Le monopôle magnétique dans le modèle standard[1]

C. Daviau [a], J. Bertrand [b]

[a] Le Moulin de la Lande, 44522 Pouillé-les-coteaux, France
claude.daviau@nordnet.fr

[b] 15 Avenue Danielle Casanova, 95210 St Gratien, France
bertrandjacques-m@orange.fr

RÉSUMÉ. Le modèle standard considère les différents fermions comme répartis en trois générations. La première génération suffit à la description de la matière ordinaire. L'onde des fermions de première génération comprend une partie leptonique et une partie correspondant aux quarks composants les protons et les neutrons des noyaux atomiques. La partie leptonique de l'onde quantique de spin 1/2 comprend à la fois l'onde de l'électron et celle du monopôle magnétique. Le monopôle magnétique est le neutrino avec en plus une onde droite. Il complète donc le modèle standard et s'insère dans ce modèle. L'onde fermionique est une fonction de l'espace-temps dans $end(Cl_3)$. Cette structure mathématique justifie l'existence des quarks et la couleur en résulte. L'onde est régie par une équation aux dérivées partielles généralisant l'équation d'onde obtenue par G. Lochak pour le monopôle magnétique. Cette équation découle d'une densité lagrangienne qui est la partie réelle cliffordienne de l'équation d'onde elle-même. Elle est invariante sous le groupe Cl_3^* des éléments inversibles de l'algèbre $Cl_3 = M_2(\mathbb{C})$, généralisant l'invariance relativiste. Les deux courants conservatifs sont accompagnés par deux tenseurs d'impulsion-énergie. Le courant de densité de probabilité généralise celui de l'électron et celui du monopôle seul. La normalisation de l'onde équivaut au principe d'équivalence masse gravitationnelle – masse inerte, base de la relativité générale. La quantification du moment cinétique, avec la valeur $\hbar/2$, découle de l'invariance relativiste élargie et de l'existence des deux tenseurs d'impulsion-énergie. La dynamique du monopôle magnétique est celle de la force de Lorentz du cas magnétique.

[1]NDLR : Cet article fait suite à l'exposé présenté lors des *Journées Louis de Broglie* organisées le 4 juin 2019.

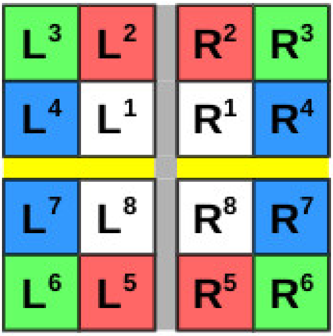
ABSTRACT. The Standard Model considers the different fermions as three similar generations. The first one is enough for describing the ordinary matter. The wave of all fermions of the first generation includes a lepton part and a quark part corresponding to the quarks of the protons and neutrons in the nuclei of atoms. The lepton part of the quantum wave with spin 1/2 contains both the electron wave and the magnetic monopole wave. The magnetic monopole is the neutrino with also a right wave. This object is then supplementing the Standard Model and it fits into this model. The fermion wave is a function of space-time into $end(Cl_3)$. This mathematical structure explains both the existence and the colour of the quarks. The movement of the fermion wave is ruled by an equation generalizing the wave equation obtained by G. Lochak. This wave equation is obtained from a Lagrangian density which is exactly the Cliffordian real part of the same wave equation. It is invariant under the Cl_3^* group of invertible elements in $Cl_3 = M_2(\mathbb{C})$ generalizing the relativistic invariance. The two conservative currents are linked to two tensors of impulse-energy. The current of density of probability generalizes this one of the electron and this of the alone magnetic monopole. The normalization of the wave is equivalent to the principle of equivalence between gravitational mass and inertial mass, basis of the General Relativity. The quantification of the kinetic momentum with the $\hbar/2$ value comes from the enlarged relativistic invariance and from the existence of the double impulse-energy tensors. The dynamics of the magnetic monopole satisfies the Lorentzian force in the magnetic case.

Keywords : invariance group, Dirac equation, electromagnetism, weak interactions, Clifford algebras, electric charge, quark, colour, Lorentz force.

P.A.C.S.: 15A66, 35Q41, 81T13, 83E15

1 Introduction

L'onde quantique de l'électron [1] à [9], celle du monopôle magnétique [10] à [17] ou celles des quarks composants les protons et neutrons, sont constituées d'une onde gauche et d'une onde droite liées par le terme de masse de l'équation d'onde qui régit l'évolution de l'onde [18] à [35]. Le modèle standard regroupe les différents fermions en trois générations similaires. La première génération comporte, outre l'électron et deux quarks avec trois états de couleur, un neutrino qui n'a, dans le modèle standard, qu'une onde gauche, l'antineutrino n'ayant lui qu'une onde droite. Le monopôle magnétique est le neutrino complet, avec onde gauche et onde droite. La symétrie évidente du graphique ci-dessous est un premier argument pour l'existence du monopôle magnétique comme complétant le modèle standard. Il y a huit ondes gauches, numérotées de 1 à 8. Il n'y a aucune raison qui empêcherait l'existence d'une huitième onde droite. La partie centrale de la figure correspond aux quatre ondes de la partie leptonique. Chacune des 16 ondes est une fonction de l'espace et du temps à valeur dans $\mathbb{C}^2$.



Rappelons l'origine de la chiralité des ondes fermioniques, qui est relativiste : soit M un élément quelconque de $M_2(\mathbb{C}) = Cl_3$ (l'algèbre engendrée par les matrices de Pauli σ_j, $j = 1, 2, 3$), soit x l'élément général de l'espace-temps :

$$M = M_0 + M_1 + M_2 + M_3;\; M_0 = s;\; M_1 = M_1^j \sigma_j;\; M_2 = iM_2^j \sigma_j,$$

$$M_3 = ip;\; s \in \mathbb{R};\; M_1^j \in \mathbb{R};\; M_2^j \in \mathbb{R};\; p \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

$$re^{i\theta} = \det(M);\; \widehat{M} = M_0 - M_1 + M_2 - M_3, \tag{1.2}$$

$$\widetilde{M} = M^\dagger = M_0 + M_1 - M_2 - M_3, \tag{1.3}$$

$$\overline{M} = \widehat{M}^\dagger = M_0 - M_1 - M_2 + M_3, \tag{1.4}$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} \mathrm{x}^0 + \mathrm{x}^3 & \mathrm{x}^1 - i\mathrm{x}^2 \\ \mathrm{x}^1 + i\mathrm{x}^2 & \mathrm{x}^0 - \mathrm{x}^3 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

où on utilise la sommation usuelle sur les indices hauts et bas, avec des indices latins allant de 1 à 3 et des indices grecs allant de 0 à 3. Les quatre parties de la figure sont associés aux quatre types de représentations du groupe Cl_3^*. En effet la transformation :

$$f : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{x}' = f(\mathrm{x}) = M\mathrm{x}M^\dagger, \tag{1.6}$$

est, lorsque $\det(M) = 1$, une transformation de Lorentz conservant l'orientation du temps et de l'espace. Sous cette transformation les ondes droites et gauches se transforment selon :

$$\begin{aligned}
&R^n \mapsto R'^n = MR^n;\ \widehat{L}^n \mapsto \widehat{L}'^n = \widehat{M}\widehat{L}^n,\\
&\widetilde{R}^n \mapsto \widetilde{R}'^n = \widetilde{R}^n\widetilde{M};\ \overline{L}^n \mapsto \overline{L}'^n = \overline{L}^n\overline{M}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Le précédent tableau ne rend pas compte que de la première génération, car les deux autres sont complètement semblables, et on peut proposer une explication à cette situation, explication qui permet aussi l'existence d'un quatrième neutrino (voir [35] 2.6).

L'onde quantique de l'électron, ou du monopôle magnétique, a été initialement introduite comme une application de l'espace-temps dans $\mathbb{C}^4$ (spineurs de Dirac). La forme que prend l'invariance relativiste oblige à considérer cet espace-temps comme la partie des M de Cl_3 telle que $M = M^\dagger = M_0 + M_1$. Comme le cône de lumière ($\det(\mathrm{x}) = 0$) ne nous est pas accessible, nous pouvons considérer que $\mathrm{x} \in Cl_3^*$. Par ailleurs toutes les solutions utiles de l'équation d'onde de l'électron (ondes planes et solutions pour l'atome d'hydrogène) sont à valeur dans Cl_3^* (voir [35] Annexe C). L'onde quantique de l'électron, du monopôle magnétique et de chaque état de couleur des quarks, est donc une application de Cl_3^* dans Cl_3^*. On peut alors constater que la condition restrictive $\det(M) = 1$ n'a aucune nécessité géométrique, la dynamique de l'onde quantique est en fait invariante sous le groupe plus vaste $Cl_3^* = GL(2, \mathbb{C})$.

