

## Désintégration d'une particule de spin 0 en deux particules relativistes de spin 1/2

PIERRE PELCÉ

Institut de Recherches sur les Phénomènes Hors Equilibre, 49 rue Joliot-Curie,  
BP146, 13013 Marseille, France.

**RÉSUMÉ.** Nous utilisons l'équation de Dirac à plusieurs particules pour étudier la désintégration d'une particule de spin 0 en deux ondes planes de spin 1/2, les deux particules associées ayant les quantités de mouvement  $p$  et  $-p$ . Les contraintes imposées sur les 16 composantes de l'onde font que finalement, il ne reste qu'un coefficient libre indépendant. Lorsque les masses des particules sont différentes, les deux vitesses opposées sont différentes, la vitesse de l'une des particules étant dépendante de la masse de l'autre particule. On se retrouve alors dans une situation paradoxale, typique des états intriqués, que si l'on admet que l'onde guide le mouvement des particules supposées ponctuelles, même à très grande distance l'une de l'autre, le mouvement de l'une des particules est influencé par la présence de l'autre particule. On démontre aussi le théorème de la vitesse de groupe du mouvement relatif, qui exprime que la vitesse relative des deux particules égale la vitesse de groupe de l'onde globale sous forme de paquet d'ondes.

**ABSTRACT.** We use the Dirac equation for many particles to study the desintegration of a particle of spin 0 in two plane waves of spin 1/2, the two associated particles with the momenta  $p$  and  $-p$ . The constraints imposed on the 16 components of the wave function finally lead to one single free independent coefficient. When the particle masses are different, the two opposed velocities are different, the velocity of one of the particles depending on the mass of the other. We find again a paradoxical configuration, typical from the intricated quantum states, that if one admits that the wave guides the motions of point particles, even at very large distance one from the other, the motion of one of the particles is influenced by the presence of the other. One demonstrates here too the theorem of group velocity of the relative motion, which tells us that the relative velocity of the two particles equals the group velocity of the global wave under the form of a wave-packet.

## 1 Introduction.

La mécanique quantique produit des expériences dont les résultats surprennent le sens commun, par exemple celles impliquant des états intriqués comme l'état singulet obtenus avec deux spins  $1/2$ , largement discuté à la suite du paradoxe de Einstein, Podolsky et Rosen [1], du théorème de Bell [2,3] et des nombreuses expériences qui en ont résulté [4]. Il apparaît aujourd'hui que les résultats de la mécanique quantique sont excellemment vérifiés, excluant la possibilité de variables cachées locales, mais pas nécessairement la réalité de variables cachées non locales comme les trajectoires de L. De Broglie dans la théorie de la double solution [5]. Cette configuration a plutôt privilégié le problème de corrélation entre les spins des deux particules éloignées, au détriment de la partie spatiale de l'onde, comme évoqué dans le problème de la superposition des paquets d'onde des deux particules qui se sont éloignées à grande distance [3].

Nous reprenons ce problème avec l'aide de l'équation de Dirac à deux particules [6], et montrons que la résolution de l'onde plane de cette équation produit le paradoxe que même lorsqu'elles sont très éloignées, la vitesse d'une des particules est influencée par la masse de la seconde particule, alors qu'aucune interaction classique n'est prise en compte comme la force de gravitation ou la force électrostatique. Il résulte cependant de l'étude un théorème important, que la vitesse relative des deux particules s'éloignant égale la vitesse de groupe de l'onde globale.

## 2 Equation de Dirac à plusieurs particules.

La description de la dynamique de plusieurs particules en relativité restreinte présente la difficulté que si pour une particule, le temps et les coordonnées spatiales sont considérés au point de la particule, il n'en est pas de même pour plusieurs particules, puisque si dans un repère donné, deux particules sont aux points de coordonnées  $z_1$  et  $z_2$  au même instant  $t$ , ils sont dans un autre repère translaté par rapport au premier à vitesse constante  $v$ , aux points  $z_1'$  et  $z_2'$  aux instants différents  $t_1'$  et  $t_2'$ , les nouvelles coordonnées étant transformées par rapport aux premières par une transformée de Lorentz simple le long de l'axe  $Oz$ .

Ce problème disparaît lorsque les deux particules sont liées impliquant, qu'un seul temps et système de coordonnées spatiales sont affectés au corpuscule composé, comme le photon composé de deux spins  $1/2$  de mêmes masses non nulles de L. de Broglie [8,9], ou un boson de spin 0 composé de

deux spins 1/2 [10]. La différence entre les deux études est que la première couple deux équations de Dirac avec mêmes coordonnées temporelle et spatiales, la seconde utilise l'équation de Dirac à deux particules, mais où les temps et les coordonnées spatiales des deux particules sont les mêmes.

Par contre, dans le problème qui nous intéresse ici, les deux particules se séparent et des coordonnées spatiales différentes doivent leur être attachées. Nous utilisons l'équation de Dirac à deux particules de Bohm et Hiley [6] dans l'espace de configuration, avec la réserve cependant que l'invariance par transformations de Lorentz soit prouvée de façon rigoureuse. Ce problème est difficile, même si Bohm et Hiley [6] discutent le problème de façon détaillée, tout d'abord par l'interprétation statistique où ils semblent démontrer cette invariance pour l'équation à même temps et où plusieurs temps sont introduits [7], puis de façon ontologique, avec l'interprétation des trajectoires.

