomène périodique, un champ d'horloges au sens de L. de Broglie [3], [9-10]. Il doit être analogue à une onde stationnaire et il est possible de le représenter par une expression de la forme

$$\Psi_0 = a_0 \exp i2\pi\nu_0 t_0 \tag{21}$$

où $\nu_0 = \frac{mc^2}{h}$ est la fréquence associée à l'énergie de repos par la relation de Planck. Cet effet est purement relativiste puisqu'il utilise l'énergie de repos relativiste d'une particule. Si la particule se déplace à vitesse v par rapport à un observateur A, le champ d'horloges dans le repère de A est supposé être le champ (21) simplement transformé par la transformation de Lorentz appropriée [3],

$$\Psi(x,y,z,t) = a_0 \exp i2\pi\nu\left(t-\frac{z}{V}\right) \tag{22}$$

avec

$$\nu=\frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad V=\frac{c}{\beta}=\frac{c^2}{v} \tag{23}$$

Il en résulte que l'onde Ψ satisfait l'équation d'onde de Klein-Gordon invariante relativiste [3],[11] et qu'un paquet d'onde centré sur la fréquence du corpuscule se déplace avec la vitesse de groupe v reliée à la vitesse de phase V par la seconde relation (23). Mais cette équation a l'important défaut de ne pas préserver en général une densité positive que l'on puisse associer à une densité de probabilité. D'autre part si l'on cherche à lui associer un mouvement de corpuscule guidé par l'onde, comme si il était transporté par le fluide associé, la particule a le défaut de parfois excéder la vitesse de la lumière [3], comme dans l'exemple de la particule accélérée par un champ uniforme [8]. L'équation de Klein-Gordon présente cependant toujours une importance en théorie des champs, mais dans le cadre de la seconde quantification, pouvant décrire la dynamique d'une particule et d'une anti-particule de spin 0, une particule d'énergie négative remontant le temps décrivant le mouvement d'une anti-particule libre dans l'espace réel [12].

Ce phénomène périodique n'apparait pas dans le fluide de Madelung relativiste, un état stationnaire de repos n'étant associé à aucune oscillation. Par contre, lorsque l'on développe la relation (20) à petit nombre d'onde, on retrouve comme pour le fluide de Madelung relativiste, la relation de dispersion $\omega = \dfrac{\hbar k^2}{2m}$ de la particule libre non relativiste. Les deux relations de dispersion (15) et (20) sont aussi identiques à grand nombre d'onde.