Parmi les nombreuses choses qui trouvent alors une explication, la plus importante est la quantification elle-même (voir [35] 3.5, 4.7 et 5.6.2). D'abord les transformations f induites sont des similitudes, composées d'une transformation de Lorentz conservant l'orientation du temps et de l'espace et d'une homothétie de rapport r. Le groupe $Cl_3^* = GL(2, \mathbb{C})$ est un groupe de Lie de dimension 8 sur $\mathbb{R}$, son algèbre de Lie est l'algèbre Cl_3 elle-même. Nous notons $\phi_e = \phi_e(\mathrm{x})$ l'onde de l'électron, $\phi_n = \phi_n(\mathrm{x})$ l'onde du monopôle magnétique, $\phi_{dc},\ c = r, g, b$ les ondes des états de couleur du quark d, $\phi_{uc},\ c = r, g, b$ les ondes des états de couleur du quark u. Le modèle standard suppose que chacune de ces ondes suit une équation de Dirac. Avec le terme de masse obtenu par Lochak pour le monopôle magnétique, et dans le cas où l'équation d'onde est homogène, l'équation d'onde de l'électron (équation de Dirac à terme de masse non linéaire, ayant l'équation de Dirac comme approximation linéaire) s'écrit sous forme invariante :

$$0 = \overline{\phi}_e(\nabla\widehat{\phi}_e)\sigma_{21} + \overline{\phi}_e qA\widehat{\phi}_e + m\rho, \tag{1.8}$$

$$\overline{\phi}_e = \widehat{\phi}_e^\dagger;\ A = A^\mu\sigma_\mu;\ \phi_e\overline{\phi}_e = \rho e^{i\beta} = \det(\phi_e). \tag{1.9}$$

Cette dernière égalité définit l'angle d'Yvon-Takabayasi β. Les A^μ sont les composantes du potentiel électromagnétique. Notant η^1 la composante gauche et ξ^1 la composante droite de l'onde électronique, nous avons :

$$\phi_e = \sqrt{2}\begin{pmatrix}\xi_1^1 & -\bar{\eta}_2^1\\ \xi_2^1 & \bar{\eta}_1^1\end{pmatrix};\ \widehat{\phi}_e = \sqrt{2}\begin{pmatrix}\eta_1^1 & -\bar{\xi}_2^1\\ \eta_2^1 & \bar{\xi}_1^1\end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

$$\rho e^{i\beta} = \det(\phi_e) = \Omega_1 + i\Omega_2 = 2\eta^{1\dagger}\xi^1 \tag{1.11}$$

Le modèle standard s'est construit par généralisation de la théorie quantique des champs. Il présente deux caractéristiques différentes par rapport à ce que nous venons de décrire pour l'électron : l'équation d'onde est invariante de jauge sous un groupe plus vaste et non commutatif. L'onde est à valeur dans un espace d'opérateurs linéaires agissant sur l'onde elle-même. On peut rendre compte très simplement de ces deux caractéristiques en constatant que l'onde quantique de l'électron, du monopôle magnétique ou des quarks de couleur est à valeur dans l'espace des endomorphismes sur Cl_3, espace qui se trouve être aussi une algèbre de Clifford : $end(Cl_3) = M_8(\mathbb{R}) = Cl_{3,3}$. On a alors :

$$\phi(\mathrm{x}) = [\Psi(\mathrm{x})](\chi);\ \phi(\mathrm{x}) \in Cl_3;\ \chi \in Cl_3;\ \Psi(\mathrm{x}) \in Cl_{3,3}. \tag{1.12}$$

2 Terme général et renversé dans $Cl_{1,5}$ et $Cl_{3,3}$

Nous avons précédemment utilisé l'algèbre $Cl_{1,5}$, parce qu'elle était une généralisation naturelle de $Cl_{1,3}$, algèbre d'un espace-temps de signature + - - -. On relie l'algèbre d'espace-temps $Cl_{1,3}$ à cette algèbre plus vaste en utilisant la représentation matricielle suivante, avec $\mu = 0, 1, 2, 3$:

$$L_\mu = \begin{pmatrix}0 & \gamma_\mu\\ \gamma_\mu & 0\end{pmatrix}\ ;\ L_4 = \begin{pmatrix}0 & -I_4\\ I_4 & 0\end{pmatrix}\ ;\ L_5 = \begin{pmatrix}0 & \mathbf{i}\\ \mathbf{i} & 0\end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

où I_4 est la matrice unité 4×4 et où

$$\mathbf{i} = \gamma_{0123} = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = i\gamma_5;\ I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

On utilise toujours la représentation matricielle convenant pour les fortes vitesses :

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} ;\ \gamma^j = -\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} ; \gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

où les σ_j sont les matrices de Pauli. Nous utilisons maintenant une autre algèbre, de même dimension, $Cl_{3,3}$, qui est aussi l'algèbre des endomorphismes de Cl_3. Cette algèbre se relie à $Cl_{1,3}$ et $Cl_{1,5}$ grâce à :

$$\Gamma_\mu = L_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \\ \gamma_\mu & 0 \end{pmatrix},\ \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{2.4}$$

$$\Gamma_4 = iL_4 = \begin{pmatrix} 0 & -iI_4 \\ iI_4 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ \Gamma_5 = -iL_5 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_5 \\ \gamma_5 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

Les indices $\mu, \nu, \rho \ldots$ ont pour valeur $0, 1, 2, 3$ et les indices a, b, c, d, e ont pour valeur $0, 1, 2, 3, 4, 5$. On a :

$$\Gamma_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} = L_\mu L_\nu = \begin{pmatrix} \gamma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \gamma_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = L_{\mu\nu\rho} = L_{\mu\nu} L_\rho = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\mu\nu\rho} \\ \gamma_{\mu\nu\rho} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$\Gamma_{0123} = L_{0123} = L_{01} L_{23} = \begin{pmatrix} \gamma_{0123} & 0 \\ 0 & \gamma_{0123} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

$$\Gamma_{45} = L_{45} = L_4 L_5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$\Gamma_{012345} = L_{012345} = L_{0123} L_{45} = \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

On obtient aussi :

$$L_{01235} = L_{0123} L_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_4 \\ -I_4 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

$$L_{\mu 4} = \begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & -\gamma_\mu \end{pmatrix} \ ; \ L_{\mu 5} = \begin{pmatrix} \gamma_\mu \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \mathbf{i} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

$$L_{\mu\nu 4} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{\mu\nu} \\ \gamma_{\mu\nu} & 0 \end{pmatrix} \ ; \ L_{\mu\nu 5} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\mu\nu}\mathbf{i} \\ \gamma_{\mu\nu}\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

$$L_{\mu\nu\rho 4} = \begin{pmatrix} \gamma_{\mu\nu\rho} & 0 \\ 0 & -\gamma_{\mu\nu\rho} \end{pmatrix} \ ; \ L_{\mu\nu\rho 5} = \begin{pmatrix} \gamma_{\mu\nu\rho}\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \gamma_{\mu\nu\rho}\mathbf{i} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

De même on obtient :

$$L_{\mu 45} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \mathbf{i} \\ -\gamma_\mu \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad L_{\mu\nu 45} = \begin{pmatrix} -\gamma_{\mu\nu}\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \gamma_{\mu\nu}\mathbf{i} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

$$L_{\mu\nu\rho 45} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\mu\nu\rho}\mathbf{i} \\ -\gamma_{\mu\nu\rho}\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad L_{01234} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Le terme général de $Cl_{1,5}$ s'écrit :

$$\Psi^{1,5} = \Psi_0^{1,5} + \Psi_1^{1,5} + \Psi_2^{1,5} + \Psi_3^{1,5} + \Psi_4^{1,5} + \Psi_5^{1,5} + \Psi_6^{1,5}, \tag{2.17}$$

$$\Psi_1^{1,5} = \sum_{a=0}^{a=5} N^a L_a, \; \Psi_2^{1,5} = \sum_{0\leqslant a<b\leqslant 5} N^{ab} L_{ab}, \; \Psi_3^{1,5} = \sum_{0\leqslant a<b<c\leqslant 5} N^{abc} L_{abc}$$

$$\Psi_4^{1,5} = \sum_{0\leqslant a<b<c<d\leqslant 5} N^{abcd} L_{abcd}, \; \Psi_5^{1,5} = \sum_{0\leqslant a<b<c<d<e\leqslant 5} N^{abcde} L_{abcde},$$

$$\Psi_0^{1,5} = sI_8, s \in \mathbb{R} \; ; \quad \Psi_6^{1,5} = pL_{012345}, \; p \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

où les N^{ind} sont des nombres réels. Le terme général de $Cl_{3,3}$ s'écrit :

$$\Psi^{3,3} = \Psi_0^{3,3} + \Psi_1^{3,3} + \Psi_2^{3,3} + \Psi_3^{3,3} + \Psi_4^{3,3} + \Psi_5^{3,3} + \Psi_6^{3,3}, \tag{2.19}$$

$$\Psi_1^{3,3} = \sum_{a=0}^{a=5} N^a \Gamma_a, \; \Psi_2^{3,3} = \sum_{0\leqslant a<b\leqslant 5} N^{ab} \Gamma_{ab}, \; \Psi_3^{3,3} = \sum_{0\leqslant a<b<c\leqslant 5} N^{abc} \Gamma_{abc}$$

$$\Psi_4^{3,3} = \sum_{0\leqslant a<b<c<d\leqslant 5} N^{abcd} \Gamma_{abcd}, \; \Psi_5^{3,3} = \sum_{0\leqslant a<b<c<d<e\leqslant 5} N^{abcde} \Gamma_{abcde},$$

$$\Psi_0^{3,3} = sI_8, s \in \mathbb{R} \; ; \quad \Psi_6^{3,3} = p\Gamma_{012345} = pL_{012345}, \; p \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Pour $Cl_{3,3}$ on a :

$$\Gamma_{ind\,4} = iL_{ind\,4}; \; \Gamma_{ind\,5} = -iL_{ind\,5}; \; \Gamma_{ind\,45} = L_{ind\,45}. \tag{2.21}$$

Les termes scalaires et pseudo-scalaires s'écrivent, pour les deux algèbres :

$$\alpha I_8 + \omega L_{012345} = \begin{pmatrix} (\alpha+\omega)I_4 & 0 \\ 0 & (\alpha-\omega)I_4 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

$$\alpha I_8 - \omega L_{012345} = \begin{pmatrix} (\alpha-\omega)I_4 & 0 \\ 0 & (\alpha+\omega)I_4 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

Pour le calcul du terme 1-vecteur

$$N^a L_a = N^4 L_4 + N^5 L_5 + N^\mu L_\mu$$

on pose

$$\beta = N^4\ ;\quad \delta = N^5\ ;\quad \mathbf{a} = N^\mu \gamma_\mu. \tag{2.24}$$

