Sur le problème de l'invariance par transformation de Lorentz de l'équation de Bohm et Hiley

PIERRE PELCÉ

Institut de Recherches sur les Phénomènes Hors Equilibre,49 rue Joliot-Curie, BP146,13013 Marseille, France.

RESUMÉ.L'équation de Bohm et Hiley est une généralisation de l'équation de Dirac pour traiter la dynamique de plusieurs particules.En prenant le cas de deux particules,nous montrons que cette équation n'est pas invariante par transformations de Lorentz,en introduisant tout d'abord un temps différent pour chaque particule,de telle façon qu'une transformation de Lorentz puisse être appliquée,puis en montrant qu'une telle transformation est impossible.Ce résultat n'exclut pas la possibilité de résoudre l'équation de Bohm et Hiley dans des repères particuliers,mais exclut de résoudre l'équation dans un repère où la solution serait plus simple,puis de déterminer les trajectoires d'une particule dans le repère du laboratoire par transformation de Lorentz à partir du premier repère.

ABSTRACT.The Bohm and Hiley equation is a generalization of the Dirac equation to solve the dynamics of many particles.With the example of two particles,we show that this equation is not invariant by Lorentz transformations, in introducing first a different time for each particle,in order that a Lorentz transformation could be applied,then in showing that such a transformation is impossible.This result does not exclude the possibility to solve the Bohm and Hiley equation in some particular frames,but excludes to solve the equation in a frame where the solution would be more simple, then determine the particle trajectories in a given frame given by a Lorentz transformation from the first frame.

1 Introduction.

Le problème de décrire le mouvement relativiste de particules composées remonte à L. De Broglie avec sa nouvelle théorie de la lumière [1,2],où il retrouve les équations de Maxwell à partir de deux équations de Dirac couplées de particules de spin $1/2$ de mêmes masses appelées demi-photons.Un problème similaire,celui du mouvement d'une particule de spin 0 composée de deux particules de spin $1/2$ a été résolu [3],mais à partir de l'équation de Bohm et Hiley [4].

Lorsque les particules se meuvent indépendemment,la seule équation relativiste à plusieurs particules que l'on peut utiliser est l'équation de Bohm et Hiley [4],qui est une généralisation à plusieurs particules de l'équation de Dirac pour l'électron [5].Cependant cette équations présente quelques difficultés conceptuelles.La première est que l'équation de Dirac traite les coordonnées temporelle et spatiale d'une particule à égalité,alors que l'équation de Bohm et Hiley traite le temps à égalité avec toutes les coordonnées spatiales des particules.La seconde est que l'équation de Bohm et Hiley ne serait invariante de Lorentz que de façon statistique [4],l'interaction non locale entre les particules posant problème pour l'invariance par transformée de Lorentz pour l' interprétation ontologique,c'est-à-dire lorsque l'on s'intéresse aux trajectoires particulières des particules.

Nous reprenons ce problème de façon plus rigoureuse en affectant comme Wentzel [6],un temps différent à chaque particule.Nous réécrivons donc l'équation de Bohm et Hiley en faisant intervenir ces plusieurs temps,mais ce qui est une hypothèse,en traitant pour chaque particule, temps et espace de façon équivalente.Nous montrons cependant que cette nouvelle équation n'est pas invariante par transformation de Lorentz.Ceci n'exclut pas d'utiliser l'équation de Bohm et Hiley pour déterminer des trajectoires de systèmes de particules,mais interdit d'utiliser une transformation de Lorentz pour déterminer des trajectoires dans un repère à partir de trajectoires déterminées plus simplement dans un autre repère.