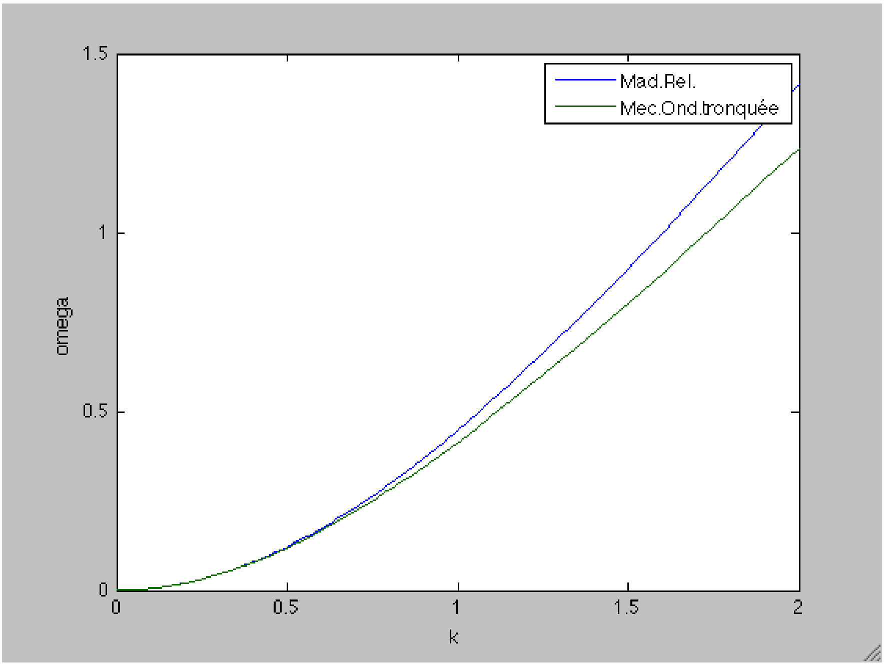

Figure : Relations de dispersion du fluide de Madelung relativiste et de la mécanique ondulatoire tronquée dans les unités relativistes.

Pour mieux les comparer on trace sur la figure les deux relations de dispersion dans les unités relativistes $\hbar = m = c = 1$,

$$\omega_{mad} = \frac{k^2}{2\sqrt{1+\frac{k^2}{4}}} \quad ; \quad \omega_{mec.ond.tronq.} = \frac{k^2}{1+\sqrt{1+k^2}} \tag{24}$$

mais dans laquelle on a retranché la fréquence de repos de la relation (20) (mécanique ondulatoire tronquée) représentée sur la courbe la plus basse.

Après le même comportement parabolique jusqu'au nombre d'onde Compton k=1, les deux courbes se séparent tout en devenant de plus en plus parallèles.

Ce fluide a l'avantage important de produire un mouvement accéléré guidé par le fluide acceptable, oscillant comme celui donné par l'équation de Schrödinger à basse vitesse, avec une enveloppe saturant par valeur inférieure à la vitesse de la lumière à grande vitesse [8] . Par contre, il a l'important défaut de ne préserver la structure de la fonction d'onde, c'est-à-dire par regroupement des variables densité et potentiel d'écoulement que jusqu'à l'ordre $(\frac{v}{c})^2$. Au delà, la fonction d'onde est perdue et il faut conserver les variables densité n, quadrivitesse u^μ et énergie interne e, pour résoudre toute configuration d'écoulement relativiste. Il peut néanmoins apparaitre comme un modèle intéressant à comparer, lors de l'expérience de particules chargées de spin 0 accélérées dans un champ électrique uniforme. Il est aussi à se remémorer la tentative de J.Yvon [13] d'écrire pour une particule de spin $\frac{1}{2}$ des équations à la Madelung à partir des équations de Dirac, celles-ci ayant l'avantage de contenir le terme oscillant de repos de L. de Broglie. Cependant, ces équations sont nombreuses et compliquées, les rendant relativement inutilisables.

Dans sa version la plus simple [14], reprise plus tard de façon plus élaborée dans le modèle électrofaible [15-16], le mécanisme de Higgs part de deux champs réels scalaires φ_1 et φ_2 que l'on peut regrouper en une seule fonction d'onde $\psi = \varphi_1 + i\varphi_2$. Il y a ensuite une brisure de symétrie entre les parties réelle et imaginaire en linéarisant la dynamique autour d'un état stationnaire $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = \varphi_0$, où φ_0 est le lieu du minimum de $V(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$, potentiel du Lagrangien initial. Il en résulte que la perturbation de la partie imaginaire $\Delta\varphi_2$ satisfait l'équation de Klein-Gordon

$$(\partial^2 - 4\varphi_0^2 V''(\varphi_0^2))\, \Delta\varphi_2 = 0 \qquad (25)$$

On retrouve donc un peu la mécanique ondulatoire, avec en particulier l'oscillation de repos de fréquence $\nu_0 = \dfrac{2\varphi_0\sqrt{V''(\varphi_0^2)c^2}}{h}$, mais pas pour une fonction d'onde, pour un champ réel scalaire qui est une partie imaginaire de fonction d'onde. Cette description est en accord avec l'horloge de L. de

Broglie, puisqu'il attribuait au début au phénomène périodique une onde stationnaire réelle [10]

$$f(x_0 y_0 z_0)\sin 2\pi\nu_0 t_0 \tag{26}$$

et non complexe, comme il l'a repris plus tard [3]. Comme on le sait, cette pierre indispensable au modèle standard de la théorie quantique des champ, ne permet aucunement à s'intéresser à la forme précise de trajectoires de particules, mais essentiellement à interpéter des mesures de sections efficaces de collision, comme celles enregistrées au LHC.