Ceci donne

$$\Psi_1^{1,5} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta I_4 + \delta \mathbf{i} + \mathbf{a} \\ \beta I_4 + \delta \mathbf{i} + \mathbf{a} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

$$\Psi_1^{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & -i\beta I_4 - i\delta \mathbf{i} + \mathbf{a} \\ i\beta I_4 - i\delta \mathbf{i} + \mathbf{a} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

Pour le calcul du terme 2-vecteur

$$N^{ab} L_{ab} = N^{45} L_{45} + N^{\mu 4} L_{\mu 4} + N^{\mu 5} L_{\mu 5} + N^{\mu\nu} L_{\mu\nu}$$

on pose

$$\epsilon = N^{45}\ ;\quad \mathbf{b} = N^{\mu 4}\gamma_\mu\ ;\quad \mathbf{c} = N^{\mu 5}\gamma_\mu\ ;\quad \mathbf{A} = N^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} \tag{2.27}$$

Ceci donne :

$$\Psi_2^{1,5} = \begin{pmatrix} -\epsilon \mathbf{i} + \mathbf{b} - \mathbf{ic} + \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \epsilon \mathbf{i} - \mathbf{b} - \mathbf{ic} + \mathbf{A} \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

$$\Psi_2^{3,3} = \begin{pmatrix} -\epsilon \mathbf{i} + i\mathbf{b} + i\mathbf{ic} + \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \epsilon \mathbf{i} - i\mathbf{b} + i\mathbf{ic} + \mathbf{A} \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Pour le calcul du terme 3-vecteur

$$N^{abc} L_{abc} = N^{\mu 45} L_{\mu 45} + N^{\mu\nu 4} L_{\mu\nu 4} + N^{\mu\nu 5} L_{\mu\nu 5} + N^{\mu\nu\rho} L_{\mu\nu\rho}$$

on pose

$$\mathbf{d} = N^{\mu 45}\gamma_\mu\ ;\quad \mathbf{B} = N^{\mu\nu 4}\gamma_{\mu\nu}\ ;\quad \mathbf{C} = N^{\mu\nu 5}\gamma_{\mu\nu}\ ;\quad \mathbf{ie} = N^{\mu\nu\rho}\gamma_{\mu\nu\rho} \tag{2.30}$$

Ceci donne :

$$\Psi_3^{1,5} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{di} - \mathbf{B} + \mathbf{iC} + \mathbf{ie} \\ \mathbf{id} + \mathbf{B} + \mathbf{iC} + \mathbf{ie} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

$$\Psi_3^{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{di} - i\mathbf{B} - i\mathbf{iC} + \mathbf{ie} \\ \mathbf{id} + i\mathbf{B} - i\mathbf{iC} + \mathbf{ie} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

Pour le calcul du terme 4-vecteur

$$N^{abcd}L_{abcd} = N^{\mu\nu 45}L_{\mu\nu 45} + N^{\mu\nu\rho 4}L_{\mu\nu\rho 4} + N^{\mu\nu\rho 5}L_{\mu\nu\rho 5} + N^{0123}L_{0123}$$

on pose

$$\mathbf{D} = N^{\mu\nu 45}\gamma_{\mu\nu}\ ;\quad \mathbf{if} = N^{\mu\nu\rho 4}\gamma_{\mu\nu\rho}\ ;\quad \mathbf{ig} = N^{\mu\nu\rho 5}\gamma_{\mu\nu\rho}\ ;\quad \zeta = N^{0123} \tag{2.33}$$

Ceci donne :

$$\Psi_4^{1,5} = \begin{pmatrix} -\mathbf{iD} + \mathbf{if} + \mathbf{g} + \zeta\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{iD} - \mathbf{if} + \mathbf{g} + \zeta\mathbf{i} \end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

$$\Psi_4^{3,3} = \begin{pmatrix} -\mathbf{iD} + i\mathbf{if} - i\mathbf{g} + \zeta\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{iD} - i\mathbf{if} - i\mathbf{g} + \zeta\mathbf{i} \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

Pour le calcul du terme 5-vecteur

$$N^{abcde}L_{abcde} = N^{\mu\nu\rho 45}L_{\mu\nu\rho 45} + N^{01234}L_{01234} + N^{01235}L_{01235}$$

on pose

$$\mathbf{ih} = N^{\mu\nu\rho 45}\gamma_{\mu\nu\rho}\ ;\quad \eta = N^{01234}\ ;\quad \theta = N^{01235} \tag{2.36}$$

Ceci donne :

$$\Psi_5^{1,5} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{h} - \eta\mathbf{i} - \theta I_4 \\ -\mathbf{h} + \eta\mathbf{i} - \theta I_4 & \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

$$\Psi_5^{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{h} - i\eta\mathbf{i} + i\theta I_4 \\ -\mathbf{h} + i\eta\mathbf{i} + i\theta I_4 & \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

Nous obtenons alors

$$\Psi^{1,5} = \begin{pmatrix} \Psi_1\Psi_2 \\ \Psi_3\Psi_4 \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= (\alpha + \omega) + (\mathbf{b} + \mathbf{g}) + (\mathbf{A} - \mathbf{iD}) + \mathbf{i}(-\mathbf{c} + \mathbf{f}) + (\zeta - \epsilon)\mathbf{i}, \\
\Psi_2 &= -(\beta + \theta) + (\mathbf{a} + \mathbf{h}) + (-\mathbf{B} + \mathbf{iC}) + \mathbf{i}(-\mathbf{d} + \mathbf{e}) + (\delta - \eta)\mathbf{i}, \\
\Psi_3 &= (\beta - \theta) + (\mathbf{a} - \mathbf{h}) + (\mathbf{B} + \mathbf{iC}) + \mathbf{i}(\mathbf{d} + \mathbf{e}) + (\delta + \eta)\mathbf{i}, \\
\Psi_4 &= (\alpha - \omega) + (-\mathbf{b} + \mathbf{g}) + (\mathbf{A} + \mathbf{iD}) + \mathbf{i}(-\mathbf{c} - \mathbf{f}) + (\zeta + \epsilon)\mathbf{i}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Nous avons alors :

$$\frac{1}{2}(\Psi_1+\Psi_4)=\mathcal{P}_1+\mathcal{I}_1;\ \mathcal{P}_1=\alpha+\mathbf{A}+\zeta\mathbf{i};\ \mathcal{I}_1=\mathbf{g}-\mathbf{ic}, \tag{2.41}$$

$$\frac{1}{2}(\Psi_1-\Psi_4)=\mathcal{P}_4+\mathcal{I}_4;\ \mathcal{P}_4=\omega-\mathbf{iD}-\epsilon\mathbf{i};\ \mathcal{I}_4=\mathbf{b}+\mathbf{if}, \tag{2.42}$$

$$\frac{1}{2}(\Psi_2+\Psi_3)=\mathcal{P}_2+\mathcal{I}_2;\ \mathcal{P}_2=-\theta+\mathbf{iC}+\delta\mathbf{i};\ \mathcal{I}_2=\mathbf{a}+\mathbf{ie}, \tag{2.43}$$

$$\frac{1}{2}(-\Psi_2+\Psi_3)=\mathcal{P}_3-\mathcal{I}_3;\ \mathcal{P}_3=\beta+\mathbf{B}+\eta\mathbf{i};\ \mathcal{I}_3=\mathbf{h}-\mathbf{id}. \tag{2.44}$$

Le terme général de $Cl_{3,3}$ est :

$$\Psi^{3,3}=\begin{pmatrix}\Psi_l+i\Psi_b & \Psi_r+\Psi_g\\ \Psi_r-\Psi_g & \Psi_l-i\Psi_b\end{pmatrix}, \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_l+i\Psi_b&=\alpha+\mathbf{A}+\zeta\mathbf{i}-i(\mathbf{g}-\mathbf{ic})+\omega-\mathbf{iD}-\epsilon\mathbf{i}+i(\mathbf{b}+\mathbf{if}),\\
\Psi_l-i\Psi_b&=\alpha+\mathbf{A}+\zeta\mathbf{i}-i(\mathbf{g}-\mathbf{ic})-[\omega-\mathbf{iD}-\epsilon\mathbf{i}+i(\mathbf{b}+\mathbf{if})],\\
\Psi_r+\Psi_g&=-i(-\theta+\mathbf{iC}+\delta\mathbf{i})+\mathbf{a}+\mathbf{ie}-i(\beta+\mathbf{B}+\eta\mathbf{i})+\mathbf{h}-\mathbf{id},\\
\Psi_r-\Psi_g&=-i(-\theta+\mathbf{iC}+\delta\mathbf{i})+\mathbf{a}+\mathbf{ie}+i(\beta+\mathbf{B}+\eta\mathbf{i})-(\mathbf{h}-\mathbf{id}).
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Ceci nous donne :

$$\Psi_l=\mathcal{P}_1-i\mathcal{I}_1;\ \mathcal{P}_1=\begin{pmatrix}\phi_e & 0\\ 0 & \widehat{\phi}_e\end{pmatrix}=\alpha+\mathbf{A}+\zeta\mathbf{i}, \tag{2.47}$$

$$\mathcal{I}_1=\begin{pmatrix}0 & \phi_n\\ \widehat{\phi}_n & 0\end{pmatrix}=\mathbf{g}-\mathbf{ic}, \tag{2.48}$$

$$\Psi_r=-i\mathcal{P}_2+\mathcal{I}_2;\ \mathcal{P}_2=\begin{pmatrix}\phi_{dr} & 0\\ 0 & \widehat{\phi}_{dr}\end{pmatrix}=-\theta+\mathbf{iC}+\delta\mathbf{i}, \tag{2.49}$$

$$\mathcal{I}_2=\begin{pmatrix}0 & \phi_{ur}\\ \widehat{\phi}_{ur} & 0\end{pmatrix}=\mathbf{a}+\mathbf{ie}, \tag{2.50}$$

$$\Psi_g=-i\mathcal{P}_3+\mathcal{I}_3;\ \mathcal{P}_3=\begin{pmatrix}\phi_{dg} & 0\\ 0 & \widehat{\phi}_{dg}\end{pmatrix}=\beta+\mathbf{B}+\eta\mathbf{i}, \tag{2.51}$$

$$\mathcal{I}_3=\begin{pmatrix}0 & \phi_{ug}\\ \widehat{\phi}_{ug} & 0\end{pmatrix}=\mathbf{h}-\mathbf{id}, \tag{2.52}$$

$$\Psi_b=-i\mathcal{P}_4+\mathcal{I}_4;\ \mathcal{P}_4=\begin{pmatrix}\phi_{db} & 0\\ 0 & \widehat{\phi}_{db}\end{pmatrix}=\omega-\mathbf{iD}-\epsilon\mathbf{i}, \tag{2.53}$$

$$\mathcal{I}_4=\begin{pmatrix}0 & \phi_{ub}\\ \widehat{\phi}_{ub} & 0\end{pmatrix}=\mathbf{b}+\mathbf{if}. \tag{2.54}$$

Dans ces égalités, Ψ_l est à part tandis que Ψ_r, Ψ_g et Ψ_b ont exactement la même structure : **ceci est l'origine de la différence entre onde leptonique et onde des quarks**.