Nous définissons ainsi la fonction d'onde d'un système à plusieurs particules dans le repère du laboratoire,  $\Psi = \Psi_{i_1 \dots i_n \dots i_N}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dots, \vec{r}_N, t)$ , chaque indice  $i$  affecté à chaque particule prenant une valeur de 1 à 4. Il en résulte que la fonction d'onde de  $N$  particules a  $4^N$  composantes, généralise les quatre composantes de la fonction d'onde de Dirac à une particule. Nous affectons ensuite à chaque particule les matrices  $\alpha_n$ , étant entendu qu'ici,  $\alpha_n$  représente ces quatre matrices de Dirac opérant seulement sur le bi-spineur d'indice  $i_n$ . L'équation de Dirac à  $N$  particules s'écrit alors à partir de [6],

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( \sum_n \alpha_{0n} m_n c^2 - e \Phi_n(\vec{r}_n, t) + V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dots, \vec{r}_N) \right. \\ \left. + c \sum_n \vec{\alpha}_n \cdot \left( \vec{p}_n + \frac{e}{c} \vec{A}_n(\vec{r}_n, t) \right) \right) \Psi \quad (1)$$

où  $\vec{p}_n$  est l'opérateur quantité de mouvement de la  $n$ ème particule,  $V$  l'énergie d'interaction entre les particules,  $\Phi$  et  $\vec{A}$  les potentiels électromagnétiques.

L'équation de Dirac généralisée conserve la densité

$$\rho = \sum_{i_1, \dots, i_n, \dots, i_N} \left| \Psi_{i_1, \dots, i_n, \dots, i_N} \right|^2 \quad (2)$$

puisque

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_n \vec{\nabla}_n \cdot \vec{j}_n = 0 \quad (3)$$

où

$$\begin{aligned}
j_n^1 = \rho u_{nx} = c \sum_{i1..i(n-1)i(n+1)..iN} (\Psi_{i1..in=1..iN}^* \Psi_{i1..in=4..iN} + \Psi_2^* \Psi_3 + \Psi_3^* \Psi_2 + \Psi_4^* \Psi_1) \\
j_n^2 = \rho u_{ny} = c \sum_{i1..i(n-1)i(n+1)..iN} (-i\Psi_1^* \Psi_4 + i\Psi_2^* \Psi_3 - i\Psi_3^* \Psi_2 + i\Psi_4^* \Psi_1) \quad (4) \\
j_n^3 = \rho u_{nz} = c \sum_{i1..i(n-1)i(n+1)..iN} (\Psi_1^* \Psi_3 - \Psi_2^* \Psi_4 + \Psi_3^* \Psi_1 - \Psi_4^* \Psi_2)
\end{aligned}$$

est la densité de courant de la nième particule. Dans cette dernière expression, on somme sur tous les indices  $i$  des autres particules, la notation étant explicitée dans le premier terme de la composante selon  $Ox$ .

Nous étudions ici la désintégration d'une particule de spin 0 en deux particules de spins 1/2 de masses  $m_1$  et  $m_2$  qui la composent, sans interaction classique ( $V = 0$ ), ce calcul pouvant être appliqué au cas plus réaliste d'un méson se décomposant en un quark et un antiquark [11-12], à la différence que dans ce dernier problème, il faut tenir compte de l'interaction coulombienne entre les deux particules en général chargées.

On cherche donc des solutions des éqns. (1) dont la dépendance temporelle est proportionnelle à  $\exp(-i(E + m_1 + m_2)t)$ , où  $t$  est le temps commun des deux particules dans le repère du laboratoire et  $E$  l'énergie des deux particules. Avec  $\hbar = 1$  les éqns. (1) se ramènent alors à 16 équations différentielles du premier ordre en  $z$ ,

$$E\Psi_{11} = -i\left(\frac{\partial\Psi_{31}}{\partial z_1} + \frac{\partial\Psi_{13}}{\partial z_2}\right) \quad (5.1)$$

$$E\Psi_{12} = -i\left(\frac{\partial\Psi_{32}}{\partial z_1} - \frac{\partial\Psi_{14}}{\partial z_2}\right) \quad (5.2)$$

$$(E + 2m_2)\Psi_{13} = -i\left(\frac{\partial\Psi_{33}}{\partial z_1} + \frac{\partial\Psi_{11}}{\partial z_2}\right) \quad (5.3)$$

$$(E + 2m_2)\Psi_{14} = -i\left(\frac{\partial\Psi_{34}}{\partial z_1} - \frac{\partial\Psi_{12}}{\partial z_2}\right) \quad (5.4)$$

$$E\Psi_{21}=i(\frac{\partial\Psi_{41}}{\partial z_1}-\frac{\partial\Psi_{23}}{\partial z_2}) \quad (5.5)$$

$$E\Psi_{22}=i(\frac{\partial\Psi_{42}}{\partial z_1}+\frac{\partial\Psi_{24}}{\partial z_2}) \quad (5.6)$$

$$(E+2m_2)\Psi_{23}=i(\frac{\partial\Psi_{43}}{\partial z_1}-\frac{\partial\Psi_{21}}{\partial z_2}) \quad (5.7)$$

$$(E+2m_2)\Psi_{24}=i(\frac{\partial\Psi_{44}}{\partial z_1}+\frac{\partial\Psi_{22}}{\partial z_2}) \quad (5.8)$$

$$(E+2m_1)\Psi_{31}=-i(\frac{\partial\Psi_{11}}{\partial z_1}+\frac{\partial\Psi_{33}}{\partial z_2}) \quad (5.9)$$

$$(E+2m_1)\Psi_{32}=-i(\frac{\partial\Psi_{12}}{\partial z_1}-\frac{\partial\Psi_{34}}{\partial z_2}) \quad (5.10)$$

