

Dualité onde-corpuscule formée par une masselotte oscillante dans un milieu élastique : étude théorique et similitudes quantiques

C. BORGHESI

Équipe BioPhysStat, Université de Lorraine,
1 boulevard Arago, 57070 Metz, France

ABSTRACT. We introduce a dual wave-particle macroscopic system, where a bead oscillator oscillates in an elastic medium which obeys the Klein-Gordon equation. This theoretical system is mostly inspired by bouncing droplets experiments and bead sliding on a vibrating string experiments. This system is studied using a common and simple mathematical formalism. We compute the motion equation of the bead as well as the wave equation of the system. We introduce the effective velocity of the bead with respect to the elastic medium and the wave ψ , created by the bead, which modulates the natural wave of the medium. Provided some conditions, ψ obeys an equation analogous to the free Schrödinger equation. In the case of linear and spherical cavities, the particle-like characteristics of the bead, expressed with its effective velocity, are proportional to the corresponding wave-like characteristics of the system.

English translation (thanks to Lionel Tabourier) of the whole paper : arXiv :1609.09260v3.

RÉSUMÉ. Nous présentons un système dual (onde-particule) macroscopique, dans lequel une masselotte oscillante vibre dans un milieu élastique régi par l'équation de Klein-Gordon. Ce système théorique s'inspire très largement des expériences des gouttes rebondissantes et aussi de l'expérience d'une masselotte coulissante sur un fil en oscillation. Ce système est étudié à l'aide d'un formalisme mathématique très usuel et simple. Nous donnons l'équation de guidage de la masselotte et l'équation d'onde du système. Nous définissons la vitesse effective de la masselotte par rapport au milieu élastique, ainsi que l'onde ψ , due à la masselotte, qui module l'onde naturelle du milieu élastique. ψ est régie par une équation strictement équivalente à celle de Schrödinger sans potentiel extérieur (sous certaines conditions). Dans le cas des cavités rectilignes et sphériques, les grandeurs corpusculaires de la masselotte (avec sa vitesse effective) sont proportionnelles aux grandeurs ondulatoires correspondantes du système.

P.A.C.S.: 46.40.-f; 45.50.Dd; 03.65.-w

Introduction

Depuis ces dernières années, des expériences dans lesquelles des gouttes rebondissent sur un bain liquide en oscillation [1] ont montré qu'il existait des systèmes macroscopiques qui se comportent de façon duale, à la fois onde et particule. La goutte génère en effet des ondes dans le bain liquide à chaque rebond et, d'un autre côté, lors de chaque rebond, les ondes que la goutte a précédemment émises dévient la goutte et la guident. Des phénomènes que l'on croyait jusqu'alors strictement réservés aux systèmes quantiques ont été observés dans ces expériences (dans lesquelles la *mémoire* du milieu oscillant joue un rôle important [2, 3]), comme par exemples la diffraction et l'interférence avec une goutte [4], l'effet tunnel [5] et la quantification des orbites [6, 7, 8]; sans parler de l'effet Zeeman [9], de la probabilité de présence dans une cavité [10], etc. (voir [11] pour une revue). Ces expériences, dans lesquelles la goutte est guidée par l'onde qui lui est associée, rappelle bien évidemment la fameuse *onde pilote* suggérée jadis par Louis de Broglie [12] et discutée [13, 11, 14] dans ce cadre expérimental.

Néanmoins le formalisme mathématique correspondant aux expériences des gouttes rebondissantes n'est guère aisé, nous semble-t-il, pour atteindre une mise en équation proche de celle que pourraient avoir des systèmes équivalents quantiques. Le but de cet article est de proposer un système théorique (que nous souhaitons réalisable expérimentalement), dont la formalisation serait suffisamment commode pour exhiber encore plus facilement d'éventuelles analogies (et différences) avec des systèmes quantiques. Nous transplantons pour cela quelques caractéristiques propres aux gouttes rebondissantes dans un système, lui aussi macroscopique, à base de masselotte ponctuelle en oscillation dans un milieu élastique. (Nous ne serons pas surpris de voir que le système se traite facilement en utilisant le formalisme lagrangien et en s'appuyant sur l'équation de d'Alembert.) La bonne connaissance des expériences des gouttes rebondissantes, que nous conseillons à tout bon lecteur [15], n'est pas nécessaire à la compréhension de cet article, mais nous y ferons cependant de nombreuses allusions –souvent placées en notes de bas de page.

L'article s'organise comme suit. Dans un premier temps nous formalisons une expérience qui, justement, présente une masselotte coulissante sur un fil en oscillation. Plus qu'un exercice de style, cette partie permet

d'illustrer et de visualiser dans un cas concret maints ingrédients que nous reprendrons ultérieurement, dans le système théorique que nous proposons. Ce dernier fait l'objet de la seconde partie. Nous le présentons et déterminons sa dynamique générale, puis traitons l'exemple du mouvement libre de la masselotte. Enfin, nous cherchons dans la dernière partie si une équation équivalente à celle de Schrödinger sans champ extérieur régit, sous certaines conditions, l'onde du système. Nous essayons ensuite de répondre à une question 'à la de Broglie' dans des exemples simples : la cinétique de la masselotte (à préciser) rend-elle compte des grandeurs ondulatoires du système ?

1 Formalisation de l'expérience d'une masselotte coulissante sur une corde en oscillation

Arezki Boudaoud, Yves Couder et Martine Ben Amar ont réalisé une expérience [16] (voir [17] pour sa présentation vulgarisée) dans laquelle un fil tendu est excité par une source extérieure harmonique et sur lequel se trouve une masselotte coulissante. Alors qu'en absence de la masselotte, le fil n'entre en résonance que lorsque la pulsation de la source excitatrice correspond à l'un des modes propres de la corde tendue ; avec la masselotte les auteurs observent un déplacement de celle-ci le long du fil jusqu'à ce qu'elle atteigne une position pour laquelle le système entre en résonance, quelle que soit la pulsation imposée par la source excitatrice. Les auteurs parlent alors d'auto-adaptation mécanique et se concentrent sur son étude, après avoir établi l'équation d'onde sur le fil et l'équation du mouvement de la masselotte, surtout proche de son point d'équilibre.¹ Quant à nous, nous allons nous focaliser sur l'établissement de ces deux équations en s'appuyant pour cela sur un formalisme lagrangien ; ce qui nous permettra d'obtenir des équations du champ et du mouvement de la masselotte dans un large cadre d'application. Cette section aura en outre l'avantage de nous familiariser avec des concepts et un formalisme que nous reprendrons en grande partie par la suite, mais avec des systèmes quelque peu plus abstraits.

Les auteurs de [16] considèrent le système suivant :

- Une corde homogène de masse linéique μ_0 et de tension \mathcal{T} . Elle est, en l'absence d'actions extérieure, le siège d'oscillations transverses (d'élongation notée $\varphi(x, t)$, ici) vérifiant l'équation de d'Alembert

¹Les auteurs étudient également l'effet occasionné par la présence de deux masselottes coulissantes sur le fil oscillant, mais ceci n'est pas du ressort de notre article.

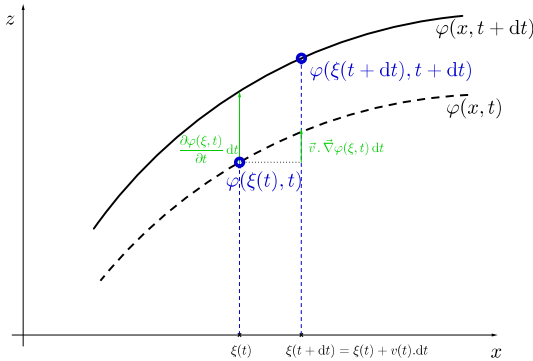


FIG. 1 – Position de la masselotte (point bleu) et champ d'élongation transverse φ du fil aux temps t et $t+dt$

(à une dimension) avec la célérité des ondes, $c_m = \sqrt{T/\mu_0}$. (La valeur de la célérité des ondes dans le milieu matériel, c_m n'a, en soi, aucune importance pour notre étude. Nous verrons en revanche par la suite, à l'instar des gouttes rebondissantes, toute l'importance de la transversalité des ondes.)

- Une masselotte coulissante, considérée comme ponctuelle et de masse m_0 , se situe sur la corde en $x = \xi(t)$ à t donné.
- Chaque élément de longueur du fil subit à un instant t la même excitation harmonique forcée, de pulsation ω , et dirigée suivant l'axe transverse à la corde (noté ici (Oz)). La force par unité de longueur vaut $F_\ell(t) = F_\ell \cos(\omega t)$.
- Les frottements et les non-linéarités sont négligés ainsi que la gravitation.
- La corde, de longueur L , est fixée à ses deux extrémités. (À noter que nous ne tiendrons compte des conditions aux limites, puisque nous ne cherchons qu'à obtenir les équations d'onde et du mouvement de la masselotte.)

1.1 Formalisation

Le formalisme que nous employons dans cette section s'inspire de la façon dont Landau et Lifchitz traitent l'électromagnétisme : avec un lagrangien de la particule ($L_0 = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ qui devient $L_0 = 1/2 m_0 v^2$ quand $v \ll c$), un lagrangien d'interaction entre la particule chargée et le champ électromagnétique ($L_i = -q(V - \vec{v} \cdot \vec{A})$) et, enfin, une densité de lagrangien du champ (cf. [18], §8, 16 et 27).

L'étude de cette expérience se place dans le cadre de la mécanique non covariante, *i.e.* nous n'imposons pas que les équations du mouvement aient la même invariance que celles des ondes. Dit autrement, l'équation de d'Alembert des ondes transverses du fil est invariante par les transformations de Lorentz-Poincaré (en utilisant la célérité des ondes, $c_m = \sqrt{T/\mu_0}$, inhérente au fil tendu) à la différence de la dynamique de la masselotte.

• *L'énergie cinétique totale de la masselotte sur la corde écrite comme la somme d'un lagrangien propre et d'un lagrangien d'interaction*

Le mouvement de la masselotte s'effectue dans un espace à deux dimensions : l'axe de la corde, (Ox) , dans lequel le déplacement de la masselotte est communément observé, et l'axe de vibration, (Oz) , transverse au précédent. Nous appellerons par la suite l'espace dans lequel se situe le milieu matériel sujet aux vibrations (ici l'axe de la corde) *l'espace observable* –ce qui fait d'ailleurs écho à l'un des articles de de Broglie [19].

Notons $\vec{r}_{\text{glob}}(t) = \begin{vmatrix} \xi(t) \\ \varphi(x = \xi(t), t) \end{vmatrix}$ la position globale de la masselotte à l'instant t . Elle se décompose en une partie dite observable, $\xi(t)$, sur l'axe de la corde, et en une autre partie due à l'amplitude de la vibration de la corde en ce point, $\varphi(x = \xi(t), t)$, sur l'axe des vibrations transversales (voir Fig. 1). Le vecteur de la vitesse globale de la masselotte, $\vec{v}_{\text{glob}}(t)$, devient

$$\vec{v}_{\text{glob}}(t) = \begin{vmatrix} \frac{\xi(t+dt) - \xi(t)}{dt} \\ \frac{\varphi(\xi(t+dt), t+dt) - \varphi(\xi(t), t)}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v(t) \\ \frac{d\varphi(\xi, t)}{dt} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi(\xi, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\xi, t), \quad (1)$$

où $v(t) = \frac{d\xi(t)}{dt}$ désigne la vitesse *observable* de la masselotte, *i.e.* sa vitesse sur l'axe du fil. Il apparaît la *vitesse particulière* de la masselotte, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi(\xi, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\xi, t)$, sur l'axe de vibration. (À noter que les vecteurs \vec{v} et gradient de φ , $\vec{\nabla} \varphi$, s'expriment uniquement dans l'espace dit observable (à la différence de \vec{v}_{glob}), soit ici $\vec{v} = v \vec{e}_x$ et $\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x$, où \vec{e}_x indique le vecteur unitaire de l'axe (Ox) de la corde.)