Dans $Cl_{1,3}$ le renversé de $A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ est $\widetilde{A} = A_0 + A_1 - A_2 - A_3 + A_4$, nous devons changer de signe les bivecteurs **A**, **B**, **iC**, **iD**, et les trivecteurs **ic**, **id**, **ie**, **if** et nous obtenons donc

$$\widetilde{\Psi}_l = \widetilde{\mathcal{P}}_1 - i\widetilde{\mathcal{I}}_1;\ \widetilde{\mathcal{P}}_1 = \begin{pmatrix} \overline{\phi}_e & 0 \\ 0 & \phi_e^\dagger \end{pmatrix} = \alpha - \mathbf{A} + \zeta\mathbf{i}, \tag{2.55}$$

$$\widetilde{\mathcal{I}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \phi_n^\dagger \\ \overline{\phi}_n & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{g} + \mathbf{ic}, \tag{2.56}$$

$$\widetilde{\Psi}_r = -i\widetilde{\mathcal{P}}_2 + \widetilde{\mathcal{I}}_2;\ \widetilde{\mathcal{P}}_2 = \begin{pmatrix} \overline{\phi}_{dr} & 0 \\ 0 & \phi_{dr}^\dagger \end{pmatrix} = -\theta - \mathbf{iC} + \delta\mathbf{i}, \tag{2.57}$$

$$\widetilde{\mathcal{I}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \phi_{ur} \\ \overline{\phi}_{ur} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{a} - \mathbf{ie}, \tag{2.58}$$

$$\widetilde{\Psi}_g = -i\widetilde{\mathcal{P}}_3 + \widetilde{\mathcal{I}}_3;\ \widetilde{\mathcal{P}}_3 = \begin{pmatrix} \overline{\phi}_{dg} & 0 \\ 0 & \phi_{dg}^\dagger \end{pmatrix} = \beta - \mathbf{B} + \eta\mathbf{i}, \tag{2.59}$$

$$\widetilde{\mathcal{I}}_3 = \begin{pmatrix} 0 & \phi_{ug} \\ \overline{\phi}_{ug} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{h} + \mathbf{id}, \tag{2.60}$$

$$\widetilde{\Psi}_b = -i\widetilde{\mathcal{P}}_4 + \widetilde{\mathcal{I}}_4;\ \widetilde{\mathcal{P}}_4 = \begin{pmatrix} \overline{\phi}_{db} & 0 \\ 0 & \phi_{db}^\dagger \end{pmatrix} = \omega + \mathbf{iD} - \epsilon\mathbf{i}, \tag{2.61}$$

$$\widetilde{\mathcal{I}}_4 = \begin{pmatrix} 0 & \phi_{ub} \\ \overline{\phi}_{ub} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b} - \mathbf{if}. \tag{2.62}$$

Maintenant le renversé dans $Cl_{3,3}$ de

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$$

est

$$\widetilde{A} = A_0 + A_1 - A_2 - A_3 + A_4 + A_5 - A_6$$

Les seuls termes qui changent de signe sont les scalaires ϵ et ω, les vecteurs **b**, **c**, **d**, **e** et les bivecteurs **A**, **B**, **C**. Ces changements de signe ne sont pas les mêmes dans $Cl_{3,3}$ que dans $Cl_{1,3}$. Les différences sont compensées par le fait que la réversion dans $Cl_{3,3}$ échange aussi les places des termes Ψ_l et Ψ_b. Il en résulte que les $\mathcal{P}_n$ sont transformés en $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ et les $\mathcal{I}_n$ sont transformés en $\widetilde{\mathcal{I}}_n$ pour $n = 1, 2, 3$. Par contre $\mathcal{P}_4$ est transformé en $-\widetilde{\mathcal{P}}_4$ et $\mathcal{I}_4$ est transformé en $-\widetilde{\mathcal{I}}_4$ Nous obtenons alors

$$\widetilde{\Psi}^{3,3} = \begin{pmatrix} \widetilde{\Psi}_l - i\widetilde{\Psi}_b & \widetilde{\Psi}_r + \widetilde{\Psi}_g \\ \widetilde{\Psi}_r - \widetilde{\Psi}_g & \widetilde{\Psi}_l + i\widetilde{\Psi}_b \end{pmatrix}. \tag{2.63}$$

avec :

$$\Psi_l = \begin{pmatrix} \phi_e & -i\phi_n \\ -i\widehat{\phi}_n & \widehat{\phi}_e \end{pmatrix};\ \widetilde{\Psi}_l = \begin{pmatrix} \overline{\phi}_e & -i\phi_n^\dagger \\ -i\overline{\phi}_n & \phi_e^\dagger \end{pmatrix}, \tag{2.64}$$

$$\Psi_c = \begin{pmatrix} -i\phi_{dc} & \phi_{uc} \\ \widehat{\phi}_{uc} & -i\widehat{\phi}_{dc} \end{pmatrix};\ \widetilde{\Psi}_c = \begin{pmatrix} -i\overline{\phi}_{dc} & \phi_{uc}^\dagger \\ \overline{\phi}_{uc} & -i\phi_{dc}^\dagger \end{pmatrix},\ c = r, g, b. \tag{2.65}$$

La théorie quantique des champs considère les valeurs de l'onde quantique comme des opérateurs de création et d'annihilation, l'onde d'un électron étant l'opérateur de création de l'électron. Or l'onde quantique est, dès la prise en compte de la relativité, élément de $end(Cl_3)$, donc d'un anneau d'endomorphismes. Cet anneau qui est $Cl_{3,3} = M_8(\mathbb{R})$, est suffisant pour obtenir une onde quantique contenant les huit ondes droites et les huit ondes gauches rendant compte de tous les composants de la première génération. En plus et en prime on obtient la séparation entre l'onde leptonique Ψ_l et les trois ondes similaires des quarks Ψ_r, Ψ_g et Ψ_b, que le modèle standard a décrits en termes de couleurs red, blue, green. Cette séparation est l'origine du fait que le groupe de jauge du modèle standard, $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ ne contient qu'un $SU(3)$ agissant seulement sur l'indice de couleur, et ne peut pas contenir un $SU(4)$ qui permettrait de transformer un quark en lepton. Ceci a deux conséquences, d'une part l'onde leptonique, dont l'onde du monopôle magnétique, ne voit pas les interactions fortes, d'autre part la grande unification, incluant $SU(3)$ dans un groupe simple plus vaste, ne marche pas (le nombre baryonique se conserve).

Comme nous étudions ici principalement le monopôle magnétique, nous pouvons nous restreindre maintenant à l'étude de Ψ_l et à l'invariance de jauge des interactions faibles, c'est-à-dire à l'invariance sous $U(1) \times SU(2)$.

3 Invariance de jauge électro-faible avec terme de masse

Nous suivons ici ce qui a été exposé au chapitre 3 de Modèle standard et gravitation. Nous posons :

$$\phi_e = \phi^1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \xi_1^1 & -\bar{\eta}_2^1 \\ \xi_2^1 & \bar{\eta}_1^1 \end{pmatrix};\ \xi^1 = \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \end{pmatrix};\ \eta^1 = \begin{pmatrix} \eta_1^1 \\ \eta_2^1 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$\phi_{mm} = -i\phi_n = \widetilde{\phi}^8 = \sqrt{2}\begin{pmatrix}\xi_1^8 & -\overline{\eta}_2^8 \\ \xi_2^8 & \overline{\eta}_1^8\end{pmatrix};\ \xi^8 = \begin{pmatrix}\xi_1^8 \\ \xi_2^8\end{pmatrix};\ \eta^8 = \begin{pmatrix}\eta_1^8 \\ \eta_2^8\end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$\phi^1 = R^1 + L^1;\ R^1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix}\xi_1^1 & 0 \\ \xi_1^2 & 0\end{pmatrix};\ \widehat{L}^1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix}\eta_1^1 & 0 \\ \eta_2^1 & 0\end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\widetilde{\phi}^8 = \widetilde{R}^8 + \widetilde{L}^8;\ \widetilde{R}^8 = \sqrt{2}\begin{pmatrix}\xi_1^8 & 0 \\ \xi_2^8 & 0\end{pmatrix};\ \overline{L}^8 = \sqrt{2}\begin{pmatrix}\eta_1^8 & 0 \\ \eta_2^8 & 0\end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Les quatre équations aux dérivées partielles ont une allure similaire :