$$(E+2(m_1+m_2))\Psi_{33}=-i(\frac{\partial\Psi_{13}}{\partial z_1}+\frac{\partial\Psi_{31}}{\partial z_2}) \quad (5.11)$$

$$(E+2(m_1+m_2))\Psi_{34}=-i(\frac{\partial\Psi_{14}}{\partial z_1}-\frac{\partial\Psi_{32}}{\partial z_2}) \quad (5.12)$$

$$(E+2m_1)\Psi_{41}=i(\frac{\partial\Psi_{21}}{\partial z_1}-\frac{\partial\Psi_{43}}{\partial z_2}) \quad (5.13)$$

$$(E+2m_1)\Psi_{42}=i(\frac{\partial\Psi_{22}}{\partial z_1}+\frac{\partial\Psi_{44}}{\partial z_2}) \quad (5.14)$$

$$(E+2(m_1+m_2))\Psi_{43}=i(\frac{\partial\Psi_{23}}{\partial z_1}-\frac{\partial\Psi_{41}}{\partial z_2}) \quad (5.15)$$

$$(E+2(m_1+m_2))\Psi_{44}=i(\frac{\partial\Psi_{24}}{\partial z_1}+\frac{\partial\Psi_{42}}{\partial z_2}) \quad (5.16)$$

### 3 Désintégration en deux ondes planes de spin 1/2.

De façon différente de l'étude de l'onde plane de la particule de spin 0 composée de deux spin 1/2 [10], la désintégration de la particule de spin 0 en deux ondes planes de spin 1/2 sans interaction classique ( $V = 0$ ), impose de prendre des fonctions d'onde proportionnelles à  $\exp ip(z_1-z_2)$

$$\Psi_{j,k} = A_{j,k} \exp i p (z_1 - z_2) \quad (6)$$

où  $p$  et  $-p$  sont les quantités de mouvement des deux particules, puisque la quantité de mouvement totale doit être nulle, comme dans l'état initial. Avec cette solution, on peut regrouper les éqns.(5) 2 à 2, (5.1-11), (5.2-12), (5.3-9), (5.4-10), (5.5-15), (5.6-16), (5.7-13) et (5.8-14) et obtenir, par élimination du second membre, les huit équations suivantes

$$\begin{aligned} A_{31} &= -\beta A_{13}, & A_{32} &= \beta A_{14} \\ A_{33} &= -\alpha A_{11}, & A_{34} &= \alpha A_{12} \\ A_{41} &= \beta A_{23}, & A_{42} &= -\beta A_{24} \\ A_{43} &= \alpha A_{21}, & A_{44} &= -\alpha A_{22} \end{aligned} \quad (7)$$

où

$$\alpha = \frac{E}{E+2(m_1+m_2)}, \quad \beta = \frac{E+2m_2}{E+2m_1} \quad (8)$$

On peut ensuite utiliser quatre des éqns.(5), (5.3,4,7,8) et les éqns.(7) pour exprimer quatre autres coefficients

$$\begin{aligned} A_{13} &= -\frac{\alpha+1}{E+2m_2} pA, & A_{14} &= \frac{\alpha+1}{E+2m_2} pB \\ A_{23} &= -\frac{\alpha+1}{E+2m_2} pC, & A_{24} &= \frac{\alpha+1}{E+2m_2} pD \end{aligned} \quad (9)$$

en fonction des coefficients d'indices les plus bas,  $A_{11} = A$ ,  $A_{12} = B$ ,  $A_{21} = C$  et  $A_{22} = D$ . Tous les coefficients (6) se trouvent donc exprimés en fonction des quatre coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

Par exemple, l'éqn.(5.1) s'écrit,

$$EA_{11} = p(A_{31} - A_{13}) \quad (10)$$

si bien que, en utilisant les éqns.(7) et (9) pour tout ramener au coefficient  $A$ ,

$$E(E+2m_2) = (\alpha+1)(\beta+1)p^2 \quad (11)$$

que l'on peut réécrire, en utilisant  $E = W - m_1 - m_2$  et les éqns.(8) comme l'éqn.(19) de la ref.[10],

$$(W - m_1 - m_2)(W + m_1 - m_2)(W - m_1 + m_2)(W + m_1 + m_2) = 4p^2 W^2 \quad (12)$$

Nous cherchons des ondes de spin global nul, impliquant que les quatre composantes du quadrivecteur spin soit nulles. Les éqns.(B.6) à (B.8) de l'appendice B montrent que les trois composantes spatiales sont nulles si  $A = D = 0$ . Pour que la composante temporelle le soit aussi, l'éqn.(B.5) montre qu'il faut aussi imposer que les modules de B et de C soient égaux, ce que nous faisons dans la suite. Comparons avant les deux expressions de la composante temporelle du spin, celle du boson composé étudié dans [10]

$$2\sigma_0 = \frac{2(1+\alpha)}{(E+2m_2)} p_z ((1+\alpha\beta+\alpha+\beta)(-AA^* + DD^*) + (1+\alpha\beta-\alpha-\beta)(BB^* - CC^*)) \quad (13.a)$$

et celle obtenue à l'éqn.(B.5), que l'on réécrit ici

$$2\sigma_0 = \frac{2(1+\alpha)}{(E+2m_2)} p((1+\alpha\beta-\alpha-\beta)(AA^* - DD^*) + (1+\alpha\beta+\alpha+\beta)(CC^* - BB^*)) \quad (13.b)$$

qui répartissent différemment les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . Dans le premier cas, l'égalité des courants des deux particules, qui n'est pas imposée dans le second, imposait l'égalité des masses, ce qui annulait le second facteur de l'éqn.(13.a). L'annulation des facteurs A et D était donc suffisante pour l'annulation de cette composante temporelle, laissant les deux paramètres B et C arbitraires. Ici, l'annulation des facteurs A et D dans (13.b) laisse le second terme si l'on n'impose pas la condition supplémentaire d'égalité des modules de B et C.