L'énergie cinétique globale de la masselotte est égale à la somme d'une énergie cinétique observable, due à la translation de la masselotte sur l'axe du fil, et d'une énergie cinétique de vibration de la masselotte. Le lagrangien global de la masselotte, qui se restreint ici à sa seule énergie cinétique globale, $\frac{1}{2} m_0 v_{\text{glob}}^2$, peut donc s'écrire comme la somme de deux

termes : L_0 , le lagrangien de la masselotte sur l'axe observable du fil,

$$L_0 = \frac{1}{2} m_0 v^2, \quad (2)$$

et L_i , le lagrangien contenant l'interaction de la masselotte avec le champ (ici les vibrations transverses du fil),

$$L_i = \frac{1}{2} m_0 \left(\frac{d\varphi}{dt}(\xi, t) \right)^2. \quad (3)$$

• *Densité de lagrangien du champ et densité de l'excitation extérieure*

Le champ scalaire de l'élongation transverse de la corde, $\varphi(x, t)$, vérifie l'équation de d'Alembert. Sa densité de lagrangien vaut alors

$$\mathcal{L}_{ch} = \frac{1}{2} \mathcal{T} \left(\left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{c \partial t} \right)^2 - \left(\vec{\nabla} \varphi(x, t) \right)^2 \right). \quad (4)$$

La densité de lagrangien de l'excitation extérieure, uniforme et transverse à la corde, (cf. par exemple [20], §5) s'exprime comme

$$\mathcal{L}_e = F_\ell(t) \cdot \varphi(x, t). \quad (5)$$

1.2 Équation du mouvement de la masselotte

Nous profitons que l'étude [16] se fasse dans l'approximation des faibles vitesses de translation de la masselotte par rapport à sa vitesse d'oscillation pour faire apparaître une analogie amusante avec l'électromagnétisme. (Puisque l'électromagnétisme est covariante et que la dynamique de la masselotte ne l'est pas ici, il est normal que l'analogie ne puisse s'effectuer qu'aux faibles vitesses observables.) Pour la beauté de l'analogie, nous nous plaçons dans un espace dit observable à deux ou trois dimensions : la corde élastique de l'expérience [16] devenant un milieu élastique à deux ou trois dimensions.

En négligeant les termes en v^2 , le lagrangien d'interaction (3) devient :

$L_i \approx (m_0/2) \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \vec{v} \cdot 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{\nabla} \varphi \right)$, expression dans laquelle le champ φ est pris à la position (observable), $\vec{\xi}$, de la masselotte au temps t . Or en électromagnétisme, le lagrangien d'interaction d'une charge ponctuelle q

plongée dans un champ électromagnétique de potentiel électrique V et de potentiel vecteur \vec{A} s'écrit : $L_i = -q(V - \vec{v} \cdot \vec{A})$ (voir par exemple [18] §16). L'analogie électromagnétique de la masselotte coulissante revient alors à poser

$$\begin{cases} q \equiv m_0/2, \\ V \equiv -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2, \\ \vec{A} \equiv 2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\vec{\nabla}\varphi. \end{cases} \quad (6)$$

Selon cette écriture, les potentiels équivalents V et \vec{A} ne dépendent, comme en électromagnétisme, que de la position ξ de la masselotte au temps t .²

Ainsi, lorsque le champ est fixé, l'équation d'Euler-Lagrange fournit l'équation du mouvement de la masselotte –dans laquelle ressort, dans le cadre de l'approximation suivie, une force de Lorentz équivalente–, qui s'écrit de façon bien connue comme

$$\frac{d}{dt}(m_0 \vec{v}) \approx (m_0/2) \left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{\nabla}\vec{A} \right). \quad (7)$$

Dans le cas particulier d'un fil (à une dimension), d'oscillations stationnaires et en moyennant dans le temps (durant une période d'oscillation) la masselotte se déplace sous l'action du seul potentiel équivalent V –et donc sous l'énergie potentielle $\langle -\frac{m_0}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial t})^2 \rangle$, où $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne temporelle.³ Nous retrouvons alors exactement l'équation (7) de [16].

1.3 Équation du champ-source

Lorsque la position et la vitesse de la masselotte sont fixées, l'équation d'Euler-Lagrange généralisée procure l'équation du champ (voir l'annexe A1 pour plus de détails) :

$$\mathcal{T} \left(\frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \right) = F_\ell(t) - m_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot \delta(x - \xi(t)), \quad (8)$$

² L_i peut s'écrire également, sans approximation, comme $(m_0/2)\frac{d\varphi}{dt}(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\varphi)$, ce qui aurait pu amener à poser $V \equiv -\frac{d\varphi}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ et $\vec{A} \equiv \frac{d\varphi}{dt}\vec{\nabla}\varphi$; mais dans ce cas les potentiels équivalents dépendraient aussi de \vec{v} à la différence des potentiels électromagnétiques.

³Le terme $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ disparaît pour des oscillations stationnaires et le terme $\vec{v} \wedge \vec{\nabla}\vec{A}$, provenant de $\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$, également en dimension une.

dans laquelle intervient $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{d\varphi}{dt} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \frac{d\varphi}{dt}$, l'accélération particulière de la masselotte.

La relation ci-dessus s'applique dans un cadre très général et s'avère la même que celle donnée par les auteurs lorsque la masselotte reste à sa position d'équilibre (cf. Eq. (2) de [16]).⁴

En conclusion de cette section, nous venons de voir que le formalisme lagrangien utilisé ici convient bien à l'étude de ce système, où une masselotte peut coulisser sur un milieu élastique en oscillation. Nous avons vu (Eq. (7)) que la masselotte peut se déplacer le long du fil sous l'effet d'un champ, qui est ici les oscillations transverses du fil. D'autre part, l'équation du champ (8) montre que la masselotte, ou plus exactement sa dérivé particulière, constitue une source du champ. Ceci rappelle la physique des gouttes rebondissantes évoquée en introduction : la goutte est à la fois guidée par la pente du champ (les ondulations transversales sur le bain liquide) lorsqu'elle retombe sur le bain et, également, est source du champ puisqu'elle émet des ondes à chaque rebond.

D'ailleurs, en forçant quelque peu le trait, nous pouvons concevoir la goutte comme une sorte de masselotte qui peut se déplacer sur la surface du bain en oscillation. Tout ceci nous incite donc de proposer et d'étudier un système mécanique constitué d'une masselotte coulissante sur un milieu élastique –un système qui s'inspire donc fortement des expériences réalisées avec les gouttes rebondissantes ainsi que de l'expérience qui vient d'être formalisée dans cette partie.

2 Système théorique d'étude et sa dynamique

Récapitulons les ingrédients présents dans les expériences avec les gouttes rebondissantes et avec la masselotte coulissante sur un fil en oscillation, puis indiquons les ingrédients que nous gardons, modifions, rejetons ou ajoutons dans le système théorique proposé.

- Le milieu matériel est porteur d'ondes transversales. Ce sera maintenu en spécifiant, comme dans l'expérience de la masselotte sur le fil, que les ondes obéissent, à ce stade, à l'équation de d'Alembert.⁵

⁴Les auteurs écrivent $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ à la place de l'accélération particulière –ce qui revient néanmoins au même lorsque la masselotte reste à la position $x = \xi$.

⁵Ce que ne vérifient pas les ondes capillaires dans les expériences des gouttes rebondissantes.

- Le milieu matériel reçoit des excitations transversales, soit par agitation (*i.e.* par une pseudo-force d’inertie) pour les gouttes rebondissantes, soit par une force de Laplace pour la masselotte sur un fil. Mais le plus important pour notre système n’est pas encore là. Le système des gouttes rebondissantes (mais pas celui de la masselotte coulissante) exhibe des propriétés de type quantique lorsque chaque perturbation transverse à la surface du bain tend à générer une oscillation stationnaire à l’emplacement de la perturbation (et à la pulsation de Faraday). Le comportement de type quantique se trouve alors d’autant plus prononcé que cette tendance est forte [6, 7]. Nous maintenons cette caractéristique (que ne possède pas le fil en oscillation de l’autre expérience) en notant Ω_m la pulsation ‘naturelle’ (des ondes transverses stationnaires) du milieu dans le référentiel du laboratoire.⁶ Cette tendance peut se concevoir comme l’émanation d’un potentiel quadratique qui s’applique sur tout élément du milieu porteur d’ondes transverses. Ainsi, grâce à cette propriété du milieu, les ondes transverses ne vérifient plus l’équation de d’Alembert mais une équation de type Klein-Gordon.
- Avec les gouttes rebondissantes, mais pas avec la masselotte coulissante sur le fil, le milieu possède une *mémoire* de permanence des ondes stationnaires en son sein. Le paramètre de *mémoire*, tel quel, n’est pas retenu dans notre système ; mais il faut noter que l’équation de Klein-Gordon fait naturellement intervenir une réminiscence (décroissante avec le temps) des excitations passées⁷. (Nous discuterons ultérieurement d’une éventuelle connexion entre la *mémoire* et des caractéristiques de notre système.)
- L’espace est séparé en un espace dit observable, dans lequel se déplace la goutte ou la masselotte, et un axe propre aux vibrations, transverse à l’espace dit observable. Gardé en l’état.
- La masselotte coulissante sur le fil ainsi que la goutte rebondissante n’ont pas de caractéristique propre, hormis leur masse. Ici nous faisons une modification majeure. Dans notre système, la masselotte est dotée d’une ‘horloge interne’ qui la pousse à osciller de façon transversale à une pulsation qui lui est propre, disons Ω_0 . Cette ca-

⁶ Ω_m est donc l’analogie de la pulsation de Faraday dans les expériences des gouttes rebondissantes.

⁷Cf. la partie de la fonction de Green (de l’équation de Klein-Gordon) qui contient la fonction de Heaviside. À noter que ce terme décroît avec le temps (à la puissance $-3/2$ en 3D) et ne peut donc être de *mémoire* infini.

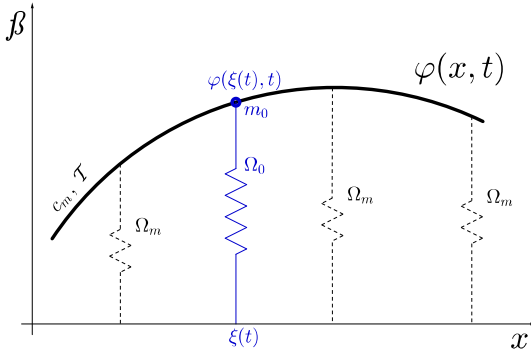


FIG. 2 – Schématisation à 1D du système théorique étudié. Les potentiels quadratiques (avec leur pulsation) du milieu et de la masselotte sont représentés par des ressorts. Les indications écrites en noir concernent le milieu élastique, en bleu la masselotte.

ractéristique dérive, dans notre système, de l'existence d'un potentiel quadratique propre à la masselotte. Dit autrement, la masselotte (ou la goutte) de l'expérience de la section précédente devient ici un oscillateur harmonique.⁸

Nous pouvons désormais écrire plus explicitement et quantitativement le système théorique que nous proposons.

2.1 Cadre d'étude et formalisation

Le système, dont la figure 2 donne une représentation très schématique, est constitué de la manière suivante :

- Un milieu homogène, isotrope, élastique à une, deux ou trois dimensions (\vec{r} de coordonnées (x) , (x, y) ou (x, y, z)), de 'tension' \mathcal{T} , de masse linéique/surfacique/volumique μ_0 . En l'absence de source de champ et si nous ne tenons pas compte de la caractéristique du milieu à porter des ondes stationnaires à la pulsation Ω_m (cf. ci-dessous) ce milieu élastique serait le siège d'oscillations transverses

⁸Notons que cette modification n'était pas obligatoire ; et si nous préférons nous en tenir un peu plus fidèlement aux expériences des gouttes rebondissantes nous devons ôter cette caractéristique, et poser $\Omega_0 = 0$ dans toutes les équations qui suivent. Nous avons néanmoins ajouté cette caractéristique à la masselotte, d'une part pour écrire la condition de symbiose entre l'onde et la masselotte (cf. section 2.3), condition qui permet l'accès direct à l'équation de Schrödinger équivalente (cf. section 3.1) et, d'autre part, parce que nous avons voulu incorporer directement dans notre système –peut-être à tort– une vision très répandue en mécanique quantique, stipulant qu'« à chaque morceau d'énergie de masse propre m_0 soit lié un phénomène périodique de fréquence ν_0 » [21].

régies par l'équation de d'Alembert, avec la célérité des ondes dans le milieu, $c_m = \sqrt{T/\mu_0}$. (La valeur de c_m n'importe toujours pas.) Noter que le milieu considéré n'est ni dispersif ni dissipatif.