$$i\nabla\eta^1 = \mathrm{p}_1\eta^1, \tag{3.5}$$

$$i\widehat{\nabla}\xi^1 = \widehat{\mathrm{p}}_2\xi^1, \tag{3.6}$$

$$i\widetilde{\nabla}\eta^8 = \mathrm{p}_3\eta^8, \tag{3.7}$$

$$i\overline{\nabla}\xi^8 = \widehat{\mathrm{p}}_4\xi^8. \tag{3.8}$$

Avec

$$\mathrm{p}_1 = -\mathrm{p}_2 = q\mathrm{A} + m\mathrm{v}, \tag{3.9}$$

les équations (3.5) et (3.6) sont les deux parties de l'équation d'onde de l'électron :

$$\nabla\widehat{\phi}^1\sigma_{12} = (q\mathrm{A} + m\mathrm{v})\widehat{\phi}^1, \tag{3.10}$$

$$\overline{\phi}^1\nabla\widehat{\phi}^1\sigma_{12} = \overline{\phi}^1 q\mathrm{A}\widehat{\phi}^1 + m\rho. \tag{3.11}$$

où le vecteur v est le vecteur J/ρ généralisant celui de l'électron seul :

$$\mathrm{J} = \phi_e\phi_e^\dagger + \phi_{mm}\phi_{mm}^\dagger;\ \mathrm{v} = \frac{\mathrm{J}}{\rho}, \tag{3.12}$$

$$\mathrm{J}^0 = |\xi_1^1|^2 + |\xi_2^1|^2 + |\xi_1^8|^2 + |\xi_2^8|^2 + |\eta_1^1|^2 + |\eta_2^1|^2 + |\eta_1^8|^2 + |\eta_2^8|^2, \tag{3.13}$$

$$\rho^2 = \mathrm{J}\cdot\mathrm{J} = \mathrm{J}\widehat{\mathrm{J}} = (\mathrm{J}^0)^2 - (\mathrm{J}^1)^2 - (\mathrm{J}^2)^2 - (\mathrm{J}^3)^2, \tag{3.14}$$

$$1 = \mathrm{v}\cdot\mathrm{v} = \mathrm{v}\widehat{\mathrm{v}} = (\mathrm{v}^0)^2 - (\mathrm{v}^1)^2 - (\mathrm{v}^2)^2 - (\mathrm{v}^3)^2 \tag{3.15}$$

J est le courant conservatif densité de probabilité. v est la vitesse d'univers de ce courant. Comme le calcul s'effectue dans une algèbre unitaire il en résulte que v est inversible et que $\widehat{\mathrm{v}} = \mathrm{v}^{-1}$. Le courant de probabilité dépend de toutes les composantes de l'onde leptonique, ce qui en couple les différentes parties : les équations (3.5) à (3.8) ne sont pas indépendantes.

La transformation $M \mapsto \widehat{M}$ étant un automorphisme involutif dans Cl_3 on peut considérer l'onde leptonique comme un couple $\Psi = (\phi^1\ \ \phi^8)$, ces couples engendrant l'algèbre $Cl_{1,3}$, qui est un module à gauche (ou à droite) sur Cl_3. Pour obtenir le groupe de jauge électro-faible il suffit de considérer :

$$P_{\pm}(\Psi) = \frac{1}{2}(\Psi \pm \mathbf{i}\Psi\gamma_{21}) \; ; \; \mathbf{i} = \gamma_{0123}, \tag{3.16}$$

$$P_0(\Psi) = \Psi\gamma_{21} + (1-p)P_-(\Psi)\mathbf{i} + p\mathbf{i}P_-(\Psi), \tag{3.17}$$

$$P_1(\Psi) = \frac{1}{2}(\mathbf{i}\Psi\gamma_0 + \Psi\gamma_{012}) = P_+(\Psi)\gamma_3\mathbf{i}, \tag{3.18}$$

$$P_2(\Psi) = \frac{1}{2}(\Psi\gamma_3 - \mathbf{i}\Psi\gamma_{123}) = P_+(\Psi)\gamma_3, \tag{3.19}$$

$$P_3(\Psi) = \frac{1}{2}(-\Psi\mathbf{i} + \mathbf{i}\Psi\gamma_{30}) = P_+(\Psi)(-\mathbf{i}). \tag{3.20}$$

Nous avons introduit ici un nombre p qui est lié à la charge du monopôle magnétique, et qui est nul pour le neutrino sans onde droite. Le modèle de Weinberg-Salam remplace les dérivées partielles ∂_μ par les dérivées covariantes :

$$\mathrm{D}_\mu = \partial_\mu - ig_1\frac{Y}{2}B_\mu - ig_2T_jW_\mu^j \tag{3.21}$$

avec $T_j = \tau_j/2$ pour un doublet de particules gauches et $T_j = 0$ pour un singulet de particule droite. Y est l'hypercharge faible, $Y_L = -1$, $Y_R = -2$ pour l'électron. On pose :

$$\mathrm{D} = \sigma^\mu \mathrm{D}_\mu;\; \mathbf{D} = \gamma^\mu \mathrm{D}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{D} \\ \widehat{\mathrm{D}} & 0 \end{pmatrix};\; B = \sigma^\mu B_\mu;\; \mathbf{B} = \gamma^\mu B_\mu = \begin{pmatrix} 0 & B \\ \widehat{B} & 0 \end{pmatrix},$$

$$W^j = \sigma^\mu W_\mu^j;\; \mathbf{W}^j = \gamma^\mu W_\mu^j = \begin{pmatrix} 0 & W^j \\ \widehat{W^j} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

On remplace maintenant (3.21) par :

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\partial} + \frac{g_1}{2}\mathbf{B}P_0 + \frac{g_2}{2}(\mathbf{W}^1P_1 + \mathbf{W}^2P_2 + \mathbf{W}^3P_3). \tag{3.23}$$

En notant avec un indice surligné l'onde de l'anti-particule. On obtient :

$$\begin{aligned}
D\overline{\phi}^{\overline{8}} &= \nabla\overline{\phi}^{\overline{8}} + i\frac{g_1}{2}B(-2p\overline{L}^{\overline{8}} + \overline{R}^{\overline{8}}) + i\frac{g_2}{2}[(W^1 - iW^2)\widehat{R}^{\overline{1}} - W^3\overline{R}^{\overline{8}}] \\
D\widehat{\phi}^{\overline{1}} &= \nabla\widehat{\phi}^{\overline{1}} + i\frac{g_1}{2}B(-2\widehat{L}^{\overline{1}} + \widehat{R}^{\overline{1}}) + i\frac{g_2}{2}[(W^1 + iW^2)\overline{R}^{\overline{8}} + W^3\widehat{R}^{\overline{1}}] \\
\widehat{D}\phi^1 &= \widehat{\nabla}\phi^1 + i\frac{g_1}{2}\widehat{B}(2R^1 - L^1) + i\frac{g_2}{2}[(\widehat{W}^1 - i\widehat{W}^2)\widetilde{L}^8 - \widehat{W}^3L^1] \qquad (3.24) \\
\widehat{D}\widetilde{\phi}^8 &= \widehat{\nabla}\widetilde{\phi}^8 + i\frac{g_1}{2}\widehat{B}(2p\widetilde{R}^8 - \widetilde{L}^8) + i\frac{g_2}{2}[(\widehat{W}^1 + i\widehat{W}^2)L^1 + \widehat{W}^3\widetilde{L}^8].
\end{aligned}$$

En utilisant l'automorphisme principal $M \mapsto \widehat{M}$ et en séparant les parties droites et gauches on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{D}R^1 &= \widehat{\nabla}R^1 + ig_1\widehat{B}R^1,\\
D\widehat{L}^1 &= \nabla\widehat{L}^1 + i\frac{g_1}{2}B\widehat{L}^1 - \frac{ig_2}{2}[(W^1+iW^2)\overline{L}^8 - W^3\widehat{L}^1]\\
D\overline{L}^8 &= \nabla\overline{L}^8 + \frac{ig_1}{2}B\overline{L}^8 - \frac{ig_2}{2}[(W^1-iW^2)\widehat{L}^1 + W^3\overline{L}^8]\\
\widehat{D}\widetilde{R}^8 &= \widehat{\nabla}\widetilde{R}^8 + ipg_1\widehat{B}\widetilde{R}^8.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

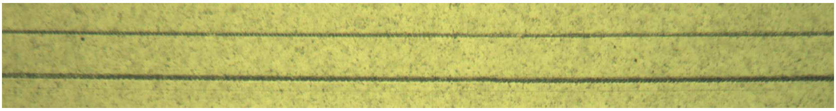
Pour les ondes du positron et de l'anti-monopôle, avec la conjugaison de charge usuelle en mécanique quantique, on obtient de même :

$$\begin{aligned}
D\widehat{L}^{\overline{1}} &= \nabla\widehat{L}^{\overline{1}} - ig_1B\widehat{L}^{\overline{1}},\\
\widehat{D}R^{\overline{1}} &= \widehat{\nabla}R^{\overline{1}} - \frac{ig_1}{2}\widehat{B}R^{\overline{1}} - \frac{ig_2}{2}[(\widehat{W}^1 - i\widehat{W}^2)\widetilde{R}^{\overline{8}} + \widehat{W}^3R^{\overline{1}}].\\
\widehat{D}\widetilde{R}^{\overline{8}} &= \widehat{\nabla}\widetilde{R}^{\overline{8}} - i\frac{g_1}{2}\widehat{B}\widetilde{R}^{\overline{8}} - i\frac{g_2}{2}[(\widehat{W}^1 + i\widehat{W}^2)R^{\overline{1}} - \widehat{W}^3\widetilde{R}^{\overline{8}}]\\
D\overline{L}^{\overline{8}} &= \nabla\overline{L}^{\overline{8}} - ig_1pB\overline{L}^{\overline{8}}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