Il en résulte que pour ces particules,

$$j_{3(1)} = 2BB^* \frac{8Wp(W^2 + (m_1 + m_2)(m_2 - m_1))}{(W + m_1 + m_2)^2 (W + m_2 - m_1)(W + m_1 - m_2)} \quad (14)$$

$$j_{3(2)} = 2BB^* \frac{-8Wp(W^2 + (m_1 + m_2)(m_1 - m_2))}{(W + m_1 + m_2)^2 (W + m_2 - m_1)(W + m_1 - m_2)} \quad (15)$$

$$j_0 = 2BB^* \frac{4(W^4 - (m_1 + m_2)^2 (m_1 - m_2)^2)}{(W + m_1 + m_2)^2 (W + m_2 - m_1)(W + m_1 - m_2)} \quad (16)$$

si bien que chaque particule acquiert la vitesse constante

$$u_1 = \frac{j_{3(1)}}{j_0} = \frac{2Wp(W^2 + (m_1 + m_2)(m_2 - m_1))}{W^4 - (m_1 + m_2)^2 (m_1 - m_2)^2} \quad (17)$$

$$u_2 = \frac{j_{3(2)}}{j_0} = \frac{-2Wp(W^2 + (m_1 + m_2)(m_1 - m_2))}{W^4 - (m_1 + m_2)^2 (m_1 - m_2)^2} \quad (18)$$

Remarquons que lorsque les masses des particules sont égales, les deux vitesses sont opposées, égales en module à la forme relativiste classique

$$u = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}}.$$

Par contre, lorsque les masses sont différentes, ces deux vitesses diffèrent en intensité, la vitesse de l'une étant influencée par la présence de l'autre particule, puisque les deux masses interviennent dans l'expression de la vitesse. On se retrouve alors dans une situation paradoxale, typique des états intriqués, que si l'on admet que l'onde guide le mouvement des particules supposées ponctuelles, même à très grande distance l'une de l'autre, le mouvement de l'une des particules est influencé par la présence de l'autre particule.

#### 4. Théorème sur la vitesse de groupe pour le mouvement relatif.

Envisageons maintenant l'évolution d'un paquet d'ondes formé par une superposition d'ondes de la forme (6), pour différents  $p$ , le domaine des  $p$  étant un voisinage d'une quantité de mouvement donnée  $p_0$ . On peut écrire ainsi,  $W(p)$  étant déterminé par l'éqn.(12), la composante  $\Psi_{ij}$  sous la forme,

$$\Psi_{j,k}(z_1, z_2, t) = \int dp A_{j,k}(p) \exp(-W(p)t + p(z_1 - z_2)) \quad (19)$$

c'est-à-dire la même forme qu'un paquet d'onde à une particule, mais où la coordonnée  $z$  est remplacée par la coordonnée relative  $z_1 - z_2$ . On sait qu'une telle superposition se comporte au moins pendant un certain temps comme un paquet d'ondes, dont le maximum se déplace à la vitesse de groupe

$$v_G = \frac{dW}{dp}(p_0) \quad [5], [13].$$

On calcule cette dérivée par dérivation de l'éqn.(12) par rapport à  $p$  pour obtenir

$$\frac{dW}{dp} = \frac{4pW}{2W^2 - (m_1 + m_2)^2 - (m_1 - m_2)^2 - 4p^2} \quad (20)$$

que l'on peut réécrire, en multipliant aux numérateur et dénominateur par  $W^2$  et en éliminant  $4p^2 W^2$  par la relation (12),

$$\frac{dW}{dp} = \frac{4pW^3}{W^4 - (m_1 + m_2)^2 (m_1 - m_2)^2} \quad (21)$$

Comparant avec la différence des vitesses

$$u_1 - u_2 = \frac{4pW^3}{W^4 - (m_1 + m_2)^2 (m_1 - m_2)^2} \quad (22)$$

obtenue à partir des éqns.(17) et (18), on constate que la vitesse relative des deux particules égale la vitesse de groupe de l'onde globale.

## 5. Conclusion.

Nous montrons comment l'équation de Dirac à plusieurs particules [6] peut être utilisée pour déterminer les mouvements résultant de la désintégration d'une particule de spin 0 composée de deux particules de spin 1/2. On retrouve une approche ancienne de L. de Broglie [8,9] qui considérait deux corpuscules de Dirac liés de telle sorte que leur énergie et leur quantité de mouvement soient les mêmes, à la différence qu'ici les fonctions d'onde à deux indices ne

sont pas nécessairement des produits de fonctions d'onde individuelles. Nous étudions ici la solution d'une onde plane à 16 composantes associée à la désintégration d'une particule de spin 0 en deux particules de spin 1/2 de quantités de mouvement  $p$  et  $-p$ , comme pour la désintégration de mésons en deux quarks, sauf qu'ici, nous supposons les particules sans interaction ( $V = 0$ ) et ne tenons pas compte en particulier de la force électrique entre les deux quarks chargés. Cette solution peut être déterminée pour tout choix de masses de particules, contrairement au cas du boson de spin 0 composé [10], pour lequel les deux masses des particules étaient contraintes d'être égales. Elle détermine une relation de dispersion pour l'énergie globale, relation polynomiale entre l'énergie, la quantité de mouvement  $p$  et les deux masses des particules, identique à celle déterminée pour le boson composé [10], de même forme que la relation classique de l'énergie relativiste lorsque les masses des deux particules sont égales. Il apparaît alors que les vitesses des deux particules sont opposées et constantes, la vitesse de l'une des particules dépendant aussi de la masse de l'autre particule, même lorsque les deux particules deviennent très distantes l'une de l'autre.