Dans une première partie,nous rappelons tout d'abord l'invariance relativiste de l'équation de Dirac [7].Nous réalisons une transformation de Lorentz simple le long de l'axe 0z sur des solutions indépendantes de x et y.L'invariance relativiste de l'équation peut alors se traduire en la résolution de deux systèmes d'équations pour les coefficients de la transformation sur les composantes 1et 3 puis 2 et4,ce qui est possible dans ce cas puisque leurs déterminants s'annulent. Dans une seconde partie,nous appliquons la même méthode à l'équation de Bohm et Hiley généralisée à deux temps, et montrons que les déterminants associés aux systèmes d'équations pour les coefficients des transformations impliquant ici les composantes 1-3,1-2,2-1 et 2-4 ne s'annulent plus, montrant qu'il n'est plus possible de trouver des transformations du type de l'équation de Dirac à une particule.

2 Rappels sur l'équation de Dirac.

En présence d'un champ électromagnétique, l'équation de Dirac peut être écrite comme [5]

$$(P_0-\alpha_1 P_1-\alpha_2 P_2-\alpha_3 P_3-\alpha_0 mc)\Psi_k=0 \quad (1)$$

où

$$P_0=ih\frac{\partial}{\partial x^0}+\frac{e}{c}V \quad P_r=-ih\frac{\partial}{\partial x^r}+eA_r \quad , \quad r=1,2,3 \qquad (2)$$

avec $x_0 = ct$,et

$$\alpha_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui peut être développée sous la forme [7],

$$(P_0-mc)\Psi_1-(P_1-iP_2)\Psi_4-P_3\Psi_3=0$$
$$(P_0-mc)\Psi_2-(P_1+iP_2)\Psi_3+P_3\Psi_4=0 \qquad (4)$$
$$(P_0+mc)\Psi_3-(P_1-iP_2)\Psi_2-P_3\Psi_1=0$$
$$(P_0+mc)\Psi_4-(P_1+iP_2)\Psi_1+P_3\Psi_2=0$$

Dans une transformation de Lorentz simple le long de l'axe Oz,

$$x=x' \,;\, y=y' \,;\, z=\frac{z'+\beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}} \,;\, t=\frac{t'+\frac{\beta}{c}z'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (5)$$

où βc est la vitesse du second système par rapport au ptremier.Si nous définissons $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\mathrm{ch}\gamma$,les éqns.(5) peuvent être réécrites comme,

$$x=x' \,;\, y=y' \,;\, z=z'\mathrm{ch}\gamma+ct'\mathrm{sh}\gamma \,;\, ct=ct'\mathrm{ch}\gamma+z'\mathrm{sh}\gamma \qquad (6)$$

et les composantes de la quantité de mouvement généralisée se transforment comme,

$$P_1=P_1' \,;\, P_2=P_2' \,;\, P_3=P_3'\mathrm{ch}\gamma+P_0'\mathrm{sh}\gamma \,;\, P_0=P_0'\mathrm{ch}\gamma+P_3'\mathrm{sh}\gamma \qquad (7)$$

Pour simplifier,considérons des solutions qui dépendent seulement de z et de t,et essentiellement la première et la troisième des éqns(4) qui impliquent seulement Ψ_1 et Ψ_3.Réalisant sur ces deux équations les transformations(7),on obtient

$$(P_0'ch\gamma - mc)\Psi_1 - P_3'ch\gamma\,\Psi_3$$
$$+P_3'sh\gamma\,\Psi_1 - P_0'sh\gamma\,\Psi_3 = 0$$
$$(P_0'ch\gamma + mc)\Psi_3 - P_3'ch\gamma\,\Psi_1 \quad (8)$$
$$+P_3'sh\gamma\,\Psi_3 - P_0'sh\gamma\,\Psi_1 = 0$$