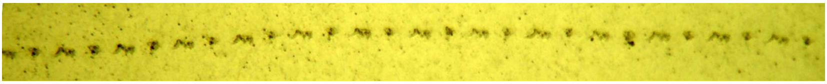
Le grand avantage de l'équation d'onde améliorée de l'électron est que le terme de masse, transposition de celui du monopôle dans le cas où l'équation d'onde est proche de l'équation de Dirac, se généralise à :

$$\begin{aligned}
0 &= -iD\widehat{L}^1 + m\mathrm{v}\widehat{L}^1\\
0 &= -i\widehat{D}R^1 + m\widehat{\mathrm{v}}R^1,\\
0 &= -i\widetilde{D}\overline{L}^8 + m_1\mathrm{v}\overline{L}^8,\\
0 &= -i\overline{D}\widetilde{R}^8 + m_2\widehat{\mathrm{v}}\widetilde{R}^8.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Il importe de remarquer ici que, contrairement au cas de l'électron, le monopôle magnétique peut comporter deux masses différentes pour la partie droite et la partie gauche de l'onde. On peut alors faire l'hypothèse que c'est la raison de la différence d'intensité entre ce qui semble être deux parties d'une même trace [30][37][38] :



Les deux parties d'une onde de monopôle ont, avec (3.27), la même vitesse locale, ceci justifierait le parallélisme des deux parties d'une même trace. Ceci justifierait ensuite le fait que les deux parties, gauche et droite d'une même trace, puissent présenter une même longueur d'onde :



Les équations d'onde (3.27) sont invariantes de jauge sous le groupe $U(1) \times SU(2)$ engendré par les P_0, P_1, P_2, P_3 de (3.17) à (3.20). Ceci permet de simplifier la partie de jauge des équations d'onde (3.5) à (3.8) :

$$\mathrm{a}^1 = \mathrm{b} + 3\mathrm{w}^3;\ \mathrm{p}_1 = \mathrm{a}^1 + m\mathrm{v} = \mathrm{b} + 3\mathrm{w}^3 + m\mathrm{v};\ \mathrm{b} = \frac{g_1}{2}B, \tag{3.28}$$

$$0 = -i\nabla\eta^1 + \mathrm{p}_1\eta^1, \tag{3.29}$$

$$\mathrm{a}^2 = 2\mathrm{b};\ \mathrm{p}_2 = \mathrm{a}^2 + m\mathrm{v} = 2\mathrm{b} + m\mathrm{v};\ 0 = -i\widehat{\nabla}\xi^1 + \widehat{\mathrm{p}}_2\xi^1, \tag{3.30}$$

$$\mathrm{a}^3 = \mathrm{b} - 3\mathrm{w}^3;\ \mathrm{p}_3 = \mathrm{a}^3 + m_1\mathrm{v} = \mathrm{b} - 3\mathrm{w}^3 + m_1\mathrm{v};\ \mathrm{w}^3 = \frac{g_2}{2}W^3, \tag{3.31}$$

$$0 = -i\nabla\eta^8 + \mathrm{p}_3\eta^8, \tag{3.32}$$

$$\mathrm{a}^4 = 2p\mathrm{b};\ \mathrm{p}_4 = \mathrm{a}^4 + m_2\mathrm{v} = 2p\mathrm{b} + m_2\mathrm{v};\ 0 = -i\widehat{\nabla}\xi^8 + \widehat{\mathrm{p}}_4\xi^8. \tag{3.33}$$

Ces équations découlent d'une densité lagrangienne, comme en théorie de Dirac, et cette densité lagrangienne est elle-même conséquence des équations d'onde (voir [35] 3.3.3) :

$$0 = \mathcal{L}^1 = -i\eta^{1\dagger}\nabla\eta^1 + \eta^{1\dagger}\mathrm{p}_1\eta^1, \tag{3.34}$$

$$0 = \mathcal{L}^2 = -i\xi^{1\dagger}\widehat{\nabla}\xi^1 + \xi^{1\dagger}\widehat{\mathrm{p}}_2\xi^1, \tag{3.35}$$

$$0 = \mathcal{L}^3 = -i\eta^{8\dagger}\nabla\eta^8 + \eta^{8\dagger}\mathrm{p}_3\eta^8, \tag{3.36}$$

$$0 = \mathcal{L}^4 = -i\xi^{8\dagger}\widehat{\nabla}\xi^8 + \xi^{8\dagger}\widehat{\mathrm{p}}_4\xi^8, \tag{3.37}$$

$$0 = \mathcal{L} = \mathcal{L}^1 + \mathcal{L}^2 + \frac{m}{m_1}\mathcal{L}^3 + \frac{m}{m_2}\mathcal{L}^4. \tag{3.38}$$

On a étudié en 3.3.4 de [35] comment les équations de Lagrange fonctionnent de manière purement algébrique, sans aucune condition sur l'onde. On y a ensuite expliqué pourquoi l'angle de Weinberg-Salam vaut exactement 30°. Comme les parties droites et gauches des ondes sont nettement séparées dans l'écriture précédente de la densité lagrangienne, il apparait non pas un mais deux tenseurs d'impulsion-énergie, le tenseur de Tétrode T qui vient de la somme des $\mathcal{L}^n$ et le tenseur ininterprété V de O. Costa de Beauregard [39], qui est la différence entre sommes des tenseurs droits et gauches (voir [35] 3.4) :

$$T^\mu_\lambda = \Re\big[i[\eta^{1\dagger}\sigma^\mu d_\lambda \eta^1 + \xi^{1\dagger}\widehat{\sigma}^\mu d_\lambda \xi^1 + k_1\eta^{8\dagger}\sigma^\mu d_\lambda \eta^8 + k_2\xi^{8\dagger}\widehat{\sigma}^\mu d_\lambda \xi^8]\big], \tag{3.39}$$

$$V^\mu_\lambda = \Re\big[-i[\eta^{1\dagger}\sigma^\mu d_\lambda \eta^1 - \xi^{1\dagger}\widehat{\sigma}^\mu d_\lambda \xi^1 + k_1\eta^{8\dagger}\sigma^\mu d_\lambda \eta^8 - k_2\xi^{8\dagger}\widehat{\sigma}^\mu d_\lambda \xi^8]\big]. \tag{3.40}$$

avec $k_1 = m/m_1$, $k_2 = m/m_2$ et où les opérateurs d_λ sont définis par :

$$d_\lambda \eta^1 = [\partial_\lambda + iq(B'_\lambda + W_\lambda)]\eta^1, B' = \frac{B}{\sqrt{3}}, \tag{3.41}$$

$$d_\lambda \xi^1 = (\partial_\lambda + 2iqB'_\lambda)\xi^1, \tag{3.42}$$

$$d_\lambda \eta^8 = [\partial_\lambda + iq(B'_\lambda - W_\lambda)]\eta^8, \tag{3.43}$$

$$d_\lambda \xi^8 = (\partial_\lambda + 2ipqB'_\lambda)\xi^8. \tag{3.44}$$

Le tenseur d'impulsion-énergie T est donc la somme de quatre tenseurs, un pour chacun des spineurs de l'onde leptonique :

$$T = T^1_L + T^1_R + k_1 T^8_R + k_2 T^8_L, \tag{3.45}$$

$$T^{1\,\mu}_{L\,\lambda} = \Re(i\eta^{1\dagger}\sigma^\mu d_\lambda \eta^1). \tag{3.46}$$

On obtient les trois autres parties simplement en remplaçant η^1 par ξ^1, η^8 et ξ^8, et en remplaçant les σ^μ par des $\widehat{\sigma}^\mu$ quand on remplace η par ξ. Le champ électromagnétique complet F, avec monopôles magnétiques, est la somme du champ de type électrique qu'on va noter F^e et du champ de type magnétique qu'on va noter F^m. Ils vérifient :

$$\partial_\mu \mathrm{A}^\mu = 0;\ \partial_\mu Z^{0\mu} = 0, \tag{3.47}$$

$$F = F^e + F^m;\ F^e = \nabla\widehat{\mathrm{A}} = \vec{E} + i\vec{H};\ \vec{E} = -\partial_0\vec{\mathrm{A}} - \vec{\partial}\mathrm{A}_0;\ \vec{H} = \vec{\partial}\times\vec{\mathrm{A}}$$

$$F^m = \nabla\widehat{iZ^0} = \vec{E}^m + i\vec{H}^m;\ \vec{E}^m = \vec{\partial}\times\vec{Z}^0;\ \vec{H}^m = \partial_0\vec{Z}^0 + \vec{\partial}Z^0_0. \tag{3.48}$$

Nous notons F^B le champ créé par le potentiel B' et F^W celui créé par les W^n. Avec la rotation de 30° effectuée par l'angle de Weinberg-Salam nous avons :

$$F^B = \nabla\widehat{B}' = \frac{1}{2}\nabla\widehat{\mathrm{A}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\nabla\widehat{Z}^0 = \frac{1}{2}F^e - \frac{i}{2\sqrt{3}}F^m,$$

$$F^W = \nabla\widehat{W} = \frac{1}{2}\nabla\widehat{\mathrm{A}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\nabla\widehat{Z}^0 = \frac{1}{2}F^e + i\frac{\sqrt{3}}{2}F^m. \tag{3.49}$$

La dynamique de l'onde leptonique s'obtient en ajoutant les contributions venant des ondes droites et des ondes gauches : Ceci nous donne :

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^\mu =& - qF^e_{\mu\lambda}(\mathrm{D}^{1\mu}_L + \mathrm{D}^{1\mu}_R)\sigma^\lambda - \frac{mpq}{m_2}F^e_{\mu\lambda}\mathrm{D}^{8\mu}_R\sigma^\lambda \\ & - \frac{iq}{\sqrt{3}}F^m_{\mu\lambda}(\mathrm{D}^{1\mu}_L - \mathrm{D}^{1\mu}_R - \frac{2m}{m_1}\mathrm{D}^{8\mu}_L - \frac{pm}{m_2}\mathrm{D}^{8\mu}_R)\sigma^\lambda. \qquad (3.50)\end{aligned}$$