Nous démontrons aussi, dans le cadre de ce formalisme, le théorème de vitesse de groupe pour le mouvement relatif des deux particules, que la vitesse de groupe de l'onde globale égale la vitesse relative des deux particules, ceci donnant une certaine légitimité à l'approche utilisée et à la relation de dispersion pour l'énergie, de forme assez inattendue.

Cet article ouvre une voie intéressante pour déterminer de façon générale les trajectoires relativistes de deux particules de spin 1/2 émises lors de la désintégration d'une particule de spin 0. Pour le problème de la désintégration de mésons en deux quarks, on pourra intégrer de façon numérique les éqns.(5), en tenant compte du potentiel d'interaction entre les deux particules chargées.

On pourra aussi clarifier l'objection de L. De Broglie sur le théorème de Bell, selon laquelle celui-ci n'est plus valide lorsque les paquets d'onde des deux particules émises n'ont plus de superposition [3]. En intégrant de façon numérique les éqns.(5), avec comme forme initiale un paquet d'onde dans l'espace de configuration, on pourra déterminer précisément à quelle distance les deux paquets d'onde deviennent bien séparés, et peut être reprendre les expériences sur les corrélations des spins de particules matérielles [4], avec en plus comme donnée, une distance caractéristique des deux polariseurs pour laquelle, il n'y aurait plus de corrélations entre les deux particules émises au delà de cette distance.

# Appendice A : Expression des 4-vecteurs courant et du 4-vecteur spin total.

Ecrivons ici, en s'aidant de la table 1, les composantes du 4-vecteur courant des deux particules prises séparément, et du 4-vecteur spin total,

|               | $\Psi_\alpha^*$ | $\Psi_\beta^*$ | $\Psi_\gamma^*$ | $\Psi_\delta^*$ |
|---------------|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| $j^0$         | $\Psi_\alpha$   | $\Psi_\beta$   | $\Psi_\gamma$   | $\Psi_\delta$   |
| $j^1$         | $\Psi_\delta$   | $\Psi_\gamma$  | $\Psi_\beta$    | $\Psi_\alpha$   |
| $ij^2$        | $\Psi_\delta$   | $-\Psi_\gamma$ | $\Psi_\beta$    | $-\Psi_\alpha$  |
| $j^3$         | $\Psi_\gamma$   | $-\Psi_\delta$ | $\Psi_\alpha$   | $-\Psi_\beta$   |
| $2\sigma_0$   | $-\Psi_\gamma$  | $-\Psi_\delta$ | $-\Psi_\alpha$  | $-\Psi_\beta$   |
| $2\sigma_1$   | $\Psi_\beta$    | $\Psi_\alpha$  | $\Psi_\delta$   | $\Psi_\gamma$   |
| $-2i\sigma_2$ | $\Psi_\beta$    | $-\Psi_\alpha$ | $\Psi_\delta$   | $-\Psi_\gamma$  |
| $2\sigma_3$   | $\Psi_\alpha$   | $-\Psi_\beta$  | $\Psi_\gamma$   | $-\Psi_\delta$  |

Table 1 : Expression des 4-vecteurs courant et spin en fonction des fonctions d'onde d'une seule particule (Extrait de J.Yvon [14]).

Etant entendu que la table 1 ne détermine ces quantités que pour une seule particule. Par exemple, on sélectionne dans la colonne de gauche, la quantité désirée, qui doit être égale à la somme des produits des fonctions d'onde de la ligne et de la fonction d'onde conjuguée en haut de la colonne correspondante.

On détermine ainsi les composantes du courant de la première puis de la seconde particule