En suivant L.De Broglie [7], multipliant la première éqn.(8) par e_1 et la seconde par e_2,on retrouve la première éqn.(4) avec les quantités ' si l'invariance de Lorentz est satisfaite,c'est-à-dire,

$$P'_0(ch\gamma e_1\Psi_1 - sh\gamma e_1\Psi_3 + e_2 ch\gamma\Psi_3 - e_2 sh\gamma\Psi_1) = P'_0\Psi'_1 \quad (9)$$

et

$$-mc(e_1\Psi_1 - e_2\Psi_3) = -mc\Psi'_1 \quad (10)$$

Supposant

$$\Psi'_1 = a_1\Psi_1 + a_3\Psi_3 \quad (11)$$

on obtient de l'éqn.(9)

$$ch\gamma\, e_1 - sh\gamma\, e_2 = a_1$$
$$-sh\gamma\, e_1 + ch\gamma\, e_2 = a_3 \quad (12)$$

et de l'éqn.(10)

$$e_1 = a_1 \quad , \quad e_2 = -a_3 \quad (13)$$

si bien que

$$(ch\gamma - 1)e_1 - sh\gamma\, e_2 = 0$$
$$-sh\gamma\, e_1 + e_2(ch\gamma + 1) = 0 \quad (14)$$

relations qui sont compatibles puisque le déterminant du système $(ch\gamma-1)(ch\gamma+1)-sh^2\gamma=ch^2\gamma-sh^2\gamma-1$ s'annule.On satisfait par exemple la première éqn.(14) avec $e_1=ch\frac{\gamma}{2}$ et $e_2=sh\frac{\gamma}{2}$,si bien que

$$a_1=ch\frac{\gamma}{2} \quad ; \quad a_3=-sh\frac{\gamma}{2} \quad (15)$$

Procédant de même avec la troisième équation,on trouve finalement la matrice de transformation impliquant les composantes 1 et 3,

$$T_{1p.1}=\begin{pmatrix} ch\frac{\gamma}{2} & -sh\frac{\gamma}{2} \\ -sh\frac{\gamma}{2} & ch\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Procédant de même avec les équations du second groupe impliquant les composantes 2 et 4,on trouve la seconde matrice de transformation de ces composantes,

$$T_{1p.2}=\begin{pmatrix} ch\frac{\gamma}{2} & sh\frac{\gamma}{2} \\ sh\frac{\gamma}{2} & ch\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

3 L'équation de Bohm et Hiley.

Nous commençons par définir la fonction d'onde d'un système à plusieurs particules dans le repère du laboratoire, $\Psi=\Psi_{i1...in...iN}(\vec{r}_1,...\vec{r}_n...\vec{r}_N,t)$,chaque indice i affecté à chaque particule prenant une valeur de 1 à 4.Il en résulte que la fonction d'onde de N particules a 4^N

composantes,généralise les quatre composantes de la fonction d'onde de Dirac à une particule.Nous affectons ensuite à chaque particule les matrices α_n,étant entendu qu'ici, α_n représente ces quatre matrices de Dirac opérant seulement sur le bi-spineur d'indice i_n.L' "équation de Dirac à N particules" à un seul temps que l'on peut aussi appeler équation de Bohm et Hiley s'écrit alors à partir de [4],

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=((\sum_n \alpha_{0n}m_n c^2-e\Phi_n(\vec{r}_n,t)+V(\vec{r}_1,...\vec{r}_n...\vec{r}_N,t)$$

$$+c\sum_n \vec{\alpha}_n.(\vec{p}_n+\frac{e}{c}\vec{A}_n(\vec{r}_n,t)))\Psi \quad (18)$$

où $\vec{p}_n$ est l'opérateur quantité de mouvement de la nième particule,V l'énergie d'interaction entre les particules,Φ et $\vec{A}$ les potentiels électromagnétiques.