- L'onde transverse en un point \vec{r} au temps t a l'amplitude $\varphi(\vec{r}, t)$ et est dirigé suivant l'axe *eszett*, (*Oß*) (pour lui donner un nom).
- Le milieu élastique possède une énergie potentielle par unité de longueur/surface/volume $\frac{\mu_0}{2} \Omega_m^2 \varphi^2(\vec{r}, t)$, qui tend à ce que le milieu porte une onde stationnaire et transversale à la pulsation Ω_m dans le référentiel du laboratoire. Avec cette propriété du milieu, l'amplitude $\varphi(\vec{r}, t)$ constitue un champ scalaire qui obéit à l'équation de type Klein-Gordon –en l'absence de source et d'excitation extérieure.
- Une masselotte, de masse m_0 , considérée comme ponctuelle, se situe dans le milieu matériel à la position $\vec{r} = \vec{\xi}$ à l'instant t . Elle peut coulisser sans frottement sur le milieu élastique.
- La masselotte, devenue maintenant un oscillateur harmonique, est soumise à une force de rappel élastique transversale (qui tend à la faire osciller à sa pulsation propre Ω_0) dérivant de l'énergie potentielle $\frac{m_0}{2} \Omega_0^2 \varphi^2(\vec{\xi}, t)$.
- Nous continuons à scinder l'espace global en une partie dite observable (dans lequel s'expriment par exemple la vitesse de la masselotte, $\vec{v} = \frac{d\vec{\xi}}{dt}$, et le gradient du champ, $\vec{\nabla}\varphi$) et, une autre, propre aux oscillations transverses. Par la suite nous ne mentionnerons plus le mot *observable* lorsque nous parlerons de la vitesse de la masselotte, de sa position, etc.
- Nous négligeons (du moins, théoriquement) encore la pesanteur, les frottements, les non-linéarités et autres effets dissipatifs.

Enfin nous faisons dans cette section une étude covariante ; covariante à l'aune du milieu matériel considéré et en particulier de sa célérité des ondes c_m . En nous imposant que l'équation de d'Alembert (ou de Klein-Gordon) soit vérifiée dans tous nos systèmes de coordonnées (certes en translation uniforme les uns par rapport aux autres), nous devons alors utiliser les transformations de Lorentz-Poincaré (avec c_m) puisqu'elles laissent invariantes l'équation de d'Alembert (ou de Klein-Gordon) du champ φ . Dit autrement, nous faisons comme si les transformations de Lorentz-Poincaré (avec c_m) s'appliquent à nos systèmes de coordonnées car nous souhaitons que l'équation de d'Alembert (ou de Klein-Gordon) soit valable dans chacun de ces systèmes de coordonnées. (C'est une modification majeure par rapport à l'expérience de la masselotte coulis-

sante sur le fil et, surtout, par rapport aux formalisations actuelles des expériences des gouttes rebondissantes.)

Nous supposons que les effets relativistes ‘normaux’, dans lesquels c est la vitesse de la lumière dans le vide, n’ont pas d’effet expérimentalement, *i.e.* soit $c_m \ll c$ soit $c_m = c$. (Par la suite nous ne mentionnerons plus le fait que l’écriture soit covariante et que les transformations de Lorentz-Poincaré, avec c_m , engagent le milieu élastique.) Nous négligeons également le comportement ‘normal’ de la masselotte (excepté son interaction avec le milieu élastique) dans le référentiel du laboratoire ; ce qui revient par exemple, expérimentalement, à ce que la vitesse de vibration de la masselotte soit très supérieure à sa vitesse de déplacement le long du milieu élastique. En somme nous ne considérons que l’interaction de la masselotte avec le milieu élastique, comme s’il n’y avait rien d’autre par ailleurs.

Écrivons maintenant les différents densités de lagrangien covariants qui interviennent dans le système. Tous les calculs se font dans un espace à trois dimensions (bien qu’expérimentalement ils devraient être menés à une ou deux dimensions) et nous utilisons l’écriture conventionnelle relativiste.

La densité de lagrangien (global) de la masselotte provient d’une part de son énergie cinétique de vibration et, d’autre part, de son énergie potentielle propre. Écrite de façon covariante :

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} \rho_0 \left[\left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 - \Omega_0^2 \varphi^2 \right], \quad (9)$$

où τ et ρ_0 désignent respectivement le temps propre de la masselotte et la densité de masse propre de la masselotte. $\rho_0 = m_0 \delta(\vec{r}_0)$ lorsqu’elle est exprimée dans le référentiel propre de la masselotte, noté par la suite \mathcal{R}_0 (et en posant que la masselotte se trouve à l’origine de \mathcal{R}_0).

Le lagrangien $L_m = \int \mathcal{L}_m d^3\vec{r}$ de la masselotte, exprimé dans un référentiel \mathcal{R} dans lequel la masselotte possède une vitesse \vec{v} , devient alors

$$L_m = \frac{m_0}{2\gamma} \left[\left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 - \Omega_0^2 \varphi^2 \right], \quad (10)$$

où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c_m^2}}$.

La densité de lagrangien du champ, qui englobe la partie due à l'équation de d'Alembert et la tendance du milieu à osciller avec la pulsation Ω_m de façon stationnaire, s'écrit maintenant comme

$$\mathcal{L}_{ch} = \frac{1}{2} \mathcal{T} \left[\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{\Omega_m^2}{c_m^2} \varphi^2 \right]. \quad (11)$$

2.2 Équations de mouvement de la masselotte et du champ d'onde

L'équation de mouvement (ou de guidage) de la masselotte s'obtient facilement à partir de L_m (voir l'annexe A2 pour le détail des calculs), soit

$$\frac{d}{d\tau} \left[\gamma \frac{m_0}{2 c_m^2} \left(\left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + \Omega_0^2 \varphi^2 \right) \vec{v} \right] = -m_0 \left(\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \Omega_0^2 \varphi \right) \vec{\nabla} \varphi, \quad (12)$$

ou sous forme covariante ⁹

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{m_0}{2 c_m^2} \left(\left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + \Omega_0^2 \varphi^2 \right) U_\mu \right] = m_0 \left(\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \Omega_0^2 \varphi \right) \partial_\mu \varphi, \quad (13)$$

dans laquelle U_μ désigne les composantes covariantes de la quadrivitesse de la masselotte, $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, et $\partial_\mu \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}$ le quadri-gradient de φ . (Les valeurs de φ , de son gradient, etc., s'effectuent évidemment à la position de la masselotte.) Il ressort de cette équation, que la masselotte peut être déviée par le champ, notamment par son gradient, à l'emplacement de celle-ci. Enfin, la variation du mouvement est indépendante de la masse de la masselotte, comme dans le cas de la gravitation.

L'équation du champ d'onde dérive elle aussi du principe variationnel (voir l'annexe A3 pour le détail des calculs) et s'écrit comme

$$\frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi + \frac{\Omega_m^2}{c_m^2} \varphi = -\frac{\rho_0}{\mathcal{T}} \left(\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \Omega_0^2 \varphi \right), \quad (14)$$

où Δ désigne le laplacien. L'équation précédente peut s'interpréter comme une équation de type Klein-Gordon en présence d'une source

⁹L'éq. (13) s'écrit aussi comme $\frac{m_0}{2 c_m^2} \left[\left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + \Omega_0^2 \varphi^2 \right] \frac{dU_\mu}{d\tau} = m_0 \left(\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \Omega_0^2 \varphi \right) \left(\partial_\mu \varphi - \frac{U_\mu}{c_m^2} \frac{d\varphi}{d\tau} \right)$.

de champ ; la source du champ est localisée à l'emplacement de la masselotte et dépend de la vibration de la masselotte.

Commentons succinctement ces dernières équations, couplées entre elles. Il apparaît clairement, d'une part, que la masselotte constitue la source du champ et, d'autre part, que la masselotte est elle-même déviée, guidée, par le champ qu'elle a créée. La masselotte coulissante et en oscillation sur le milieu élastique constitue donc un objet dual, à l'instar des gouttes rebondissantes dont il a été fait mention plus haut. Nous verrons plus loin que la dualité onde-corpuscule se manifeste également de façon quantitative, lorsque des grandeurs physiques propres au champ sont comparées à celles propres à la masselotte – nous verrons alors un bien meilleur accord, ou correspondance, que celui qui avait été décelé dans les gouttes rebondissantes [22].

2.3 Lors d'une symbiose entre la masselotte et le champ

Il est maintenant intéressant de considérer le cas particulier – et riche de conséquences ultérieures – où la masselotte n'est plus source du champ, autrement dit lorsque

$$\left(\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \Omega_0^2 \varphi \right) = 0, \quad (15)$$

c'est à dire quand la masselotte oscille dans son référentiel propre à sa pulsation propre, Ω_0 . Ce qui revient à ce que l'état de vibration de la masselotte dans \mathcal{R}_0 en fonction du temps propre, $\varphi_M(\tau)$, soit $\varphi_M(\tau) = A_M \cos(\Omega_0 \tau)$, où A_M désigne l'amplitude des oscillations de la masselotte.

Remarquons dès maintenant que la condition précédente implique l'inexistence de singularité du champ à l'emplacement de la masselotte ; autrement dit l'amplitude de l'onde à la position de la masselotte reste finie et ne diverge pas.

Lorsque la condition précédente est vérifiée, $[(\frac{d\varphi}{d\tau})^2 + \Omega_0^2 \varphi^2]$ est une constante.¹⁰ Ceci implique, d'après l'équation (13), que la masselotte n'est pas déviée par le champ et qu'elle a alors un mouvement rectiligne et uniforme, autrement dit $\frac{dU_M}{d\tau} = 0$. (Le contraire eût été surprenant dans un système dual, autrement dit que la masselotte qui n'exerce pas de source sur le champ, pût recevoir en retour une action de celui-ci.)

¹⁰En effet, $\frac{d}{d\tau} [(\frac{d\varphi}{d\tau})^2 + \Omega_0^2 \varphi^2] = 2 \frac{d\varphi}{d\tau} (\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \Omega_0^2 \varphi)$.

Il devient alors tentant de définir l'énergie propre, E_0 , de la masselotte comme

$$E_0 = \frac{m_0}{2} \left[\left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + \Omega_0^2 \varphi^2 \right], \quad (16)$$

qui est la somme, en écriture covariante, de son énergie cinétique et de son énergie potentielle. Il en découle que l'énergie propre de la masselotte est une constante pour une masselotte vérifiant l'équation (15). Ceci se comprend aisément du fait que $\varphi_M(\tau) = A_M \cos(\Omega_0 \tau)$, i.e. que la masselotte oscille dans \mathcal{R}_0 de façon harmonique à sa pulsation propre Ω_0 . Il serait tentant de se placer expérimentalement dans la situation où $A_m \Omega_0 = \sqrt{2} c_m$, ce qui correspondrait à $E_0 = m_0 c_m^2$, mais, comme nous le verrons par la suite, la valeur de E_0 n'aura, en elle même, aucune importance lorsqu'il s'agit d'étudier les similitudes quantiques de ce système.

En résumé, lorsque la masselotte a suffisamment 'chargé' le champ de son empreinte et que l'équation (15) est réalisée (i.e. la masselotte oscille dans son référentiel propre à la pulsation Ω_0), l'amplitude des oscillations et l'énergie propre de la masselotte restent constantes au cours du temps. La masselotte n'est alors ni source de champ ni déviée par celui-ci¹¹. Autrement dit, la masselotte ne se manifeste pas dans le champ (elle ne crée pas de champ) et l'onde n'agit pas sur la masselotte (son mouvement est rectiligne et uniforme). Pour un observateur qui ne porte attention qu'au seul champ d'onde, il ne verra ni la présence ni la manifestation de la masselotte dans le champ d'onde; la masselotte est comme si elle n'était pas. Et pourtant les deux phénomènes, onde et mouvement de la masselotte, sont intimement liés. Bref, lorsque la condition (15) est réalisée, l'onde et la masselotte sont dites, tel que nous le nommons, en *symbiose*.