$$\begin{aligned}
j_{0(1)} = & \Psi_{11} \Psi_{11}^* + \Psi_{21} \Psi_{21}^* + \Psi_{31} \Psi_{31}^* + \Psi_{41} \Psi_{41}^* \\
& + \Psi_{12} \Psi_{12}^* + \Psi_{22} \Psi_{22}^* + \Psi_{32} \Psi_{32}^* + \Psi_{42} \Psi_{42}^* \\
& + \Psi_{13} \Psi_{13}^* + \Psi_{23} \Psi_{23}^* + \Psi_{33} \Psi_{33}^* + \Psi_{43} \Psi_{43}^* \\
& + \Psi_{14} \Psi_{14}^* + \Psi_{24} \Psi_{24}^* + \Psi_{34} \Psi_{34}^* + \Psi_{44} \Psi_{44}^* \quad (A.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{0(2)} = & \Psi_{11} \Psi_{11}^* + \Psi_{12} \Psi_{12}^* + \Psi_{13} \Psi_{13}^* + \Psi_{14} \Psi_{14}^* \\
& + \Psi_{21} \Psi_{21}^* + \Psi_{22} \Psi_{22}^* + \Psi_{23} \Psi_{23}^* + \Psi_{24} \Psi_{24}^* \\
& + \Psi_{31} \Psi_{31}^* + \Psi_{32} \Psi_{32}^* + \Psi_{33} \Psi_{33}^* + \Psi_{34} \Psi_{34}^* \\
& + \Psi_{41} \Psi_{41}^* + \Psi_{42} \Psi_{42}^* + \Psi_{43} \Psi_{43}^* + \Psi_{44} \Psi_{44}^* \quad (A.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{1(1)} = & \Psi_{41} \Psi_{11}^* + \Psi_{31} \Psi_{21}^* + \Psi_{21} \Psi_{31}^* + \Psi_{11} \Psi_{41}^* \\
& + \Psi_{42} \Psi_{12}^* + \Psi_{32} \Psi_{22}^* + \Psi_{22} \Psi_{32}^* + \Psi_{12} \Psi_{42}^* \\
& + \Psi_{43} \Psi_{13}^* + \Psi_{33} \Psi_{23}^* + \Psi_{23} \Psi_{33}^* + \Psi_{13} \Psi_{43}^* \\
& + \Psi_{44} \Psi_{14}^* + \Psi_{34} \Psi_{24}^* + \Psi_{24} \Psi_{34}^* + \Psi_{14} \Psi_{44}^* \quad (A.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{1(2)} = & \Psi_{14} \Psi_{11}^* + \Psi_{13} \Psi_{12}^* + \Psi_{12} \Psi_{13}^* + \Psi_{11} \Psi_{14}^* \\
& + \Psi_{24} \Psi_{21}^* + \Psi_{23} \Psi_{22}^* + \Psi_{22} \Psi_{23}^* + \Psi_{21} \Psi_{24}^* \\
& + \Psi_{34} \Psi_{31}^* + \Psi_{33} \Psi_{32}^* + \Psi_{32} \Psi_{33}^* + \Psi_{31} \Psi_{34}^* \\
& + \Psi_{44} \Psi_{41}^* + \Psi_{43} \Psi_{42}^* + \Psi_{42} \Psi_{43}^* + \Psi_{41} \Psi_{44}^* \quad (A.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ij_{2(1)} = & \Psi_{41} \Psi_{11}^* - \Psi_{31} \Psi_{21}^* + \Psi_{21} \Psi_{31}^* - \Psi_{11} \Psi_{41}^* \\
& + \Psi_{42} \Psi_{12}^* - \Psi_{32} \Psi_{22}^* + \Psi_{22} \Psi_{32}^* - \Psi_{12} \Psi_{42}^* \\
& + \Psi_{43} \Psi_{13}^* - \Psi_{33} \Psi_{23}^* + \Psi_{23} \Psi_{33}^* - \Psi_{13} \Psi_{43}^* \\
& + \Psi_{44} \Psi_{41}^* - \Psi_{34} \Psi_{24}^* + \Psi_{24} \Psi_{34}^* - \Psi_{14} \Psi_{44}^* \quad (A.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ij_{2(2)} = & \Psi_{14} \Psi_{11}^* - \Psi_{13} \Psi_{12}^* + \Psi_{12} \Psi_{13}^* - \Psi_{11} \Psi_{14}^* \\
& + \Psi_{24} \Psi_{21}^* - \Psi_{23} \Psi_{22}^* + \Psi_{22} \Psi_{23}^* - \Psi_{21} \Psi_{24}^* \\
& + \Psi_{34} \Psi_{31}^* - \Psi_{33} \Psi_{32}^* + \Psi_{32} \Psi_{33}^* - \Psi_{31} \Psi_{34}^* \\
& + \Psi_{44} \Psi_{41}^* - \Psi_{43} \Psi_{42}^* + \Psi_{42} \Psi_{43}^* - \Psi_{41} \Psi_{44}^* \quad (A.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{3(1)} = & \Psi_{31} \Psi_{11}^* - \Psi_{41} \Psi_{21}^* + \Psi_{11} \Psi_{31}^* - \Psi_{21} \Psi_{41}^* \\
& + \Psi_{32} \Psi_{12}^* - \Psi_{42} \Psi_{22}^* + \Psi_{12} \Psi_{32}^* - \Psi_{22} \Psi_{42}^* \\
& + \Psi_{33} \Psi_{13}^* - \Psi_{43} \Psi_{23}^* + \Psi_{13} \Psi_{33}^* - \Psi_{23} \Psi_{43}^* \\
& + \Psi_{34} \Psi_{14}^* - \Psi_{44} \Psi_{24}^* + \Psi_{14} \Psi_{34}^* - \Psi_{24} \Psi_{44}^* \quad (A.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{3(2)} = & \Psi_{13} \Psi_{11}^* - \Psi_{14} \Psi_{12}^* + \Psi_{11} \Psi_{13}^* - \Psi_{12} \Psi_{14}^* \\
& + \Psi_{23} \Psi_{21}^* - \Psi_{24} \Psi_{22}^* + \Psi_{21} \Psi_{23}^* - \Psi_{22} \Psi_{24}^* \\
& + \Psi_{33} \Psi_{31}^* - \Psi_{34} \Psi_{32}^* + \Psi_{31} \Psi_{33}^* - \Psi_{32} \Psi_{34}^* \\
& + \Psi_{43} \Psi_{41}^* - \Psi_{44} \Psi_{42}^* + \Psi_{41} \Psi_{43}^* - \Psi_{42} \Psi_{44}^* \quad (A.8)
\end{aligned}$$