Remarquons que le terme $\mathrm{D}^{8\mu}_L$ manque sur la première ligne, ce qui correspond au fait que le neutrino gauche ne voit pas l'interaction électrique, il est neutre. Lorsque l'électron est seul et qu'il n'y a pas d'interactions faibles, il reste :

$$0 = \partial_\mu T^\mu + qF^e_{\mu\lambda}(\mathrm{D}^{1\mu}_L + \mathrm{D}^{1\mu}_R)\sigma^\lambda, \qquad (3.51)$$

ce qui donne, avec $e = -|e|$ et $q = e/\hbar c$, la relation de Lorentz pour une densité de charge-courant électrique $\mathrm{j} = e\mathrm{J}$ sous sa forme relativiste :

$$0 = \hbar c\partial_\mu T^\mu + F^e_{\mu\nu}\mathrm{j}^\mu\sigma^\nu. \qquad (3.52)$$

où F^e est le tenseur électromagnétique de la physique relativiste non quantique. Avec :

$$F = \nabla\widehat{\mathrm{A}} = \vec{E} + i\vec{H};\ \mathrm{j} = e\mathrm{J} = \rho_e + \vec{\mathrm{j}};\ \mathrm{f} = \mathrm{f}_0 + \vec{\mathrm{f}}, \qquad (3.53)$$

où $\vec{E}$ est le champ électrique, $\vec{H}$ le champ magnétique, ρ_e la densité de charge, $\vec{\mathrm{j}}$ la densité de courant et $\vec{\mathrm{f}}$ la densité de force, (3.52) est équivalent à :

$$\vec{\mathrm{f}} = \rho_e\vec{E} + \vec{\mathrm{j}}\times\vec{H};\ \mathrm{f}_0 = \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{j}}. \qquad (3.54)$$

On obtient bien la force de Lorentz (3.54) agissant sur la densité de courant $\mathrm{j} = e(\mathrm{D}^1_R + \mathrm{D}^1_L)$ de l'électron.

4 Quantification du moment cinétique

La composante T^0_0 du tenseur d'impulsion-énergie vérifie :

$$T^0_0 = \Re[i(\eta^{1\dagger}d_0\eta^1 + \xi^{1\dagger}d_0\xi^1 + \frac{m}{m_1}\eta^{8\dagger}d_0\eta^8 + \frac{m}{m_2}\xi^{8\dagger}d_0\xi^8)]. \qquad (4.1)$$

Pour une solution de l'équation d'onde d'énergie globale E on a :

$$-id_0\xi^1 = \frac{E}{\hbar c}\xi^1(\vec{x});\ -id_0\xi^8 = \frac{E}{\hbar c}\xi^8(\vec{x}), \qquad (4.2)$$

$$-id_0\eta^1 = \frac{E}{\hbar c}\eta^1(\vec{x});\ -id_0\eta^8 = \frac{E}{\hbar c}\eta^8(\vec{x}). \qquad (4.3)$$

On a donc (voir [35] 3.4.2) :

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -\frac{E}{\hbar c}(\eta^{1\dagger}\eta^1 + \xi^{1\dagger}\xi^1 + \frac{m}{m_1}\eta^{8\dagger}\eta^8 + \frac{m}{m_2}\xi^{8\dagger}\xi^8) \\ &= -\frac{E}{\hbar c}(\mathrm{D}_L^1 + \mathrm{D}_R^1 + \frac{m}{m_1}\mathrm{D}_L^8 + \frac{m}{m_2}\mathrm{D}_R^8)^0 = -\frac{E}{\hbar c}\underline{\mathbf{J}}^0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

en appelant $\underline{\mathbf{J}}$ le courant pondéré par les poids relatifs 1, 1, $\frac{m}{m_1}$, $\frac{m}{m_2}$. C'est ce courant pondéré qui remplace le courant de probabilité de l'électron seul. La raison de l'existence en physique quantique d'un courant de probabilité reste la même : l'égalité entre masse d'inertie et masse gravitationnelle impose (voir [35] 3.5) :

$$0 = E + \iiint dv T_0^0 \ ; \quad \iiint dv \frac{\underline{\mathbf{J}}^0}{\hbar c} = 1. \tag{4.5}$$

Le théorème de Noether fait découler la conservation du moment cinétique de l'invariance de la densité lagrangienne sous les rotations d'espace-temps. Nous avons élargi ce groupe d'invariance au groupe plus vaste $GL(2,\mathbb{C}) = Cl_3^*$. Pour la densité lagrangienne réelle $\mathcal{L}^-$ et le tenseur d'impulsion-énergie correspondant V on a :

$$\begin{aligned} &V_\lambda^\mu = \\ &\Re\big[-i[\eta^{1\dagger}\sigma^\mu d_\lambda\eta^1 - \xi^{1\dagger}\widehat{\sigma}^\mu d_\lambda\xi^1 + \frac{m}{m_1}\eta^{8\dagger}\sigma^\mu d_\lambda\eta^8 - \frac{m}{m_2}\xi^{8\dagger}\widehat{\sigma}^\mu d_\lambda\xi^8]\big]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

A l'invariance chirale du tenseur V, groupe $U(1)$ de potentiel B, est associé un courant conservatif j_7 qui vaut :

$$j_7 = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_L^1 + \mathrm{D}_R^1 + \frac{m}{m_1}\mathrm{D}_L^8 + \frac{m}{m_2}\mathrm{D}_R^8). \tag{4.7}$$

Donc le moment cinétique propre vérifie avec (4.5) :

$$j_7 = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_L^1 + \mathrm{D}_R^1 + \frac{m}{m_1}\mathrm{D}_L^8 + \frac{m}{m_2}\mathrm{D}_R^8) = \frac{1}{2}\underline{\mathrm{J}}_l, \tag{4.8}$$

$$\iiint dv \frac{1}{c} j_7^0 = \frac{1}{2c}\iiint dv \underline{\mathrm{J}}_l^0 = \frac{\hbar}{2}. \tag{4.9}$$

Le même type de calcul peut être effectué pour la partie quark de l'onde. On y obtient un résultat similaire : la quantification du moment cinétique avec la valeur attendue $\hbar/2$ intervient pour toute l'onde, avec ses six parties, trois gauches et trois droites. Si l'électron voyage seul, il possède à lui seul ce moment cinétique élémentaire $\hbar/2$. Si le monopôle magnétique se promène seul, il possède aussi ce moment cinétique $\hbar/2$. Si un monopôle magnétique interagit avec un électron, c'est l'onde entière, électron + monopôle qui est doté du moment cinétique quantifié. Ceci semble vérifié expérimentalement parce que si électron et neutrino avaient chacun un moment cinétique $\hbar/2$ on devrait avoir pour le couple électron - neutrino un spin entier, ce qui n'est jamais le cas. La même chose se produit pour les trois quarks d'un proton, ou d'un neutron : il n'y a pas de moment cinétique quantifié pour chacun des quarks, seulement pour le proton entier, ou pour le neutron entier. Le résultat en est le confinement des quarks dans les protons et neutrons. Le monopôle magnétique n'étant pas sensible à la couleur on n'a pas cet aspect de confinement. Mais il n'empêche que c'est l'onde leptonique entière qui est dotée du moment cinétique quantifié.

5 Interaction magnétique du monopôle

Le modèle standard utilise, pour supprimer les anomalies liées à la chiralité, le fait que la somme des charges électriques des différentes ondes est nulle. Comme ces charges proviennent des charges faibles, on obtiendra cette suppression des anomalies en supposant, comme on le fait dans le modèle standard, que la somme des coefficients du potentiel de jauge b est nulle :

$$\begin{aligned}&0=\frac{3}{2}+\frac{-5}{2}+\frac{1}{2}-\frac{4p-1}{2}+3(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{-5}{6}+\frac{-5}{6})=-2p-4\\&p=-2.\end{aligned}\tag{5.1}$$

On notera que (5.1) conduirait, en l'absence des quarks, à une somme nulle seulement si p = 0, c'est-à-dire seulement en cas d'absence du monopôle. Donc le monopôle n'existe que parce que les quarks eux-mêmes existent. On a alors :

$$j_m=g\mathrm{D}_R^8;\ Q=\frac{g}{\hbar c}=\frac{2mq}{m_2};\ g=\frac{2m}{m_2}e,\tag{5.2}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{eg}{\hbar c}=\frac{2m}{m_2}\alpha,\tag{5.3}$$

où α est la constante de structure fine. Ceci nous donne pour la masse m_2 du monopôle droit :

$$m_2=4\alpha m.\tag{5.4}$$

Cette relation doit aussi concerner les deux monopôles faisant partie de la seconde et de la troisième génération. On peut aussi noter que cette relation ne contraint pas la masse du neutrino gauche, m_1, qui peut donc être très petite. On obtient ensuite pour le courant magnétique :

$$k_m = -\frac{g}{\sqrt{3}}\mathrm{D}_R^8 + 2\frac{em}{\sqrt{3}m_1}\mathrm{D}_L^8 = \frac{2em}{\sqrt{3}}(\frac{\mathrm{D}_L^8}{m_1} - \frac{\mathrm{D}_R^8}{m_2}). \tag{5.5}$$

Si m_1 est beaucoup plus petit que m_2, la force s'exerçant sur le monopôle magnétique est due principalement au courant gauche, c'est-à-dire au courant du neutrino. Cela pourrait expliquer pourquoi on voit difficilement la partie droite de l'onde du neutrino-monopôle. Avec $p = -2$, l'équation d'onde du monopôle magnétique devient (voir [40] 2.3.7) :

$$0 = \nabla\overline{\phi}^8 - qA\overline{\phi}^8(\sigma_{12} - i) - q\frac{2}{\sqrt{3}}iZ^0\overline{\phi}^8 + \mathrm{v}\overline{\phi}^8(\frac{m_1 + m_2}{2}\sigma_{12} + \frac{m_1 - m_2}{2}i). \tag{5.6}$$