Cette équation conserve la densité

$$\rho=\sum_{i1,...in,...iN}\left|\Psi_{i1,...in,...iN}\right|^2 \quad (19)$$

puisque

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum \vec{\nabla}_n.\vec{j}_n=0 \quad (20)$$

où

$$j_n^1=\rho u_{nx}=c\sum_{i1..i(n-1)i(n+1)..iN}(\Psi^*_{i1..in=1..iN}\Psi_{i1..in=4..iN}+\Psi^*_2\Psi_3+\Psi^*_3\Psi_2+\Psi^*_4\Psi_1)$$

$$j_n^2=\rho u_{ny}=c\sum_{i1..i(n-1)i(n+1)..iN}(-i\Psi^*_1\Psi_4+i\Psi^*_2\Psi_3-i\Psi^*_3\Psi_2+i\Psi^*_4\Psi_1) \quad (21)$$

$$j_n^3=\rho u_{nz}=c\sum_{i1..i(n-1)i(n+1)..iN}(\Psi^*_1\Psi_3-\Psi^*_2\Psi_4+\Psi^*_3\Psi_1-\Psi^*_4\Psi_2)$$

est la densité de courant de la nième particule.Dans cette dernière expression,on somme sur tous les indices i des autres particules,la notation étant explicitée dans le premier terme de la composante selon Ox.

Cependant,la description de la dynamique de plusieurs particules en relativité restreinte présente la difficulté que si pour une particule,le temps et les coordonnées spatiales sont considérés au point de la particule,il n'en est pas de même pour plusieurs particules,puisque si dans un repère donné,deux particules sont aux points de coordonnées z_1 et z_2 au même instant t,ils sont dans un autre repère translaté par rapport au premier à vitesse constante v,aux points z_1' et z_2' aux instants différents t_1' et t_2',les nouvelles coordonnées étant transformées par rapport aux premières par une transformée de Lorentz simple le long de l'axe Oz.On voit donc qu'une transformée de Lorentz sur un système de plusieurs particules fait naturellement apparaître un temps attaché à chaque particule.Si l' on veut donc construire une équation quantique pour plusieurs particules qui soit invariante par transformée de Lorentz,ces différents temps devront apparaître dans l'équation [6].Il semble aussi naturel que si pour une particule temps et espace doivent être traités à égalité,il en soit de même pour chaque particule dans un système à plusieurs particule.En particulier,contrairement à ce que l'on pourrait penser au premier abord,il est exclus de traiter le temps comme toutes les coordonnées spatiales des autres particules,ce qui imposerait d'établir un invariant relativiste dans l'espace de configuration,comme si la lumière se propageait dans cet espace,ce qui apparaîtrait sans signification réelle.Ces considérations imposent donc à l'éqn.(18) de s'écrire maintenant

$$i\hbar\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial\Psi}{\partial t_n}+\ldots+\frac{\partial\Psi}{\partial t_N}\right)=\Big(\Big(\sum_n \alpha_{0n} m_n c^2 - e\Phi_n(\vec{r}_n,t_n)$$

$$+V(\vec{r}_1,\ldots\vec{r}_n\ldots\vec{r}_N,t_1,\ldots t_n\ldots t_N)+c\sum_n \vec{\alpha}_n.(\vec{p}_n+\frac{e}{c}\vec{A}_n(\vec{r}_n,t_n)\Big)\Big)\Psi \quad (22)$$

que l'on peut aussi appeler "équation de Dirac à N particules",par sa propriété de traiter à égalité le temps et les coordonnées spatiales de chaque particule.

4 Etude de l'invariance par transformations de Lorentz de l'équation de Bohm et Hiley généralisée à deux temps.

Examinons par exemple le cas de deux particules sans interaction (V=0),et sans champ électromagnétique extérieur.Pour simplifer,nous ne considérons ici que des solutions indépendantes de x et y.L'éqn.(22) s'écrit alors sous la forme(4)§2,c'est-à-dire ici avec les 16 équations