et les quatre composantes du spin total

$$\begin{aligned}
2\sigma_0 = & - ( \Psi_{13} \Psi_{11}^* + \Psi_{14} \Psi_{12}^* + \Psi_{11} \Psi_{13}^* + \Psi_{12} \Psi_{14}^* \\
& + \Psi_{23} \Psi_{21}^* + \Psi_{24} \Psi_{22}^* + \Psi_{21} \Psi_{23}^* + \Psi_{22} \Psi_{24}^* \\
& + \Psi_{33} \Psi_{31}^* + \Psi_{34} \Psi_{32}^* + \Psi_{31} \Psi_{33}^* + \Psi_{32} \Psi_{34}^* \\
& + \Psi_{43} \Psi_{41}^* + \Psi_{44} \Psi_{42}^* + \Psi_{41} \Psi_{43}^* + \Psi_{42} \Psi_{44}^* ) \\
& - ( \Psi_{31} \Psi_{11}^* + \Psi_{41} \Psi_{21}^* + \Psi_{11} \Psi_{31}^* + \Psi_{21} \Psi_{41}^* \\
& + \Psi_{32} \Psi_{12}^* + \Psi_{42} \Psi_{22}^* + \Psi_{12} \Psi_{32}^* + \Psi_{22} \Psi_{42}^* \\
& + \Psi_{33} \Psi_{31}^* + \Psi_{43} \Psi_{23}^* + \Psi_{13} \Psi_{33}^* + \Psi_{23} \Psi_{43}^* \\
& + \Psi_{34} \Psi_{14}^* + \Psi_{44} \Psi_{24}^* + \Psi_{14} \Psi_{34}^* + \Psi_{24} \Psi_{44}^* ) \quad (A.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\sigma_1 = & + ( \Psi_{12} \Psi_{11}^* + \Psi_{11} \Psi_{12}^* + \Psi_{14} \Psi_{13}^* + \Psi_{13} \Psi_{14}^* \\
& + \Psi_{22} \Psi_{21}^* + \Psi_{21} \Psi_{22}^* + \Psi_{24} \Psi_{23}^* + \Psi_{23} \Psi_{24}^* \\
& + \Psi_{32} \Psi_{31}^* + \Psi_{31} \Psi_{32}^* + \Psi_{34} \Psi_{33}^* + \Psi_{33} \Psi_{34}^* \\
& + \Psi_{42} \Psi_{41}^* + \Psi_{41} \Psi_{42}^* + \Psi_{44} \Psi_{43}^* + \Psi_{43} \Psi_{44}^* ) \\
& + ( \Psi_{21} \Psi_{11}^* + \Psi_{11} \Psi_{21}^* + \Psi_{41} \Psi_{31}^* + \Psi_{31} \Psi_{41}^* \\
& + \Psi_{22} \Psi_{12}^* + \Psi_{12} \Psi_{22}^* + \Psi_{42} \Psi_{32}^* + \Psi_{32} \Psi_{42}^* \\
& + \Psi_{23} \Psi_{13}^* + \Psi_{13} \Psi_{23}^* + \Psi_{43} \Psi_{33}^* + \Psi_{33} \Psi_{43}^* \\
& + \Psi_{24} \Psi_{14}^* + \Psi_{14} \Psi_{24}^* + \Psi_{44} \Psi_{34}^* + \Psi_{34} \Psi_{44}^* ) \quad (A.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -2i\sigma_2 = &+ (\Psi_{12}\Psi_{11}^* - \Psi_{11}\Psi_{12}^* + \Psi_{14}\Psi_{13}^* - \Psi_{13}\Psi_{14}^* \\
 &+ \Psi_{22}\Psi_{21}^* - \Psi_{21}\Psi_{22}^* + \Psi_{24}\Psi_{23}^* - \Psi_{23}\Psi_{24}^* \\
 &+ \Psi_{32}\Psi_{31}^* - \Psi_{31}\Psi_{32}^* + \Psi_{34}\Psi_{33}^* - \Psi_{33}\Psi_{34}^* \\
 &+ \Psi_{42}\Psi_{41}^* - \Psi_{41}\Psi_{42}^* + \Psi_{44}\Psi_{43}^* - \Psi_{43}\Psi_{44}^*) \\
 &+ (\Psi_{21}\Psi_{11}^* - \Psi_{11}\Psi_{21}^* + \Psi_{41}\Psi_{31}^* - \Psi_{31}\Psi_{41}^* \\
 &+ \Psi_{22}\Psi_{12}^* - \Psi_{12}\Psi_{22}^* + \Psi_{42}\Psi_{32}^* - \Psi_{32}\Psi_{42}^* \\
 &+ \Psi_{23}\Psi_{13}^* - \Psi_{13}\Psi_{23}^* + \Psi_{43}\Psi_{33}^* - \Psi_{33}\Psi_{43}^* \\
 &+ \Psi_{24}\Psi_{14}^* - \Psi_{14}\Psi_{24}^* + \Psi_{44}\Psi_{34}^* - \Psi_{34}\Psi_{44}^*) \quad (A.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2\sigma_3 = &+ (\Psi_{11}\Psi_{11}^* - \Psi_{12}\Psi_{12}^* + \Psi_{13}\Psi_{13}^* - \Psi_{14}\Psi_{14}^* \\
 &+ \Psi_{21}\Psi_{21}^* - \Psi_{22}\Psi_{22}^* + \Psi_{23}\Psi_{23}^* - \Psi_{24}\Psi_{24}^* \\
 &+ \Psi_{31}\Psi_{31}^* - \Psi_{32}\Psi_{32}^* + \Psi_{33}\Psi_{33}^* - \Psi_{34}\Psi_{34}^* \\
 &+ \Psi_{41}\Psi_{41}^* - \Psi_{42}\Psi_{42}^* + \Psi_{43}\Psi_{43}^* - \Psi_{44}\Psi_{44}^*) \\
 &+ (\Psi_{11}\Psi_{11}^* - \Psi_{21}\Psi_{21}^* + \Psi_{31}\Psi_{31}^* - \Psi_{41}\Psi_{41}^* \\
 &+ \Psi_{12}\Psi_{12}^* - \Psi_{22}\Psi_{22}^* + \Psi_{32}\Psi_{32}^* - \Psi_{42}\Psi_{42}^* \\
 &+ \Psi_{13}\Psi_{13}^* - \Psi_{23}\Psi_{23}^* + \Psi_{33}\Psi_{33}^* - \Psi_{43}\Psi_{43}^* \\
 &+ \Psi_{14}\Psi_{14}^* - \Psi_{24}\Psi_{24}^* + \Psi_{34}\Psi_{34}^* - \Psi_{44}\Psi_{44}^*) \quad (A.12)
 \end{aligned}$$