Cet état de symbiose entre l'onde et la masselotte signifie une relation très étroite, ou une intime harmonie, entre l'onde et la masselotte. Il ne sera donc pas surprenant de voir par la suite que, dans la situation de symbiose entre l'onde et la masselotte, l'état du champ d'onde reflète la cinétique de la masselotte et, naturellement, *vice-versa*. Dit autrement, l'état de symbiose entre le champ d'onde et la masselotte permet d'exprimer quantitativement la dualité onde-corpuscule; ce qui sera mis à profit dans le chapitre suivant, lorsqu'une description ondulatoire

¹¹Ce qui, entre parenthèses, simplifie nettement l'étude du système...

(comme celles rencontrées usuellement dans les ouvrages de mécanique quantique) sera associée à une cinétique de la masselotte.

Mais auparavant il convient d'illustrer ce qui vient d'être vu dans cette section à l'aide d'un exemple simple, et sur lequel nous nous appuierons par la suite, à savoir la masselotte libre en condition de symbiose.

2.4 Masselotte libre et en symbiose avec le champ

Considérons une masselotte en symbiose avec l'onde. Cherchons quelles sont les conditions nécessaires (entre les pulsations Ω_m et Ω_0) qui rendent possible cette symbiose, puis donnons l'expression du champ d'onde.

Plaçons nous tout d'abord dans le référentiel propre de la masselotte, \mathcal{R}_0 . La condition de symbiose (Eq. 15) implique que la masselotte oscille à la pulsation Ω_0 , disons à l'origine du référentiel. Supposons que l'onde soit centrée et à symétrie sphérique autour de la masselotte, et qu'elle soit stationnaire –elle aussi– dans \mathcal{R}_0 . Le champ d'onde s'écrit alors, dans le système de coordonnées de \mathcal{R}_0 (où le temps propre τ et t_0 sont équivalents), comme $\varphi = F(r_0) \cos(\Omega_0 t_0)$. En introduisant cette forme de champ dans l'équation d'onde (14), ici sans second membre, *i.e.* sans terme de source, il vient $\Delta F = -\frac{\Omega_0^2 - \Omega_m^2}{c_m^2} F$. Afin que le champ ne diverge pas, ni à l'origine ni à l'infini, il faut nécessairement que $\Omega_0 > \Omega_m$.¹² Dit autrement, la condition reliant les pulsations Ω_0 et Ω_m qui permet l'existence d'une masselotte libre et en symbiose (dans un champ stationnaire et à symétrie centrale) est : $\Omega_0 > \Omega_m$. En notant A_M l'amplitude à l'origine, le champ d'onde s'écrit alors comme

$$\varphi(\vec{r}_0, t_0) = A_M \frac{\sin(K_0 r_0)}{K_0 r_0} \cos(\Omega_0 t_0), \text{ avec } K_0^2 = \frac{\Omega_0^2 - \Omega_m^2}{c_m^2}. \quad (17)$$

(En dimension deux, $\Delta F = -K_0^2 F$ donne $F(r_0) = A_M J_0(K_0 r_0)$, où J_0 indique une fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0.)

Écrivons maintenant le champ d'onde dans le référentiel du laboratoire, \mathcal{R} , dans lequel la masselotte possède une vitesse v , disons sur l'axe (Ox). (Le référentiel propre \mathcal{R}_0 est donc animé d'une vitesse \vec{v} orientée suivant l'axe (Ox) du référentiel du laboratoire, \mathcal{R} .) Cela revient donc à

¹²La solution qui résulte de $\Omega_0 = \Omega_m$ serait en $1/r_0$, et celle pour $\Omega_0 < \Omega_m$ en $\cosh(\sqrt{\Omega_m^2 - \Omega_0^2} r_0/c_m)/r_0$ et/ou $\sinh(\sqrt{\Omega_m^2 - \Omega_0^2} r_0/c_m)/r_0$.

utiliser les transformations de Lorentz-Poincaré (relatives au changement de systèmes de coordonnées) dans Eq.(17). Ainsi,

$$\varphi(\vec{r}, t) = F\left(\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2}\right) \cos(\Omega t - kx), \quad (18)$$

où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c_m^2}}$, $\Omega = \gamma\Omega_0$, $k = \gamma\Omega_0 v/c_m^2$ et enfin $F(X) = A_M \frac{\sin(K_0 X)}{K_0 X}$. (À ce stade, il n'y a pas de lien direct entre k et K_0 .) Ce type d'onde a d'une part une phase plane et progressive et, d'autre part, possède une amplitude qui se propage à la vitesse de la masselotte tout en restant localisée autour de cette dernière.¹³ Elle ressemble beaucoup aux ondes dites de Barut utilisées très joliment en mécanique quantique par Laurent Bindel [23, 24], dans lesquelles la phase ci-dessus s'identifie à l'onde de phase de de Broglie, et communément utilisée en mécanique quantique, qui contient notamment la longueur d'onde de de Broglie.

Dans le référentiel du laboratoire, la masselotte se situe en $x = vt$ (et $y = z = 0$). Il en découle, en utilisant le champ φ donné plus haut (cf. Eq. (18)), que la vibration de la masselotte devient $\varphi_M(t) = \varphi(x = vt, y = 0, z = 0, t) = A_m \cos(\frac{\Omega_0}{\gamma}t)$. La masselotte a donc un mouvement oscillatoire à la pulsation Ω_0/γ dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire. En s'inspirant alors du système des gouttes rebondissantes, il est naturel de considérer que la masselotte oscille dans \mathcal{R} à la pulsation particulière Ω_m .¹⁴ Il en résulte une relation entre les deux pulsations particulières du système (Ω_0 et Ω_m) et la vitesse de la masselotte dans \mathcal{R} : $\gamma = \Omega_0/\Omega_m$. Plus Ω_0 est supérieur à Ω_m , plus la vitesse de la masselotte dans le laboratoire augmente.¹⁵

Récapitulons, nous venons de voir (1) que la symbiose entre la masselotte et l'onde n'est possible que si $\Omega_0 > \Omega_m$, (2) que l'onde a une

¹³Elle se différencie principalement du champ d'onde à la surface du bain dans les gouttes rebondissantes (dans lequel $F(X) = A_M J_0(K_0 X)$ en 2D) par sa phase propagative (due à kx). Avec les gouttes, le champ est considéré comme stationnaire, i.e. le terme de phase est en $\cos(\Omega t)$.

¹⁴Néanmoins, dans les expériences avec les gouttes rebondissantes, dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire, le champ d'onde ainsi que la goutte ont tous deux un mouvement calé sur la pulsation fixe de Faraday, l'équivalent de Ω_m ; alors qu'ici, seule la masselotte oscille à Ω_m dans \mathcal{R} .

¹⁵Avec les gouttes rebondissantes, l'augmentation de leur vitesse est liée à la *mémoire* [2], ce qui laisse entrevoir un lien éventuel et plus intime entre, d'un côté, la mémoire dans les gouttes rebondissantes et, d'un autre côté, la différence de pulsations $\Omega_0 - \Omega_m$ ici ; un probable lien intéressant à étudier, mais pas dans ce papier.

phase plane et propagative et une amplitude localisée et propagative, (3) que la masselotte oscille dans le référentiel du laboratoire avec une pulsation Ω_m et enfin (4) que sa vitesse est d'autant plus grande que Ω_0 est supérieure à Ω_m .

Enfin, il est intéressant de décrire le système dans le cas où la vitesse de la masselotte est faible devant c_m , *i.e.* Ω_0 est légèrement supérieur à Ω_m , qui, comme nous le verrons au chapitre suivant, se laisse décrire par une équation de type Schrödinger. Mais auparavant, faisons quelques calculs, pas forcément passionnants, dont nous aurons besoin des résultats par la suite.

• *Approximation des faibles vitesses, soit Ω_0 est légèrement supérieur à Ω_m*

Les termes d'ordre supérieurs à v^2/c_m^2 sont négligés dans cette partie. Ainsi, Ω , la pulsation de φ dans \mathcal{R} (cf. Eq. (18)), augmente légèrement par rapport à Ω_m d'une petite pulsation ω telle que :

$$\omega \approx \Omega_m \frac{v^2}{c_m^2}, \quad (19)$$

car $\Omega = \Omega_m + \omega$ et $\Omega = \gamma \Omega_0 = \gamma^2 \Omega_m$. D'autre part, K_0 et k deviennent, dans cette approximation, égaux, *i.e.* $K_0 \approx k \approx \Omega_m v/c_m^2$.

Le champ d'onde (cf. Eq. (18)) s'écrit $\varphi = F \cos((\Omega_m + \omega)t - kx)$, où, dans le cadre de cette approximation, $\Delta F \approx -K_0^2 F$, *i.e.* $F(X)$ garde la même forme que plus haut mais $F \approx F(\sqrt{(x - vt)^2 + y^2 + z^2})$.

Déterminons maintenant le *vecteur d'onde local*, $\vec{\kappa}$, correspondant à l'onde φ à l'emplacement de la masselotte ($x = vt, y = z = 0$). Lorsque φ donné ci-dessus est injecté dans l'équation du champ (14) sans second membre, sachant $\Delta F \approx -K_0^2 F$, il vient $-(\Omega_m + \omega)^2/c_m^2 + k^2 + K_0^2 + \Omega_m^2/c_m^2 \approx 0$. Or, après injection de $\varphi \propto \cos((\Omega_m + \omega)t - \kappa x)$ (à l'emplacement de la masselotte) dans l'équation du champ (14), il vient aussi : $-(\Omega_m + \omega)^2/c_m^2 + \kappa^2 + \Omega_m^2/c_m^2 = 0$. Par identification nous en tirons la relation souhaitée, à savoir :

$$\vec{\kappa} \approx \sqrt{k^2 + K_0^2} \vec{e}_x \approx \sqrt{2} \Omega_m \frac{v}{c_m^2} \vec{e}_x. \quad (20)$$

Il en résulte la relation entre ω et κ :

$$\omega \approx \frac{\kappa^2 c_m^2}{2 \Omega_m}. \quad (21)$$

Nous pouvons désormais aborder les questions relatives à la dualité onde-corpuscule de ce système théorique, ou plus précisément de la correspondance entre grandeurs ondulatoires et corpusculaires, afin d'en tirer des conséquences quantitatives.

2.5 Concordance entre grandeurs ondulatoires et corpusculaires, vitesse effective et onde modulante

Adoptons le point de vue du milieu élastique et cherchons ce qu'inclut en lui la présence de la masselotte. Nous nous posons la question suivante : Comment le milieu matériel 'verrait' la présence de la masselotte en son sein ? Dit autrement, comment pouvons-nous interpréter et quantifier, du point de vue du milieu, les modifications engendrées par la présence de la masselotte sur le milieu élastique ? Milieu élastique qui, sans masselotte, aurait naturellement des ondes stationnaires à la pulsation Ω_m dans le référentiel du laboratoire. (Nous nous situons dans cette partie dans le cadre des approximations $v \ll c_m$, *i.e.* Ω_0 est légèrement supérieur à Ω_m , et noterons = à la place de \approx pour fluidifier l'écriture.)