$$(P_{01}+P_{02}-(m_1+m_2))\Psi_{11}-P_{31}\Psi_{31}-P_{32}\Psi_{13}=0 \quad (23.1)$$
$$(P_{01}+P_{02}-(m_1+m_2))\Psi_{12}-P_{31}\Psi_{32}+P_{32}\Psi_{14}=0 \quad (23.2)$$
$$(P_{01}+P_{02}-m_1+m_2)\Psi_{13}-P_{31}\Psi_{33}-P_{32}\Psi_{11}=0 \quad (23.3)$$
$$(P_{01}+P_{02}-m_1+m_2)\Psi_{14}-P_{31}\Psi_{34}+P_{32}\Psi_{12}=0 \quad (23.4)$$
$$(P_{01}+P_{02}-(m_1+m_2))\Psi_{21}+P_{31}\Psi_{41}-P_{32}\Psi_{23}=0 \quad (23.5)$$
$$(P_{01}+P_{02}-(m_1+m_2))\Psi_{22}+P_{31}\Psi_{42}+P_{32}\Psi_{24}=0 \quad (23.6)$$
$$(P_{01}+P_{02}-m_1+m_2)\Psi_{23}+P_{31}\Psi_{43}-P_{32}\Psi_{21}=0 \quad (23.7)$$
$$(P_{01}+P_{02}-m_1+m_2)\Psi_{24}+P_{31}\Psi_{44}+P_{32}\Psi_{22}=0 \quad (23.8)$$
$$(P_{01}+P_{02}+m_1-m_2))\Psi_{31}-P_{31}\Psi_{11}-P_{32}\Psi_{33}=0 \quad (23.9)$$
$$(P_{01}+P_{02}+m_1-m_2)\Psi_{32}-P_{31}\Psi_{12}+P_{32}\Psi_{34}=0 \quad (23.10)$$
$$(P_{01}+P_{02}+m_1+m_2)\Psi_{33}-P_{31}\Psi_{13}-P_{32}\Psi_{31}=0 \quad (23.11)$$
$$(P_{01}+P_{02}+m_1+m_2)\Psi_{34}-P_{31}\Psi_{14}+P_{32}\Psi_{32}=0 \quad (23.12)$$
$$(P_{01}+P_{02}+m_1-m_2))\Psi_{41}+P_{31}\Psi_{21}-P_{32}\Psi_{43}=0 \quad (23.13)$$
$$(P_{01}+P_{02}+m_1-m_2))\Psi_{42}+P_{31}\Psi_{22}+P_{32}\Psi_{44}=0 \quad (23.14)$$
$$(P_{01}+P_{02}+m_1+m_2)\Psi_{43}+P_{31}\Psi_{23}-P_{32}\Psi_{41}=0 \quad (23.15)$$
$$(P_{01}+P_{02}+m_1+m_2)\Psi_{44}+P_{31}\Psi_{24}+P_{32}\Psi_{42}=0 \quad (23.16)$$

On peut les séparer en quatre groupes de composantes couplées entre elles.Le premier groupe, qui implique les composantes Ψ_{11}, Ψ_{13}, Ψ_{31} et Ψ_{33} satisfait les éqns.(23.1),(23.3),(23.9) et (23.11),le second groupe avec les composantes Ψ_{12}, Ψ_{14}, Ψ_{32} et Ψ_{34} et les éqns.(23.2),(23.4),(23.10) et (23.12),le troisième groupe avec les composantes Ψ_{21}, Ψ_{23}, Ψ_{41} et Ψ_{43}, et les éqns.(23.5),(23.7),(23.13) et (23.15),et le quatrième groupe avec les composantes Ψ_{22}, Ψ_{24}, Ψ_{42} and Ψ_{44} et les éqns.(23.6),(23.8),(23.14) et (23.16). En quelque sorte,ces quatre groupes généralisent les deux groupes de deux équations de l'équation de Dirac,respectivement avec les composantes 1-3 et 2-4.