## Appendice B : Expression du 4-vecteur courant et du 4-vecteur spin total pour les ondes planes émises en sens opposés.

En utilisant l'appendice A, on peut alors calculer les deux composantes 0 du courant de l'onde plane,

$$j_{0(1)} = j_{0(2)} = (1 + \alpha^2 + (1 + \beta^2) \frac{(1 + \alpha)^2}{(E + 2m_2)^2} p^2) (AA^* + BB^* + CC^* + DD^*) \quad (B.1)$$

constater que les composantes 1 et 2 sont nulles,

$$j_{1(1)} = j_{1(2)} = j_{2(1)} = j_{2(2)} = 0 \quad (B.2)$$

que les composantes 3 pour les demi-particules 1 et 2 sont respectivement égales à

$$j_{3(1)} = 2(\alpha + \beta) \frac{(\alpha + 1)}{E + 2m_2} p (AA^* + BB^* + CC^* + DD^*) \quad (B.3)$$

$$j_{3(2)} = -2(1 + \alpha\beta) \frac{(\alpha + 1)}{E + 2m_2} p (AA^* + BB^* + CC^* + DD^*) \quad (B.4)$$

et que les quatre composantes du quadrivecteur spin total sont respectivement égales à

$$2\sigma_0 = \frac{2(1 + \alpha)}{(E + 2m_2)} p ((1 + \alpha\beta - \alpha - \beta)(AA^* - DD^*) + (1 + \alpha\beta + \alpha + \beta)(CC^* - BB^*)) \quad (B.5)$$

$$2\sigma_1 = (1 - \alpha^2 + \frac{(\alpha + 1)^2(\beta^2 - 1)}{(E + 2m_2)^2} p^2) (BA^* + AB^* + DC^* + CD^*) + (1 - \alpha^2 - \frac{(\alpha + 1)^2(\beta^2 - 1)}{(E + 2m_2)^2} p^2) (CA^* + AC^* + DB^* + BD^*) \quad (B.6)$$

$$-2i\sigma_2 = (1 - \alpha^2 + \frac{(\alpha + 1)^2(\beta^2 - 1)}{(E + 2m_2)^2} p^2) (BA^* - AB^* + DC^* - CD^*) + (1 - \alpha^2 - \frac{(\alpha + 1)^2(\beta^2 - 1)}{(E + 2m_2)^2} p^2) (CA^* - AC^* + DB^* - BD^*) \quad (B.7)$$

$$2\sigma_3 = (2(1+\alpha^2) + \frac{2(1+\beta^2)(1+\alpha)^2}{(E+2m_2)^2} p^2)(AA^* - DD^*) \quad (B.8)$$

## Références

- [1] Einstein A., Podolsky B. and Rosen N., Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete, Physical Review 47,777-780 (1935).
- [2] Bell J., On the problem of hidden variables in quantum mechanics, Reviews of Modern Physics 38, 447-452 (1966).
- [3] De Broglie L., Réfutation du théorème de Bell, dans Jalons pour une nouvelle microphysique, Gauthier-Villars 147-150 (1978).
- [4] Quantum theory and measurement, edited by A.Wheeler and H.Zurek, Princeton Series in Physics (1983).
- [5] De Broglie L., Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire (La théorie de la double solution) Gauthier-Villars, Paris (1956).
- [6] Bohm D. and Hiley B.J., The undivided universe (Routledge) (1993).
- [7] Wentzel G., Quantum theory of fields, Interscience Publishers (1949), reedition Dover (2003).
- [8] De Broglie L., Une nouvelle théorie de la lumière, tome premier, Hermann et Cie, Paris (1940).
- [9] De Broglie L., Théorie générale des particules à spin (Méthode de fusion), Gauthier-Villars, Paris (1943).
- [10] Pelcé P., Mouvements de particules de spin global 0 composées de deux particules de spin 1/2 , à paraître.
- [11] Lifchitz E. et Pitayevski L., Théorie Quantique Relativiste deuxième partie, tome V du cours de Physique Théorique de Landau et Lifchitz (Editions Mir Moscou) (1973).
- [12] L'élégante traque du boson de Higgs, Les défis du CEA, Hors-série Décembre 2013.
- [13] Cohen-Tannoudji C, Diu B. et Laloë F., Mécanique quantique, Vol.1, Hermann (1977).
- [14] Yvon J., Equations de Dirac-Madelung, Journal de Physique 1, 18-24, Oeuvre scientifique, Vol.1, 279-285 (1940).

(Manuscrit révisé le 27 Mars 2018)