Cherchons tout d'abord la relation, dans notre système théorique, faisant la passerelle entre les grandeurs ondulatoires et corpusculaires ; relation qui sera, Ô grande surprise... une relation de type Planck –mais intrinsèque au système considéré. Bref, soit la pulsation propre de la masselotte écrite comme un petit ajout de pulsation sur la pulsation de référence Ω_m , *i.e.* $\Omega_0 = \Omega_m + \omega_0$, où $\omega_0 \ll \Omega_m$. Sachant que $\Omega_0 = \gamma \Omega_m$, il en découle que $\omega_0 = \Omega_m \frac{v^2}{2c_m^2}$. En notant l'énergie cinétique $E_{c,0} = \frac{1}{2} m_0 v^2$, il vient $\frac{\omega_0}{\Omega_m} = \frac{E_{c,0}}{m_0 c_m^2}$. Il importe ici de remarquer que la pulsation ω_0 et l'énergie cinétique $E_{c,0}$ sont proportionnelles entre elles, le coefficient de proportionnalité sera noté \hbar_{exp} tel que :

$$\hbar_{\text{exp}} = \frac{m_0 c_m^2}{\Omega_m}, \quad (22)$$

$$*i.e.* \omega_0 = \frac{m_0 c_m^2}{\Omega_m} E_{c,0} = \hbar_{\text{exp}} E_{c,0}.$$

Quelques remarques s'imposent. Le coefficient \hbar_{exp} n'est pas La constante de Planck réduite, y compris une éventuelle constante qui serait propre au milieu élastique considéré. En effet, \hbar_{exp} dépend non seulement des valeurs propres au milieu élastique (Ω_m et c_m) mais aussi de la masse m_0 de la masselotte que prend l'expérimentateur (dans notre expérience fictive). Ces différentes grandeurs étant, ici, complètement indépendantes entre elles, il serait complètement fallacieux de considérer

\hbar_{exp} comme une constante propre au milieu élastique considéré. Dans un milieu élastique donné (*i.e.* Ω_m et c_m fixés), chaque masselotte imposerait son propre coefficient de proportionnalité \hbar_{exp} . Néanmoins, par rapport au système étudié dans ce papier, \hbar_{exp} représente bien le coefficient de proportionnalité qui permet la passerelle entre deux grandeurs liées à la masselotte : une grandeur ondulatoire, ici ω_0 , et une grandeur corpusculaire, l'énergie cinétique, ici $E_{c,0}$.

Revenons à la masselotte libre dans le référentiel du laboratoire, \mathcal{R} . En l'absence de masselotte (et de toute autre influence) le milieu matériel serait naturellement le siège d'ondes stationnaires à la pulsation Ω_m . Ce milieu élastique 'voit' alors la masselotte sous les deux aspects suivants :

- Sous un aspect ondulatoire, la masselotte engendre une augmentation de pulsation, ω , par rapport à la pulsation de référence du milieu élastique, Ω_m .
- Sous un aspect corpusculaire, la masselotte possède une énergie cinétique effective, $E_{c,\text{eff}} = \frac{1}{2} m_0 v_{\text{eff}}^2$, où v_{eff} représente la vitesse effective de la masselotte par rapport au milieu matériel.

ω et $E_{c,\text{eff}}$ sont deux facettes dues à la présence de la masselotte, les effets étant observés du point de vue du milieu élastique. En outre, ces deux grandeurs devraient être proportionnelles entre elles, avec \hbar_{exp} comme coefficient de proportionnalité, soit :

$$E_{c,\text{eff}} = \hbar_{\text{exp}} \omega. \quad (23)$$

Ainsi, en utilisant les équations (19) et (22), il vient : $v_{\text{eff}} = \sqrt{2} v$.

Sachant que $E_{c,\text{eff}} = \hbar_{\text{exp}} \omega$, $\omega = \frac{\kappa^2 c_m^2}{2 \Omega_m}$ (cf. Eq. (21)) et $\hbar_{\text{exp}} \Omega_m = m_0 c_m^2$, il en découle que $E_{c,\text{eff}} = \frac{\hbar_{\text{exp}}^2 \kappa^2}{2 m_0}$. En notant \vec{p}_{eff} l'impulsion effective de la masselotte (par rapport au milieu élastique), de $E_{c,\text{eff}} = \frac{p_{\text{eff}}^2}{2 m_0}$ il vient par identification :

$$\vec{p}_{\text{eff}} = \hbar_{\text{exp}} \vec{\kappa}. \quad (24)$$

Nous pouvons d'ailleurs vérifier la cohérence du résultat précédent. Les équations (20) et (22) conduisent à $\hbar_{\text{exp}} \vec{\kappa} = m_0 \sqrt{2} \vec{v}$, ce qui correspond bien à $\vec{p}_{\text{eff}} = \hbar_{\text{exp}} \vec{\kappa} = m_0 \vec{v}_{\text{eff}}$. Remarquons pour finir que nous avons utilisé le vecteur d'onde local où se situe la masselotte, qui correspond à la forme locale du champ $\varphi \propto \cos((\Omega_m + \omega)t - \kappa x)$, car il apparaît clairement une seule vitesse propagative, et non pas

$\varphi = F \cos((\Omega_m + \omega)t - kx)$ qui contient deux vitesses propagatives, l'une dans la phase et l'autre dans l'amplitude.

Essayons maintenant, d'une part de définir plus proprement la *vitesse effective* de la masselotte par rapport au champ et, d'autre part, de mieux distinguer – puis de formaliser – l'onde 'spécifique' de la masselotte par rapport à celle, 'naturelle', du milieu élastique. L'onde globale φ n'est pas la somme de deux ondes, l'une propre au milieu et l'autre due à la masselotte, mais peut être écrite comme une onde modulée : *l'onde modulante*, notée ψ , spécifique en quelque sorte à la masselotte, module (autrement dit qui s'imprime sur) l'onde 'naturelle' du milieu élastique. Ce dernier, en l'absence de masselotte, serait animé d'oscillations stationnaires dans \mathcal{R} à la pulsation Ω_m . Il est commode d'utiliser la notation complexe de l'onde φ afin de mettre aisément en exergue l'onde modulante associée à la présence de la masselotte ¹⁶, soit :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \text{Re} [\psi(\vec{r}, t) e^{-i\Omega_m t}] , \quad (25)$$

où Re indique la partie réelle. Par exemple, pour la masselotte libre dans l'approximation des faibles vitesses, $\psi(\vec{r}, t) = F(\vec{r}, t) e^{i(kx - \omega t)}$ (avec la même expression de F définie précédemment), et en employant le vecteur d'onde local, $\psi(\vec{r}, t) \propto e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t)}$.

Sous cette dernière forme, l'onde modulante à la position de la masselotte traduit explicitement sa vitesse effective par rapport au champ, car, en prenant encore une fois Ω_m comme pulsation de référence :

$$\omega = \Omega_m \frac{v_{\text{eff}}^2}{2c_m^2} \quad \text{et} \quad \vec{\kappa} = \frac{\Omega_m}{c_m^2} \vec{v}_{\text{eff}}. \quad (26)$$

(Ces deux relations étant valables dans l'approximation des faibles vitesses et $\vec{\kappa}$ exprime le vecteur d'onde local à l'emplacement de la masselotte.) Autrement dit, et c'est le point crucial du raisonnement : tout se passe comme si le passage de la masselotte transformait la phase de l'onde stationnaire sans masselotte, $(-\Omega_m t)$, par transformation relativiste due à la vitesse effective \vec{v}_{eff} (par rapport à la pulsation Ω_m de référence du milieu), en $(\gamma_{\text{eff}} \frac{\Omega_m}{c_m^2} \vec{v}_{\text{eff}} \cdot \vec{r} - \gamma_{\text{eff}} \Omega_m t)$, où $\gamma_{\text{eff}} = 1/\sqrt{1 - \frac{v_{\text{eff}}^2}{c_m^2}}$.

¹⁶Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'onde φ de la masselotte libre (cf. Eq. (18)) et en particulier le terme $\cos((\Omega_m + \omega)t - kx)$.

(Cette dernière relation nous permettrait d'écrire ω et $\vec{\kappa}$ en fonction de \vec{v}_{eff} sans se limiter à l'approximation des faibles vitesses.) Enfin, il est aisé de vérifier que les équations (19) et (20) impliquent $\vec{v}_{\text{eff}} = \sqrt{2} v \vec{e}_x$, comme il a été vu plus haut. D'autre part, les relations (26) permettent directement d'écrire $E_{c, \text{eff}}$ et \vec{p}_{eff} en fonction de ω et de $\vec{\kappa}$ (cf. Eqs. (23) et (24)) en utilisant la relation de proportionnalité \hbar_{exp} définie par (22).

Nous pouvons désormais répondre à la question suivante : pourquoi la vitesse effective, v_{eff} , diffère-t-elle de la vitesse v ? La vitesse v concerne la vitesse entre le référentiel propre de la masselotte, \mathcal{R}_0 , et le référentiel du laboratoire, \mathcal{R} . Nous avons de plus vu que la nouvelle pulsation, $\Omega = \Omega_m + \omega$, dans \mathcal{R} provenait du changement de référentiel entre \mathcal{R}_0 et \mathcal{R} , soit $\Omega = \Omega_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_m^2}}$ (où Ω_0 est la pulsation propre de la masselotte). Or, si nous considérons le mouvement de la masselotte du point de vue du milieu élastique, en se mettant en quelque sorte à sa place, nous pourrions avancer que ce dernier 'ignore' la pulsation propre de la masselotte et, de plus, que le référentiel propre de la masselotte n'a 'aucune signification' pour lui. Ainsi, la vitesse v relative entre les référentiels \mathcal{R}_0 et \mathcal{R} ne 'signifie' rien du point de vue du milieu élastique. La présence de la masselotte induit en lui, dans \mathcal{R} , une augmentation de pulsation de ω à partir de Ω_m (sa pulsation de référence). Il convient alors de considérer comme 'réel', par rapport au milieu, la vitesse effective de la masselotte qui permet d'écrire à la fois : pour la pulsation, $\Omega_m + \omega = \gamma_{\text{eff}} \Omega_m$, et pour le vecteur d'onde local à l'emplacement de la masselotte, $\vec{\kappa} = \gamma_{\text{eff}} \frac{\Omega_m}{c_m^2} \vec{v}_{\text{eff}}$. Par conséquent, le milieu élastique pourrait allouer à la masselotte une vitesse effective non nulle –correspondant à de réels effets mesurables sur lui–, alors que la masselotte paraîtrait immobile aux yeux d'un observateur situé dans \mathcal{R} .

En résumé, nous venons de voir que la présence de la masselotte au sein du milieu élastique se traduit par une onde modulante, notée ψ (cf. Eq. (25)) –qui module l'onde stationnaire et naturelle dans \mathcal{R} , de pulsation Ω_m propre au milieu élastique. Les grandeurs ondulatoires dues à la présence de la masselotte (l'augmentation de la pulsation ω et le vecteur d'onde local $\vec{\kappa}$ à l'emplacement de la masselotte, tous deux contenus dans ψ) correspondent ou, plus exactement, sont proportionnelles aux grandeurs cinétiques effectives de la masselotte (son énergie cinétique (23) et son impulsion (24)). La vitesse effective de la masselotte est définie

(cf. Eq. (26)) par rapport à la pulsation de référence, Ω_m , du milieu élastique. Le coefficient de proportionnalité, \hbar_{exp} (cf. Eq. (22)), qui articule les grandeurs ondulatoires aux grandeurs corpusculaires liées à la masselotte, dépend des valeurs attribuées aux différents paramètres du milieu élastique et de la masse m_0 de la masselotte.

Tout ceci a été dit à propos d'une masselotte libre et en symbiose avec le champ. Il devient maintenant intéressant de se confronter à d'autres systèmes et de voir si la correspondance entre grandeurs ondulatoires et cinétiques, toutes deux associées à la masselotte, reste pertinente.

3 Similitudes quantiques

Dans ce chapitre nous considérons (1) encore que la masselotte et l'onde sont en symbiose, (2) que le système se trouve dans un état stationnaire, (3) que la vitesse de la masselotte est très petite devant c_m et (4) qu'il n'existe toujours pas de potentiel extérieur agissant sur la masselotte et/ou le champ d'onde. Nous traitons donc le cas d'une masselotte confinée dans une cavité, puis, dans la lignée des questions que se posaient de Broglie (voir par exemple [25], §XI), mais transposées dans notre système théorique d'étude, nous essayons de savoir si la cinétique de la masselotte explique l'état du système. Autrement dit, nous cherchons à savoir si l'onde stationnaire obtenue dans la cavité (se) reflète (dans) la cinétique de la masselotte.

Mais auparavant il convient d'établir l'équation d'onde qui régit l'onde modulante ψ , lorsque la masselotte et l'onde sont en symbiose.