Lorsque les deux particules sont très éloignées,on peut les supposer indépendantes,et les 16 composantes de la fonction d'onde se factorisent en produits de fonctions d'onde de particules individuelles.Si l'équation est invariante par transformations de Lorentz,chaque fonction d'onde de particule individuelle se transformant par les transformation (16) ou (17),la transformation globale doit être formée de produits tensoriels de ces transformations de particules individuelles,celles-ci conservant les quatre groupes d'équations mentionnés ci-dessus [8].Considérons donc que comme pour l'équation de Dirac,la transformation de Lorentz cherchée n'agisse que sur un seul des quatre groupes,par exemple,le premier groupe impliquant les composantes Ψ_{11}, Ψ_{13}, Ψ_{31} et Ψ_{33}.

Dans une transformation simple de Lorentz le long de l'axe Oz,

$$
\begin{aligned}
&x_1=x'_1\,;\,y_1=y'_1\,;\,z_1=z'_1\mathrm{ch}\gamma+ct'_1\mathrm{sh}\gamma\,;\,ct_1=ct'_1\mathrm{ch}\gamma+z'_1\mathrm{sh}\gamma\\
&x_2=x'_2\,;\,y_2=y'_2\,;\,z_2=z'_2\mathrm{ch}\gamma+ct'_2\mathrm{sh}\gamma\,;\,ct_2=ct'_2\mathrm{ch}\gamma+z'_2\mathrm{sh}\gamma \qquad (24)
\end{aligned}
$$

et les composantes de la quantité de mouvement généralisée se transforment comme

$$
\begin{aligned}
&P_{11}=P_{12}'\,;\,P_{21}=P_{21}'\,;\,P_{31}=P_{31}'\mathrm{ch}\gamma+P_{01}'\mathrm{sh}\gamma\,;\,P_{01}=P_{01}'\mathrm{ch}\gamma+P_{31}'\mathrm{sh}\gamma\\
&P_{12}=P_{12}'\,;\,P_{22}=P_{22}'\,;\,P_{32}=P_{32}'\mathrm{ch}\gamma+P_{02}'\mathrm{sh}\gamma\,;\,P_{02}=P_{02}'\mathrm{ch}\gamma+P_{32}'\mathrm{sh}\gamma \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Réalisant sur les quatre équations (23.1),(23.3),(23.9) et (23.11),la transformation (25),on obtient

$$(P_{01}\text{'ch}\gamma+P_{02}\text{'ch}\gamma-(m_1+m_2))\Psi_{11} \quad (26.1)$$
$$-P_{31}\text{'ch}\gamma\ \Psi_{31}-P_{32}\text{'ch}\gamma\ \Psi_{13}$$
$$+P_{31}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{11}+P_{32}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{11}$$
$$-P_{01}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{31}-P_{02}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{13}=0$$

$$(P_{01}\text{'ch}\gamma+P_{02}\text{'ch}\gamma-m_1+m_2))\Psi_{13} \quad (26.2)$$
$$-P_{31}\text{'ch}\gamma\ \Psi_{33}-P_{32}\text{'ch}\gamma\ \Psi_{11}$$
$$+P_{31}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{13}+P_{32}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{13}$$
$$-P_{01}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{33}-P_{02}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{11}=0$$

$$(P_{01}\text{'ch}\gamma+P_{02}\text{'ch}\gamma+m_1-m_2))\Psi_{13} \quad (26.3)$$
$$-P_{31}\text{'ch}\gamma\ \Psi_{11}-P_{32}\text{'ch}\gamma\ \Psi_{33}$$
$$+P_{31}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{31}+P_{32}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{31}$$
$$-P_{01}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{11}-P_{02}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{33}=0$$

$$(P_{01}\text{'ch}\gamma+P_{02}\text{'ch}\gamma+m_1+m_2))\Psi_{33} \quad (26.4)$$
$$-P_{31}\text{'ch}\gamma\ \Psi_{13}-P_{32}\text{'ch}\gamma\ \Psi_{31}$$
$$+P_{31}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{33}+P_{32}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{33}$$
$$-P_{01}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{13}-P_{02}\text{'sh}\gamma\ \Psi_{31}=0$$