4.Conclusion.

Le fluide de Madelung relativiste a l'intéressante propriété de produire des trajectoires de particules élémentaires de spin 0 relativistes, en particulier la trajectoire rectiligne du mouvement uniformément accéléré, reproduisant le mouvement oscillant de Schrödinger à basse vitesse, et n'excédant pas la vitesse de la lumière à grande vitesse. Cependant ce fluide a le défaut de ne pas exhiber l'oscillation de repos caractéristique de la mécanique ondulatoire et de la théorie du champ, qui contribue notablement à préserver le mystère de la mécanique quantique, et de perdre sa fonction d'onde lorsque la vitesse de la particule devient de l'ordre de celle de la lumière. Son utilisation est de toute façon limitée par le fait que les particules de spin 0 sont en général composées de spins $\frac{1}{2}$, et que le boson de Higgs, à qui on attribue un champ scalaire réel de spin 0, est régi par une dynamique de théorie des champs qui semble bien éloignée de ce fluide étudié dans cet article. Cependant, le modèle du fluide relativiste peut être intéressant à comparer à des résultats expérimentaux de mouvements uniformément accélérés de particules chargées de spin 0.

Références

[1] Landau L. et Lifchitz E., Mécanique Quantique (Editions Mir Moscou) (1967).

[2] Pelcé P., Another derivation of the Schrödinger equation, Eur.J.Phys.17, 116-117 (1996).
[3] De Broglie L., Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire (La théorie de la double solution) Gauthier-Villars,Paris (1956).
[4] Bohm D. and Hiley B.J., The undivided universe (Routledge) (1993).
[5] Madelung E., Quantentheorie in hydrodynamischer form, Zts.f.Phys.40, 322-326 (1926).
[6] Dirac P.A.M., The principles of quantum mechanics (1930),fourth edition (Oxford University Press) (1958).
[7] Landau L. et Lifchitz E., Mécanique des fluides (Editions Mir Moscou) (1971).
[8] Pelcé P., Le fluide de Madelung relativiste accéléré dans un champ uniforme, Annales de la fondation Louis De Broglie, 40, 35-56 (2015)
[9] De Broglie L., Recherches sur la théorie des quantas, Réédition du texte de 1924 (Masson et Cie) (1963).
[10] De Broglie L., Ondes et Mouvements (Gauthier-Villars,Paris) (1926), Rééditions Jacques Gabay (1988).
[11] Schrödinger E., Quantification et valeurs propres, Annalen der Physik (4), 81, (1926) Réimpression autorisée par les Presses Universitaires de France publiée par la librairie Alcan en 1933 dans Mémoires sur la Mécanique Ondulatoire, Editions Jacques Gabay 188-190.
[12] Bérestetski V., Lifchitz E. et Pitayevski L., Théorie Quantique Relativiste première partie, tome IV du cours de Physique Théorique de Landau et Lifchitz (Editions Mir Moscou) (1972).
[13] Yvon J., Equations de Dirac-Madelung, Journal de Physique, 1, 18-24, Oeuvre scientifique, Vol.1, 279-285 (1940).
[14] Higgs P.W., Broken symmetries and the masses of gauge bosons, Phys.Rev.Lett. 13, 508-509 (1964).
[15] Weinberg S., The quantum field theory (Cambridge University Press) (2007).
[16] Itzykson C. and Zuber J.B., Quantum field theory (McGraw-Hill Inc.) (1980).

(Manuscrit reçu le 8 février 2016)