3.1 Équation de Schrödinger équivalente pour l'onde modulante

L'équation d'onde (14) sans second membre (le terme de source est nul lors de la symbiose entre la masselotte et l'onde) vérifiée par l'onde φ devient, en faisant ressortir explicitement l'expression de l'onde modulante ψ contenue dans φ (cf. Eq. (25)) et après élimination du terme $e^{-i\Omega_m t}$: $-2i\frac{\Omega_m}{c_m^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{c_m^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi = 0$. Or, dans le cadre des approximations des faibles vitesses de la masselotte, le terme en $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ est négligeable devant les autres.¹⁷ L'équation de l'onde modulante –correspondante à

¹⁷Bien que nos calculs ressemblent beaucoup à ce qui se trouve dans la littérature lorsque l'équation de Schrödinger d'une particule libre est déduite de celle de Klein-Gordon, nous pouvons nous convaincre de la validité de l'approximation faite en considérant le champ φ de la masselotte libre du chapitre précédent, écrite pour des raisons de simplicité en faisant intervenir le vecteur d'onde local. En effet, d'après les

la présence de la masselotte dans le milieu élastique— s'écrit alors comme

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{c_m^2}{2\Omega_m} \Delta \psi. \quad (27)$$

L'équation précédente s'apparente non seulement à l'équation de Schrödinger pour une particule sans potentiel extérieur mais en prend l'exacte forme s'il est appliqué le relation de proportionnalité (22), soit :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\hbar_{\text{exp}}}{2m_0} \Delta \psi. \quad (28)$$

Insistons bien sur le fait, au risque de nous répéter, que le champ total, φ , vérifie l'équation (14) de type Klein-Gordon sans terme de source, alors que le champ modulante, qui traduit plus ostensiblement la présence de la masselotte dans le milieu, obéit à l'équation de Schrödinger équivalente, (27). Celle-ci étant valable dans la limite des petites vitesses de la masselotte devant c_m et lorsque la masselotte est en symbiose avec l'onde ou, plus largement, lorsque la masselotte n'est pas source de champ.¹⁸

Il est aisé de retrouver les résultats du chapitre précédent concernant la masselotte libre dans l'approximation des faibles vitesses, lorsque l'équation équivalente de Schrödinger (27) s'applique à l'onde modulante sous la forme $\psi = F e^{i(kx - \omega t)}$, dans laquelle $F = F(\sqrt{(x - vt)^2 + y^2 + z^2})$.¹⁹ Dans le dernier chapitre nous avons longuement discuté de la correspondance entre la cinétique de la masselotte et le champ dans le cas de la masselotte libre. Nous ne reprendrons pas la discussion ici, pour la masselotte libre, mais souhaitons l'étendre à d'autres systèmes communément traités dans les ouvrages de la mécanique quantique.

équations (19) et (20), le terme $\frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ est proportionnel à $\frac{\Omega_m^2}{c_m^2} \frac{v^4}{c^4}$ alors que les deux autres sont proportionnels à $\frac{\Omega_m^2}{c_m^2} \frac{v^2}{c^2}$.

¹⁸Les gouttes rebondissantes génèrent périodiquement, à chaque rebond, des ondes à la surface du bain. Elles ne constituent pas une source de champ que dans des conditions particulières : elles se situent à des nœuds du mode d'excitation dans un système confiné [7].

¹⁹La partie imaginaire qui dérive de (27) donne $\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{c_m^2}{\Omega_m} \frac{\partial F}{\partial x}$, et sachant qu'ici $\frac{\partial F}{\partial t} = -v \frac{\partial F}{\partial x}$ il vient $k = \frac{\Omega_m v}{c_m^2}$. La partie réelle qui dérive de (27) procure $\omega F = -2 \frac{c_m^2}{\Omega_m} (\Delta F - k^2 F)$. Cette dernière relation est en accord avec $\Delta F = -k^2 F$ et Eq. (19).

3.2 Masselotte dans une cavité linéaire

Cherchons les expressions possibles de l'onde modulante, ψ , associée à la présence de la masselotte en symbiose dans une cavité linéaire de longueur L , lorsque l'onde est stationnaire dans le référentiel du laboratoire. Nous considérons que les conditions aux limites, disons en $x = 0$ et $x = L$, imposent un champ nul en ces deux points.

Il est trivial d'obtenir à partir de l'équation (27) et des conditions aux limites, $\psi(x, t) = A \sin(K_n x) e^{-i \omega_n t}$, où $K_n = \frac{n\pi}{L}$ (n est un nombre entier naturel), $\omega_n = \frac{K_n^2 c_m^2}{2\Omega_m}$ et A désigne l'amplitude maximale de ψ . L'onde φ résultante s'écrit alors (cf. Eq. (25)) comme $\varphi(x, t) = A \sin(K_n x) \cos((\Omega_m + \omega_n) t)$, qui est, elle aussi, une onde stationnaire. Mais toutes les solutions stationnaires données ci-dessus ne conviennent pas : il faut en effet tenir compte de la symbiose entre l'onde et la masselotte. Puisque φ est stationnaire dans le référentiel du laboratoire, ce dernier coïncide donc avec le référentiel propre de la masselotte. La condition de symbiose (15) implique alors que $\Omega_m + \omega_n = \Omega_0$; ce qui ne permet, avec les pulsations Ω_m et Ω_0 données, l'existence d'une seule onde stationnaire possible. (Nous discuterons dans la conclusion de ce point de divergence avec les résultats de la mécanique quantique.)

Interprétons les résultats obtenus à l'aune de la cinétique effective de la masselotte. Pour cela, nous devons au préalable déterminer le vecteur d'onde local, $\vec{\kappa}$, à l'endroit où se situe la masselotte. Il est aisé de voir que $\vec{\kappa}$ est ici uniforme et vaut $\pm K_n \vec{e}_x$. D'après les relations (26), tout se passe donc comme si la masselotte, où quelle soit, ait une vitesse effective par rapport au milieu élastique telle que

$$\vec{v}_{\text{eff}} = \pm K_n \frac{c_m^2}{\Omega_m} \vec{e}_x. \quad (29)$$

Le signe \pm signifie, ici, non pas « ou bien » mais « à la fois » ; ce qui, du point de vue du milieu élastique, traduit une superposition d'état. Dit autrement, du point de vue du milieu élastique, la masselotte est 'vue' comme si elle avait la vitesse effective $\vec{v}_{\text{eff}} = K_n \frac{c_m^2}{\Omega_m} \vec{e}_x$ et, en même temps, $\vec{v}_{\text{eff}} = -K_n \frac{c_m^2}{\Omega_m} \vec{e}_x$, lorsque l'onde φ est à la fois stationnaire et en symbiose avec la masselotte. Et répétons encore une fois, ce que voit l'expérimentateur (une masselotte immobile, ou en pure oscillation sur l'axe de vibration) diffère de ce que 'voit' -i.e. et qui agit sur- le milieu élastique.

Il est maintenant facile d'exprimer l'énergie cinétique effective de la masselotte puis, en utilisant la relation de proportionnalité (22), de retrouver les résultats usuels de la mécanique quantique d'un système transposé au notre. Plus précisément, d'après $K_n = \frac{n\pi}{L}$, Eqs. (29) et (22), l'énergie cinétique effective de la masselotte, $E_{c, \text{eff}} = \frac{1}{2}m_0 v_{\text{eff}}^2$, devient

$$E_{c, \text{eff}} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar_{\text{exp}}^2}{2m_0 L^2}, \quad (30)$$

ce qui est identique à l'énergie du système, E_n , rencontrée en mécanique quantique (cf. par exemple [26, 27]).

Nous avons montré dans le cas d'une onde stationnaire dans une cavité rectiligne, que l'énergie du système, usuellement attribuée à l'onde ψ en mécanique quantique (sous forme $-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$), est égale, transposée dans notre système, à l'énergie cinétique de la masselotte ; mais en considérant la cinétique de la masselotte non pas par rapport à un observateur du laboratoire mais par rapport au milieu élastique.

Mais la cavité linéaire ne nous permet pas de savoir si la correspondance entre les grandeurs ondulatoires et les grandeurs cinétiques s'étend également aux moments cinétiques. Pour répondre à cette question, du moins dans un cas particulier, nous allons nous occuper d'une masselotte dans une autre cavité, et toujours sans potentiel extérieur, la cavité sphérique.

3.3 Masselotte dans une cavité sphérique

Nous cherchons de nouveau l'onde modulante, ψ , qui accompagne une masselotte en symbiose dans une cavité sphérique de rayon R , lorsque cette onde est stationnaire dans le référentiel du laboratoire. Les conditions aux limites imposent de nouveau un champ nul aux extrémités de la cavité.

L'onde modulante ψ s'écrit, en utilisant les coordonnées sphériques et une solution à variables séparées, $\psi(r, \theta, \phi, t) = F(r)G(\theta)H(\phi) e^{-i\omega t}$. L'équation de Schrödinger équivalente (27) induit $\Delta\psi = -K^2\psi$, où $\omega = \frac{K^2 c_m^2}{2\Omega_m}$. En écrivant le laplacien en coordonnées sphériques, il vient après un calcul très classique (utilisé par exemple en acoustique [28] §6) : $\psi = A j_\ell(Kr) P_\ell^m(\cos\theta) \cos(m\phi) e^{-i\omega t}$, où j_ℓ désigne la fonction de Bessel sphérique de première espèce et d'ordre ℓ , P_ℓ^m le polynôme de Legendre associé (où ℓ et m sont des entiers tels que $|m| \leq \ell$) et A un terme d'amplitude –de nouveau sans aucune importance dans cette étude.

(Nous aurions pu écrire ψ en utilisant les harmoniques sphériques réelles, mais pas celles complexes, où $Y_\ell^m(\theta, \phi) \propto P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi}$, car elles correspondraient à un champ d'onde non stationnaire dans le référentiel du laboratoire à cause du terme en $e^{i(m\phi - \omega t)}$.) Les conditions aux limites imposent, quant à elles, que l'onde ψ soit nulle en $r = R$, et donc que K prenne une valeur particulière, $K_{n,\ell}$, telle que $K_{n,\ell}R$ soit égal au n -ième zéro de $j_\ell(X)$. (Nous retrouvons l'expression équivalente à celle d'une particule quantique dans une cavité sphérique (cf. par exemple [29] §33), à la différence près des harmoniques sphériques complexes dans le cas quantique.) L'onde stationnaire présente dans la cavité sphérique est alors de la forme : $\varphi = A j_\ell(K_{n,\ell} r) P_\ell^m(\cos \theta) \cos(m \phi) \cos((\Omega_m + \omega_{n,\ell}) t)$, dans laquelle les conditions aux limites sont respectées et $\omega_{n,\ell} = \frac{K_{n,\ell}^2 c_m^2}{2\Omega_m}$. Mais, comme dans les cavités linéaires, il faut encore tenir compte de la condition de symbiose (15) entre l'onde et la masselotte, qui impose de nouveau : $\Omega_0 = \Omega_m + \omega_{n,\ell}$. Comme pour la cavité linéaire, la condition de symbiose restreint donc l'ensemble des solutions stationnaires possibles à une seule possible (pour Ω_0 et Ω_m fixés), ayant la pulsation additionnelle $\omega_{n,\ell}$ imposée par la condition de symbiose. (Notons au passage que cette solution possible est dégénérée, *i.e.* elle admet l'existence (voire la superposition) de plusieurs solutions ayant des m différents pour la même $\omega_{n,\ell}$.)

Nous cherchons maintenant si la vitesse effective de la masselotte arrive encore à rendre compte des quantités ondulatoires portées par –et attribuées à– l'onde, notamment l'énergie, le carré du moment cinétique ainsi que la projection sur l'axe (Oz) du moment cinétique. Il faut alors commencer par évaluer le vecteur d'onde local $\vec{\kappa}_M$ à l'emplacement de la masselotte, \vec{r}_M (l'indice M indique la position de la masselotte). En écrivant le laplacien de ψ en coordonnées sphériques, où ψ s'écrit comme ci-dessus, et par son identification avec $-(\kappa_{M,r}^2 + \kappa_{M,\theta}^2 + \kappa_{M,\phi}^2)\psi$, il vient ²⁰ : $\kappa_{M,r}^2 = K_{n,\ell}^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r_M^2}$, $\kappa_{M,\theta}^2 = \frac{\ell(\ell+1)}{r_M^2} - \frac{m^2}{r_M^2 \sin^2 \theta_M}$ et $\kappa_{M,\phi}^2 = \frac{m^2}{r_M^2 \sin^2 \theta_M}$. D'après la relation (26), tout se passe alors comme si la masselotte, par rapport au milieu élastique, avait une vitesse effective

²⁰Avec $\psi = A j_\ell(K_{n,\ell} r) P_\ell^m(\cos \theta) \cos(m \phi) e^{-i\omega t}$ il vient : $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}) = -K_{n,\ell}^2 \psi + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \psi$, $\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}) = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \psi + \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} \psi$ et $\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = -\frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} \psi$.