Procédons alors comme au §2.Réalisons une combinaison linéaire des quatre équations précédentes, respectivement multipliées par les facteurs e_1 , e_2 , e_3 et e_4,et faisons apparaître par exemple le facteur de P_{01} ‘,

$$P'_{01}(e_1\text{ch}\gamma\ \Psi_{11}-e_1\text{sh}\gamma\ \Psi_{31}+e_2\text{ch}\gamma\ \Psi_{13}-e_2\text{sh}\gamma\ \Psi_{33}$$
$$+e_3\text{ch}\gamma\ \Psi_{31}-e_3\text{sh}\gamma\ \Psi_{11}+e_4\text{ch}\gamma\ \Psi_{33}-e_4\text{sh}\gamma\ \Psi_{13})=P'_{01}\Psi'_{11} \quad (27)$$

que l'on égale au facteur transformé si l'on exige qu'il y ait invariance par transformée de Lorentz,et faisons également apparaître les termes de masses,

$$-e_1(m_1+m_2)\Psi_{11}+e_2(m_2-m_1)\Psi_{13}+e_3(m_1-m_2)\Psi_{31} +e_4(m_1+m_2)\Psi_{33}=-(m_1+m_2)\Psi'_{11} \quad (28)$$

que l'on égale aussi au facteur transformé.Si l'on suppose une transformation linéaire des fonctions d'onde comme

$$\begin{aligned}
\Psi'_{11}&=a_1\Psi_{11}+a_2\Psi_{13}+a_3\Psi_{31}+a_4\Psi_{33}\\
\Psi'_{13}&=b_1\Psi_{11}+b_2\Psi_{13}+b_3\Psi_{31}+b_4\Psi_{33} \quad (29)\\
\Psi'_{31}&=c_1\Psi_{11}+c_2\Psi_{13}+c_3\Psi_{31}+c_4\Psi_{33}\\
\Psi'_{33}&=d_1\Psi_{11}+d_2\Psi_{13}+d_3\Psi_{31}+d_4\Psi_{33}
\end{aligned}$$

que l'on introduit dans les éqns.(27) et (28), on obtient des contraintes sur les coefficients introduits comme,

$$\begin{aligned}
e_1\mathrm{ch}\gamma-e_3\mathrm{sh}\gamma&=a_1\\
e_2\mathrm{ch}\gamma-e_4\mathrm{sh}\gamma&=a_2\\
e_3\mathrm{ch}\gamma-e_1\mathrm{sh}\gamma&=a_3 \quad (30)\\
e_4\mathrm{ch}\gamma-e_2\mathrm{sh}\gamma&=a_4
\end{aligned}$$

et

$$a_1=e_1 \; ; a_2=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \; ; a_3=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} \; ; a_4=-e_4 \quad (31)$$

ces relations conduisant au système d'équations

$$
\begin{aligned}
&(1-\mathrm{ch}\gamma)e_1+e_3\mathrm{sh}\gamma=0\\
&e_2(\mathrm{ch}\gamma+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2})-e_4\mathrm{sh}\gamma=0\\
&e_3(\mathrm{ch}\gamma+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2})-e_1\mathrm{sh}\gamma=0 \quad (32)\\
&-e_2\mathrm{sh}\gamma+e_4(1+\mathrm{ch}\gamma)=0
\end{aligned}
$$

Ce système admet une solution non nulle que si le déterminant

$$
\begin{vmatrix}
1-\mathrm{ch}\gamma & 0 & \mathrm{sh}\gamma & 0\\
0 & \mathrm{ch}\gamma+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} & 0 & -\mathrm{sh}\gamma\\
-\mathrm{sh}\gamma & 0 & \mathrm{ch}\gamma+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} & 0\\
0 & -\mathrm{sh}\gamma & 0 & 1+\mathrm{ch}\gamma
\end{vmatrix} \quad (33)
$$

s'annule.Or ce déterminant égale $\mathrm{sh}^2\gamma(\frac{2m_2}{m_1+m_2})^2$ qui ne peut s'annuler, rendant impossible l'invariance par transformation de Lorentz.