Et dans le cas de l'onde leptonique complète on obtient (5.5). On pose :

$$\mathrm{j}_m = g\mathrm{D}_R^8;\ Q = \frac{g}{\hbar c} = -\frac{mpq}{m_2} = \frac{2me}{m_2\hbar c}, \tag{5.7}$$

$$\mathrm{k}_e = \frac{e}{\sqrt{3}}(\mathrm{D}_L^1 - \mathrm{D}_R^1);\ \mathrm{k}_m = -\frac{g}{\sqrt{3}}\mathrm{D}_R^8 + \frac{2em}{\sqrt{3}m_1}\mathrm{D}_L^8, \tag{5.8}$$

où g est la charge du monopôle, $e = q\hbar c$ est la charge de l'électron. On obtient alors pour la dynamique de l'onde complète :

$$0 = \hbar c\partial_\mu T^\mu + [F^e_{\mu\lambda}\mathrm{j}_e^\mu - F^e_{\mu\lambda}\mathrm{j}_m^\mu + F^m_{\mu\lambda}i\mathrm{k}_e^\mu - F^m_{\mu\lambda}i\mathrm{k}_m^\mu]\sigma^\lambda. \tag{5.9}$$

Le second terme $F^e_{\mu\lambda}\mathrm{j}_m^\mu\sigma^\lambda$ est celui de l'interaction entre le champ créé par l'électron avec le monopôle magnétique. La partie magnétique de l'interaction suit la forme modifiée de Lorentz dans laquelle le rôle des champs électrique et magnétique est inversé :

$$\hbar c\partial_\mu T^\mu = F^m_{\mu\lambda}i\mathrm{k}_m^\mu\sigma^\lambda, \tag{5.10}$$

$$\partial_\mu T^\mu = \mathrm{f}^0 + \vec{\mathrm{f}};\ \frac{i}{2}F^m_{\mu\lambda}\mathrm{k}_m^\mu\sigma^\lambda = \vec{\mathrm{k}}_m\cdot\vec{H}^m + \mathrm{k}_m^0\vec{H}^m - \vec{\mathrm{k}}_m\times\vec{E}^m, \tag{5.11}$$

$$\frac{\hbar c}{2}\vec{\mathrm{f}} = \mathrm{k}_m^0\vec{H}^m - \vec{\mathrm{k}}_m\times\vec{E}^m;\ F^m = \vec{E}^m + i\vec{H}^m. \tag{5.12}$$

6 Remarques de conclusion

L'onde leptonique comprend deux parties fort différentes. La partie monopôle magnétique de l'onde est d'un type voisin de la partie électron, mais il y a de nombreuses différences, par exemple la possibilité de deux termes de masse, ou le fait que c'est l'onde de l'électron qui est dans la partie diagonale de $\Psi^{3,3}$. C'est cette différence qui rend si difficile l'étude expérimentale du monopôle magnétique, car nous connaissons bien les propriétés des électrons et nous nous attendons trop à avoir les mêmes propriétés pour les monopôles magnétiques. L'onde quantique leptonique est compatible avec l'existence d'un terme de masse, donc ce qui est exposé ici se prolonge en y ajoutant la gravitation comme géométrie de l'espace-temps. La connexion n'utilise que sept des huit termes possibles car le i de la jauge chirale commute avec tout élément de Cl_3. Il en résulte que B est directement relié à la partie géométrique de la dérivation invariante. La partie bosonique du modèle standard s'obtient en itérant un nombre pair de fois les équations des fermions.

Références

[1] Daviau, C. (1993). *Equation de Dirac non linéaire*, Ph.D. thesis, Université de Nantes.

[2] C. Daviau. *Solutions of the Dirac equation and of a nonlinear Dirac equation for the hydrogen atom.* Adv. Appl. Clifford Algebras, 7((S)) :175–194, 1997.

[3] C. Daviau. *Sur l'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli.* Ann. Fond. L. de Broglie, 22(1) :87–103, 1997.

[4] C. Daviau. *Sur les tenseurs de la théorie de Dirac en algèbre d'espace.* Ann. Fond. Louis de Broglie, 23(1), 1998.

[5] C. Daviau. *Interprétation cinématique de l'onde de l'électron.* Ann. Fond. L. de Broglie, 30(3-4), 2005.

[6] C. Daviau. *On the electromagnetism's invariance.* Ann. Fond. L. de Broglie, 33 :53–67, 2008.

[7] C. Daviau. *Aspects particulaires de l'onde de Dirac.* Ann. Fond. L. de Broglie, 34(1) :45–65, 2009.

[8] C. Daviau. *L'espace-temps double.* JePublie, Pouillé-les-coteaux, 2011.

[9] C. Daviau. *Double Space-Time and more.* JePublie, Pouillé-les-coteaux, 2012.

[10] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 8(4), 1983.

[11] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$(partie 2). *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 9(1), 1984.

[12] G. Lochak. Wave equation for a magnetic monopole. *Int. J. of Th. Phys.*, 24 :1019–1050, 1985.

[13] G. Lochak. Photons électriques et photons magnétiques dans la théorie du photon de Louis de Broglie (un renouvellement possible de la théorie du champ unitaire d'Einstein). *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 29 :297–316, 2004.

[14] G. Lochak. Monopôle magnétique dans le champ de Dirac (états magnétiques du champ de majorana). *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 31 :193–206, 2006.

[15] G. Lochak. Twisted space, chiral gauge and magnetism. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 32 :125–136, 2007.

[16] G. Lochak. "Photons électriques" et "photons magnétiques" dans la théorie du photon de de Broglie. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 33 :107–127, 2008.

[17] G. Lochak. A theory of light with four different photons : electric and magnetic with spin 1 and spin 0. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 35 :1–18, 2010.

[18] C. Daviau and J. Bertrand. A lepton Dirac equation with additional mass term and a wave equation for a fourth neutrino. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 38, 2013.

[19] C. Daviau. Invariant quantum wave equations and double space-time. *Adv. in Imaging and Electron Physics*, 179, chapter 1 :1–137, 2013.

[20] C Daviau. Gauge group of the standard model in $Cl_{1,5}$. *AACA*, 25 :DOI 10.1007/s00006–015–0566–5, 2015.

[21] C. Daviau and J. Bertrand. *New Insights in the Standard Model of Quantum Physics in Clifford Algebra.* Je Publie, Pouillé-les-coteaux, 2014.

[22] C. Daviau and J. Bertrand. Relativistic gauge invariant wave equation of the electron-neutrino. *Journal of Modern Physics*, 5 :1001–1022, http ://dx.doi.org/10.4236/jmp.2014.511102, 2014.

[23] C. Daviau and J. Bertrand. A wave equation including leptons and quarks for the standard model of quantum physics in Clifford algebra. *JMP*, 5 :2149–2173, http ://dx.doi.org/10.4236/jmp.2014.518210, 2014.

[24] C. Daviau. Retour à l'onde de Louis de Broglie. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 40 :113–138, 2015.

[25] C. Daviau and J. Bertrand. Charge des quarks, bosons de jauge et principe de Pauli. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 40 :181–209, 2015.

[26] C. Daviau and J. Bertrand. Electro-weak gauge, Weinberg-Salam angle. *JMP*, 6 :2080–2092. http ://dx.doi.org/10.4236/jmp.2015.614215, 2015.

[27] C. Daviau and J. Bertrand. Geometry of the standard model of quantum physics. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 3 :46–61. http ://dx.doi.org/10.4236/jamp.2015.31007, 2015.

[28] C. Daviau and J. Bertrand. Left chiral solutions for the hydrogen atom of the wave equation for electron and neutrino. *JMP*, 6 :1647–1656. http ://dx.doi.org/10.4236/jmp.2015.611166, 2015.

[29] C. Daviau and J. Bertrand. L'onde leptonique générale : électron + monopôle magnétique. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 41 :73–97, 2016.

[30] C. Daviau and J. Bertrand. *The standard model of quantum physics in Clifford algebra.* World Scientific, Singapore, 2016.

[31] C. Daviau and J. Bertrand. Three clifford algebras for four kinds of interactions. *JMP*, 7 :936–951. http ://dx.doi.org/10.4236/jmp.2016.79086, 2016.

[32] C. Daviau, J. Bertrand, and D. Girardot. Towards the unification, the first part : The spinor wave. *JMP*, 7 :1568–1590, http ://dx.doi.org/10.4236/jmp.2016.712143, 2016.

[33] C. Daviau, J. Bertrand, and D. Girardot. Towards the unification, part 2 : Simplified equations, covariant derivative, photons. *JMP*, 7 :2398–2417, http ://dx.doi.org/10.4236/jmp.2016.716207, 2016.

[34] C. Daviau and J. Bertrand. Scientific community and remaining errors, physics examples. *JMP*, 9 :250–258, http ://dx.doi.org/10.4236/jmp.2018.92017, 2018.

[35] C. Daviau and J. Bertrand. *Modèle Standard et Gravitation.* Presses des Mines, Paris, 2019.

[36] C. Daviau, J.Bertrand, D. Girardot, and T. Socroun. Equations d'onde des bosons résultant des équations récursives des fermions. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 42 no 2, 2017.

[37] C. Daviau, D. Fargue, D. Priem, and G. Racineux. Tracks of magnetic monopoles. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 38 :139–153, 2013.

[38] C. Daviau, D. Priem, and G. Racineux. Experimental report on magnetic monopoles. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 38 :189–194, 2013.

[39] O. Costa de Beauregard. Sur un tenseur encore ininterprété en théorie de Dirac. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 14-3 :335–342, 1989.

[40] C. Daviau and J. Bertrand. *Developing a Theory of Everything.* submitted to publication.

(Manuscrit reçu le 4 juin 2019)