\vec{v}_{eff} :

$$v_{\text{eff},r} = \pm \frac{c_m^2}{\Omega_m} \sqrt{K_{n,\ell}^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r_M^2}}, \quad v_{\text{eff},\theta} = \pm \frac{c_m^2}{\Omega_m} \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{r_M^2} - \frac{m^2}{r_M^2 \sin^2 \theta_M}}$$

et $v_{\text{eff},\phi} = \pm \frac{c_m^2}{\Omega_m} \sqrt{\frac{m^2}{r_M^2 \sin^2 \theta_M}}$.

(31)

Fort de ce résultat il est aisé de déterminer le moment cinétique effectif de la masselotte, défini comme

$$\vec{L}_{\text{eff}} = m_0 \vec{r}_M \wedge \vec{v}_{\text{eff}}. \quad (32)$$

Ainsi, $\vec{L}_{\text{eff}} = -(m_0 r_M v_{\text{eff},\phi}) \vec{e}_\theta + (m_0 r_M v_{\text{eff},\theta}) \vec{e}_\phi$ et sa projection sur l'axe (Oz) est $L_{\text{eff},z} = \vec{L}_{\text{eff}} \cdot \vec{e}_z = (m_0 r_M v_{\text{eff},\phi}) \sin \theta$. Le carré du moment cinétique effectif et la projection du moment cinétique effectif sur l'axe (Oz) valent alors ici, $\vec{L}_{\text{eff}}^2 = m_0^2 \frac{c_m^4}{\Omega_m^2} \ell(\ell+1)$ et $L_{\text{eff},z} = \pm m_0 \frac{c_m^2}{\Omega_m} m$; d'où, en tenant compte de la relation de proportionnalité (22) :

$$\vec{L}_{\text{eff}}^2 = \hbar_{\text{exp}}^2 \ell(\ell+1), \quad \text{et} \quad L_{\text{eff},z} = \pm \hbar_{\text{exp}} m. \quad (33)$$

Rappelons que dans l'équation ci-dessus, comme dans l'équation (29), \pm signifie « à la fois ». Ainsi, dans le référentiel du laboratoire, l'onde φ (et ψ) est stationnaire et la masselotte est immobile (*i.e.* sans vitesse observable); ce qui correspond en effet à l'intuition que nous pouvons avoir dans ce cas de la symbiose entre l'onde et la masselotte. Nous comprenons alors pourquoi la projection sur l'axe (Oz) du moment cinétique effectif, $L_{\text{eff},z}$, est à la fois $\hbar_{\text{exp}} m$ et $-\hbar_{\text{exp}} m$; une seule valeur de $L_{\text{eff},z}$ contredirait en effet le fait que la masselotte soit immobile dans le référentiel du laboratoire. Or, ceci semble contradictoire avec ce que dit la mécanique quantique d'une particule dans une cavité sphérique : un état stationnaire, au sens de la mécanique quantique, exprimé par $Y_\ell^m(\theta, \phi) \propto P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi}$ pour sa dépendance en (θ, ϕ) , n'a qu'une valeur propre de $L_{\text{eff},z}$, en l'occurrence $\hbar m$. Mais comme il en a été fait mention plus haut, l'onde φ qui résulterait d'une harmonique sphérique complexe ne serait pas stationnaire. En revanche, la dépendance en (θ, ϕ) de l'onde φ associée à la masselotte telle que nous l'avons écrite plus haut peut être interprétée comme la superposition

de deux fonctions : l'une avec $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ et l'autre avec $Y_\ell^{-m}(\theta, \phi)$. Ceci s'accorde donc avec le fait que $L_{\text{eff},z}$ ait à la fois la valeur de $\hbar_{\text{exp}} m$ et de $-\hbar_{\text{exp}} m$. La projection sur l'axe (Oz) du moment cinétique effectif global de la masselotte est alors nul, ce qui est conforme à ce que φ soit stationnaire et la masselotte immobile dans le référentiel du laboratoire – tout comme, dans l'exemple précédemment traité de la cavité linéaire, le vecteur impulsion effective global était nul.

Quant à l'énergie cinétique effective de la masselotte, $E_{c,\text{eff}} = \frac{1}{2} m_0 v_{\text{eff}}^2$ ($= \frac{1}{2} m_0 v_{\text{eff},r}^2 + \frac{L_{\text{eff}}^2}{2 m_0 r_M^2}$ ici), elle vaut en tenant compte des équations (31) et (22) : $E_{c,\text{eff}} = \frac{\hbar_{\text{exp}}^2 K_{n,\ell}^2}{2 m_0}$. (Notons que la position de la masselotte n'a, ici non plus, aucune importance sur les valeurs de $E_{c,\text{eff}}$, L_{eff}^2 et $L_{\text{eff},z}$.) Nous reconnaissons là, dans les valeurs que prennent $E_{c,\text{eff}}$, L_{eff}^2 et $L_{\text{eff},z}$, les valeurs qui sont communément attribuées à l'onde ψ en mécanique quantique (lorsque notre système est transposé dans sa version quantique).

En résumé, nous avons montré dans le cas d'une cavité sphérique, lorsque l'onde et la masselotte sont en symbiose et lorsque le champ d'onde est stationnaire dans le référentiel du laboratoire, que la description ondulatoire de l'état du système est en parfaite adéquation avec une description corpusculaire du système – dans laquelle, néanmoins, la cinétique de la masselotte s'opère à partir du milieu matériel, et non pas de ce que voit l'expérimentateur. La cinétique (effective) de la masselotte contient en effet l'information nécessaire à des mesures rapportées usuellement, en mécanique quantique, à l'onde. Bref, nous voyons là une parfaite concordance entre la vision ondulatoire et la vision corpusculaire lorsqu'elles rendent compte de l'état du système – plus précisément, le module et la projection sur l'axe (Oz) du moment cinétique ainsi que l'énergie du système.

Il est en revanche frappant, par comparaison à la démarche habituelle suivie dans les manuels de mécanique quantique (cf. par exemple [26, 27, 29]), de voir à quel point l'approche 'corpusculaire' – celle qui octroie au système les grandeurs associées à la cinétique effective de la masselotte – est rapide et simple.

Conclusion

Nous avons dans ce travail proposé un système de nature duale (onde-corpusculaire) à l'échelle macroscopique, lequel s'appuie sur deux expériences : les expériences de gouttes rebondissantes (cf. la revue [11])

pour ses éléments fondamentaux et celle d'une masselotte coulissante sur un fil en oscillation [16] pour la facilité de son traitement formel. Le système proposé consiste en (1) une masselotte oscillante (*i.e.* une masse ponctuelle ayant une 'horloge interne' qui tend à la faire osciller à sa pulsation propre, Ω_0 , via un potentiel quadratique) et en (2) un milieu élastique porteur d'ondes transverses φ (régies, à ce stade, par l'équation de d'Alembert avec la célérité c_m des ondes dans le milieu) doté d'une tendance (via un potentiel quadratique) à osciller dans le référentiel du laboratoire de façon stationnaire à une pulsation propre au milieu, Ω_m . (Le milieu élastique est donc régi par une équation de type Klein-Gordon.) La masselotte génère des ondes transversales dans le milieu élastique et, en contrepartie, les ondes transverses guident la masselotte; ce qui s'apparente à « l'onde-pilote » initialement imaginée par Louis de Broglie et mise en évidence pour la première fois, dans un cadre hydrodynamique, avec les expériences des gouttes rebondissantes.

Les équations couplées de mouvement (13) de la masselotte et du champ d'onde (14) s'obtiennent très facilement (après utilisation du formalisme lagrangien très commun). Il est important de noter que le système est traité de façon covariante à l'aune du milieu élastique considéré (*i.e.* les transformations de Lorentz-Poincaré s'écrivent avec c_m de manière à respecter l'invariance de l'équation de d'Alembert ou de Klein-Gordon afférente).

Nous n'avons par la suite considéré que le cas particulier où la masselotte et l'onde sont en harmonie intime, nommé ici état de symbiose, dans lequel la masselotte n'est ni source de champ ni la masselotte déviée par le champ. (Elle oscille dans son référentiel propre à sa pulsation propre Ω_0 et son énergie reste constante.) Une fois que cet état est atteint, la masselotte est dans le champ comme si elle n'y était pas. Nous avons déterminé le champ d'onde correspondant à la masselotte libre (18) puis, plus important, introduit d'une part le champ modulant ψ (25), qui met en relief le champ dû à la masselotte par rapport au champ 'naturel' du milieu, et, d'autre part, la vitesse effective de la masselotte par rapport au milieu élastique. Cette dernière est définie (26) comme la vitesse de la masselotte selon le 'point de vue' du milieu élastique. L'énergie cinétique et l'impulsion effectives sont alors proportionnelles à des grandeurs proprement ondulatoires –la pulsation et le vecteur d'onde local de ψ en l'occurrence. La constante de proportionnalité (22) assurant la passerelle entre les grandeurs corpusculaires et les grandeurs ondulatoires n'est pas une constante propre au milieu élastique considéré, car elle dépend aussi

de la masse de la masselotte –posée de façon arbitraire dans le système proposé.

Nous avons ensuite montré que l'équation d'onde qui régit ψ (dans l'état de symbiose, en l'absence de potentiel extérieur et dans l'approximation des faibles vitesses) est strictement équivalente à celle de Schrödinger. Dans le cas où la masselotte (en symbiose et en l'absence de potentiel extérieur) se situe dans une cavité rectiligne ou sphérique et que le champ d'onde φ est stationnaire dans le référentiel du laboratoire, nous avons pu corroborer dans notre système ce que suggérait de Broglie : la cinétique (*effective* ici) de la masselotte rend compte des grandeurs que la mécanique quantique attribue ordinairement à la nature ondulatoire du système. Autrement dit le carré du moment cinétique, la projection du moment cinétique sur un axe et l'énergie du système, déterminés en mécanique quantique à partir de ψ , sont en parfaites adéquation avec celles qui résultent de la cinétique effective de la masselotte. (Notons enfin que l'obtention de ces grandeurs, via la cinétique effective de la masselotte, est très facile et immédiate.)

Notons que l'onde φ ne présente ici pas de singularité, ce qui accrédite, dans le cadre de notre système, l'hypothèse de « l'onde-pilote » par rapport à celle de « la double solution » émises par de Broglie [25, 30]. En outre, ici, l'onde φ (et donc ψ) est de nature 'réelle' (*i.e.* relate le champ d'oscillation transverse du système) et non pas statistique.

Ce papier a répondu, nous semble-t-il, à l'objectif que nous nous étions fixés : transplanter les caractéristiques principales des expériences sur les gouttes rebondissantes dans un système, dont le cadre formel permet plus facilement de mettre en évidence les analogies (et les différences) avec des systèmes quantiques équivalents. Si nous voulons poursuivre notre quête vers de meilleures analogies avec les systèmes quantiques, il faudrait vraisemblablement dépasser la condition de symbiose, certainement trop drastique, car elle restreint (par exemple dans les cavités) l'ensemble des solutions stationnaires possibles à une seule existante. D'autre part, il serait également intéressant d'étudier un système proche de celui proposé dans ce papier, dans lequel la masselotte ne serait qu'une simple masse sans 'horloge interne' (*i.e.* $\Omega_0 = 0$ dans cet article, supprimant *de facto* la condition de symbiose), rendant par là même le système encore un peu plus fidèle à celui des gouttes rebondissantes.

Remerciements

Nous tenons à remercier Hervé Mohrbach, Alain Bérard, Laurent Bindel, Yves Couder, Navid Nemati, Lionel Tabourier et Alexandra pour leurs discussions et soutien.