5 Conclusion

Le problème de l'invariance relativiste de l'équation de Bohm et Hiley à deux particules apparaît plus difficile à résoudre que celui de l'équation de Dirac résolu depuis longtemps [7].Comme l'équation de Dirac, pour des solutions indépendantes de x et y, l'équation de Bohm et Hiley étudiée ici se sépare en plusieurs groupes d'équations indépendantes. Cependant,contrairement à l'équation de Dirac,il n'est pas possible de trouver de transformation sur les composantes de ces groupes,associée à une transformée de Lorentz selon l' axe Oz.Comme le montre l'article de Durt et Pelcé aussi publié dans le présent volume,cette impossibilité d'invariance relativiste peut être restaurée par l'incorporation appropriée de la matrice α_0 de Dirac dans le Lagrangien de l'équation,à l'origine d'une nouvelle équation à deux particules généralisée à deux temps invariante par transformation de Lorentz.

On pourrait objecter qu'une transformation non évidente impliquant toutes les composantes n'est pas à exclure.Cependant,l'argument qui précède l'éqn.(24) apparaît très convaincant,confirmé par l'étude d'autres équations à deux particules qui elles sont invariantes par transformations de Lorentz [1],[8],avec des transformations de type produits tensoriels de transformations de fonctions d'onde individuelles (16) ou (17).

L'équation de Bohm et Hiley transformée à plusieurs temps n'étant pas invariante par transformations de Lorentz,l'équation de Bohm et Hiley est néanmoins utilisable dans le repère du laboratoire donné,avec le seul temps de ce laboratoire,comme sous la forme (10).Les différents temps introduits ne prenaient leur signification que lorsque l'équation était transformée par transformation de Lorentz. Pour déterminer les trajectoires d'un système de particules donné,on résoudra donc l'équation (10) dans le repère donné,mais on ne pourra pas la résoudre dans un repère où le problème serait plus simple,pour déduire les trajectoires dans le repère du laboratoire donné en transformant ces trajectoires plus simples par transformée de Lorentz.Un exemple de résolution de cette équation est donnée dans le problème de désintégration d'une particule de spin 0 au repos en deux particules relativistes de spin $1/2$,où il est montré que dans cette configuration,le mouvement relatif des deux particules égale la vitesse de groupe de l'onde globale [9].Certaines tentatives [10] de rechercher une équation relativiste pour plusieurs particules qui soit invariante par transformations de Lorentz,n'ont pas abouti.

Références

[1] De Broglie L., Une nouvelle théorie de la lumière, tome premier, Hermann et Cie, Paris (1940).

[2] De Broglie L., Théorie générale des particules à spin (Méthode de fusion), Gauthier-Villars, Paris (1943).

[3] Pelcé P., Mouvements de particules de spin global 0 composées de deux particules de spin $1/2$, non publié.

[4] Bohm D. and Hiley B.J., The undivided universe (Routledge) (1993).

[5] Dirac P.A.M. (1930) The principles of quantum mechanics, fourth edition (1958).

[6] Wentzel G., Quantum theory of fields, Interscience Publishers (1949), reedition Dover (2003).

[7] De Broglie L., L'électron magnétique, Hermann et Cie éditeurs (1934).

[8] Durt Th. and Pelcé P. (2020) Lorentz-covariant two-particles, quantum relativistic equation in a Lagrangian approach, même numéro.

[9] Pelcé P., Désintégration d'une particule de spin 0 en deux ondes relativistes de spin $1/2$, Annales de la fondation Louis de Broglie 43, 177-193.

[10] Vigier J-P., Nonlocal quantum potential interpretation of relativistic action at a distance in many-body problems, in Open questions in quantum physics, ed.G.Tarozzi and A.van der Merwe, Reidel, Dordrecht (1985).

(Manuscrit reçu février 2019, révisé juin 2020)