Annexes

A1 Calcul de l'équation du champ (8)

Nous ne nous occupons dans cette annexe que de l'équation d'Euler-Lagrange généralisée ($\frac{\partial(\mathcal{L}_{ch}+\mathcal{L}_i+\mathcal{L}_e)}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(\mathcal{L}_{ch}+\mathcal{L}_i+\mathcal{L}_e)}{\partial(\partial\varphi/\partial t)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial(\mathcal{L}_{ch}+\mathcal{L}_i+\mathcal{L}_e)}{\partial(\partial\varphi/\partial x)}$) relative à la densité de lagrangien d'interaction, \mathcal{L}_i . Les calculs concernant les densités de lagrangien du champ et de l'action extérieure sont très classiques et/ou triviaux.

La densité de lagrangien d'interaction s'écrit comme $\mathcal{L}_i = \frac{m_0}{2} \left(\frac{d\varphi(x,t)}{dt} \right)^2 \delta(x - \xi(t))$, où $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\varphi$ et δ indique la distribution de Dirac. Il vient $\frac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial\varphi} = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial\varphi/\partial t)} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(m_0 \frac{d\varphi}{dt} \delta(x - \xi(t)) \right) \\ &= m_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \delta(x - \xi(t)) - m_0 \frac{d\varphi}{dt} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\delta(x - \xi(t))) \end{aligned} \quad (A1)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial\varphi/\partial x)} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(m_0 v_x \frac{d\varphi}{dt} \delta(x - \xi(t)) \right) \\ &= m_0 v_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \delta(x - \xi(t)) + m_0 \frac{d\varphi}{dt} v_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta(x - \xi(t))). \end{aligned} \quad (A2)$$

Ainsi, la somme des deux équations précédentes est égale à

$$m_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \right] \delta(x - \xi(t)) = m_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} \delta(x - \xi(t)), \quad (A3)$$

où il apparaît l'accélération particulière de la masselotte.

A2 Calcul de l'équation du mouvement (13)

L'équation de mouvement de la masselotte est obtenue selon le principe de moindre action, lorsque la quadri-position de la masselotte subit

une variation élémentaire $\xi^\mu \rightarrow \xi^\mu + \delta\xi^\mu$ dans un champ φ fixe. (Ces calculs sont très classiques en mécanique analytique en notation relativiste.) Cela revient donc à chercher les conditions pour lesquelles la variation $\delta\xi^\mu$ implique une action extrémale ($\delta(\int L_m d\tau) = 0$) avec des bornes d'intégration fixes ; L_m étant le seul lagrangien dépendant de la position de la masselotte.

Avec $\xi^\mu \rightarrow \xi^\mu + \delta\xi^\mu$, il vient $\varphi(\xi^\mu) \rightarrow \varphi(\xi^\mu) + \partial_\mu\varphi \delta\xi^\mu$ et $d\tau = \sqrt{d\xi^\mu d\xi_\mu}/c \rightarrow d\tau + \delta(d\tau)$ où $\delta(d\tau) = \frac{U^\mu}{c_m^2} d(\delta\xi^\mu)$, avec $U^\mu = \frac{d\xi^\mu}{d\tau}$.

La variation élémentaire du lagrangien de la masselotte dans le référentiel propre (cf. Eq. (10) avec $\gamma = 1$) vaut alors,

$$\delta(L_m) = m_0 \left[\frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d(\partial_\mu\varphi \delta\xi^\mu)}{d\tau} - \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \frac{\delta(d\tau)}{d\tau} - \frac{\Omega_0^2}{c_m^2} \varphi \partial_\mu\varphi \delta\xi^\mu \right]. \quad (\text{A4})$$

Sachant que $\delta(\int L_m d\tau) = 0$ induit $\int \delta(L_m) d\tau + \int L_m \frac{\delta(d\tau)}{d\tau} d\tau = 0$, il en découle

$$\begin{aligned} m_0 \int \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d(\partial_\mu\varphi \delta\xi^\mu)}{d\tau} d\tau - \frac{m_0}{2} \int \left(\left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + \frac{\Omega_0^2}{c_m^2} \varphi^2 \right) \frac{\delta(d\tau)}{d\tau} d\tau \\ - m_0 \int \frac{\Omega_0^2}{c_m^2} \varphi \partial_\mu\varphi \delta\xi^\mu d\tau = 0. \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

En faisant une intégration par parties dans les deux intégrales de gauche, en tenant compte des bornes d'intégrations fixes et de l'expression plus haut de $\delta(d\tau)$, il vient

$$\begin{aligned} - m_0 \int \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} \partial_\mu\varphi \delta\xi^\mu d\tau + \frac{m_0}{2} \int \frac{d}{d\tau} \left[\left(\left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + \frac{\Omega_0^2}{c_m^2} \varphi^2 \right) \frac{U_\mu}{c_m^2} \right] \delta\xi^\mu d\tau \\ - m_0 \int \frac{\Omega_0^2}{c_m^2} \varphi \partial_\mu\varphi \delta\xi^\mu d\tau = 0. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Sachant que la variation élémentaire $\delta\xi^\mu$ est quelconque, il en découle l'équation du mouvement (13).

Remarque : L'équation d'Euler-Lagrange, $\frac{d}{dt} \frac{\partial L_m}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial L_m}{\partial \xi}$, avec L_m donné en Eq. (10), donne l'équation de mouvement sous la forme (12).

A3 Calcul de l'équation d'onde (14)

L'équation du champ d'onde dérive, elle aussi, d'un principe de moindre action, lorsque le champ subit une variation élémentaire en chaque point, $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$, pour une position fixe de la masselotte. Il reste donc à chercher les conditions pour lesquelles la variation $\delta\varphi$ n'induit au premier ordre aucune variation de l'action ($\delta \int (\mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{ch}) dt d^3\vec{r} = 0$), avec des bornes d'intégration fixes.

Avec $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$, il vient $\delta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 2\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d(\delta\varphi)}{d\tau}$ et $\delta(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi) = 2\partial_\mu(\delta\varphi)\partial^\mu\varphi$.

Tenant compte des densités de lagrangien données aux équations (9) et (11), il vient

$$\int \left[\rho_0 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d(\delta\varphi)}{d\tau} - \frac{\Omega_0^2}{c_m^2} \varphi \delta\varphi \right) + \mathcal{T} \partial_\mu(\delta\varphi) \partial^\mu\varphi - \mathcal{T} \frac{\Omega_m^2}{c_m^2} \varphi \delta\varphi \right] dt d^3\vec{r} = 0. \quad (\text{A7})$$

En faisant une intégration par parties des termes où interviennent $\frac{d(\delta\varphi)}{d\tau}$ et $\partial_\mu(\delta\varphi)$, sachant que les bornes d'intégration sont fixes, il vient

$$\int \left[-\frac{d}{d\tau} \left(\rho_0 \frac{d\varphi}{d\tau} \right) - \rho_0 \frac{\Omega_0^2}{c_m^2} \varphi - \mathcal{T} \partial_\mu \partial^\mu \varphi - \mathcal{T} \frac{\Omega_m^2}{c_m^2} \varphi \right] \delta\varphi dt d^3\vec{r} = 0. \quad (\text{A8})$$

Sachant que la variation élémentaire $\delta\varphi$ est quelconque, et que la masse est une grandeur conservative ($\frac{d\rho_0}{d\tau} = 0$), il en découle l'équation du champ (14).

Remarque : L'équation d'Euler-Lagrange généralisée et la conservation de la masse fournissent, bien évidemment, le même résultat.

Références

- [1] Y. Couder, S. Protière, E. Fort, A. Boudaoud, *Walking and orbiting droplets*, Nature **437**, 208, (2005).
- [2] A. Eddi, E. Sultan, J. Moukhtar, E. Fort, M. Rossi and Yves Couder, *Information stored in Faraday waves : the origin of a path memory*, J. Fluid Mech. **674**, 433-464, (2011).
- [3] S. Perrard, M. Labousse, E. Fort, and Y. Couder, *Chaos Driven by Interfering Memory*, Phys. Rev. Lett. **113**, 104101, (2014).
- [4] Y. Couder and E. Fort, *Single-Particle Diffraction and Interference at a Macroscopic Scale*, Phys. Rev. Lett. **97**, 154101, (2006).

- [5] A. Eddi, E. Fort, F. Moisy and Y. Couder, *Unpredictable Tunneling of a Classical Wave-Particle Association*. Phys. Rev. Lett. **102**, 240401, (2009).
- [6] E. Fort, A. Eddi, A. Boudaoud, J. Moukhtar and Yves Couder, *Path-memory induced quantization of classical orbits*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **107**, vol. 41, 17515-17520, (2010).
- [7] S. Perrard, M. Labousse, M. Miskin, E. Fort and Y. Couder, *Self-organization into quantized eigenstates of a classical wave-driven particle*, Nature Comm. **5**, 3219, (2014).
- [8] D. M. Harris and J. W. M. Bush, *Droplets walking quantized orbits into a rotating frame : from multimodal statistics*. J. Fluid Mech. **739**, 444-464, (2014).
- [9] A. Eddi, J. Moukhtar, S. Perrard, E. Fort and Y. Couder, *Level Splitting at Macroscopic Scale*, Phys. Rev. Lett. **108**, 264503, (2012).
- [10] D. M. Harris, J. Moukhtar, E. Fort, Y. Couder and J. W. M. Bush, *Wavelike statistics from pilot-wave dynamics in a circular corral*, Phys. Rev. E **88**, 011001(R), (2013).
- [11] J. W. M. Bush, *Pilot-Wave Hydrodynamics*, Annu. Rev. Fluid Mech. **47**, 269-292, (2015).
- [12] L. de Broglie, *La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement*, J. de Phys. Radium, série VI, t. 8, n° 5, (1927).
- [13] Y. Couder and E. Fort, *Probabilities and trajectories in a classical wave-particle duality*, J. of Phys., Conf. Series **361**, 012001, (2012).
- [14] J. W. M. Bush, *The new wave of pilot-wave theory*, Physics Today 68(8), 47 (2015).
- [15] <http://dualwalkers.com>, <http://dotwave.org/>, http://math.mit.edu/~bush/?page_id=484
<http://labos.ulg.ac.be/microfluidics/current-research/bouncing-droplets-vs-quantum-mechanics/>
- [16] A. Boudaoud, Y. Couder, and M. Ben Amar, *A self-adaptative oscillator*, Eur. Phys. J. B **9**, 159-165, (1999).
- [17] A. Boudaoud, Y. Couder, and M. Ben Amar, *De la corde au film de savon : l'auto-adaptation dans les systèmes vibrants*, Images de la physique, (2002).
- [18] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie des champs*, Moscou, Ed. Mir, 1989.
- [19] L. de Broglie, *L'univers à cinq dimensions et la mécanique ondulatoire*, J. de Phys. Radium, série VI, t. 8, n° 2, (1927).
- [20] L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique*, Moscou, Mir, 1969.
- [21] L. de Broglie, *Recherches sur la théorie des quanta*, Ann. de Phys., série X, t. 3, (1925).
- [22] C. Borghesi, J. Moukhtar, M. Labousse, A. Eddi, E. Fort, and Y. Couder, *Interaction of two walkers : Wave-mediated energy and force*, Phys. rev. E **90**, 063017, (2014).
- [23] L. Bindel, *Mécanique quantique non-relativiste d'une particule individuelle*, Ann. Fond. L. de Broglie, **37**, 143-171, (2012).

- [24] L. Bindel, *Quantum Mechanics of Inelastic Collision Processes with Barut Waves*, communication privée.
- [25] L. de Broglie, *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire*, Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1956.
- [26] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique*, Paris, Hermann, 1977.
- [27] J.-L. Basdevant, J. Dalibard, *Mécanique quantique*, Les éditions de l'École polytechnique, 2002.
- [28] C. Potel, M. Bruneau, *Acoustique générale*, Paris, Ed. Ellipse, 2006
- [29] L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique quantique*, Moscou, Ed. Mir, 1975.
- [30] L. de Broglie, *L'interprétation de la mécanique ondulatoire*, J. de Phys. Radium, t. 20, n° 12, 963-979, (1959).

(Manuscrit reçu le 29 septembre 2016)