Le monopôle magnétique Deux approches complémentaires [1]

Dominique Spehler

Instituto de Fisica, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP Brasil

RÉSUMÉ. On montre comment deux approches différentes, l'une basée sur la théorie de la fusion de de Broglie, et l'autre puisant ses fondements dans le formalisme spinoriel et l'invariance chirale, aboutissent à des conclusions identiques en ce qui concerne le monopole de Lochak. Sont également soulignées les différences qui apparaissent si le photon est ou non considéré comme une particule massive. Les deux approches sont détaillées et comparées entre elles et aux théories usuelles.

Le monopole magnétique a été pour moi l'occasion d'une rencontre passionnante à plus d'un titre.

Bien sûr, il est toujours intéressant de pouvoir confronter ses idées, surtout si elles sont " hors normes ", avec celles de quelqu'un qui en partage sinon l'élaboration, du moins les conclusions, mais, en ce qui me concerne, ce qui fut le plus important est d'avoir eu l'occasion de rencontrer, écouter, discuter avec la personne exceptionnelle qu'est le Prof. Georges Lochak.

J'ai également eu la chance d'avoir avec Mr Lochak des échanges épistolaires qui m'ont permis de recevoir des lettres d'une qualité inusitée de nos jours ou les échanges entre collègues relèvent bien plus souvent d'une compétition effrénée à la publication plutôt qu'à l'élaboration commune d'idées scientifiques.

---
[1] NDLR: Cet article fait suite à l'exposé présenté lors des *Journées Louis de Broglie* organisées le 4 juin 2019.

Je voudrais lors de cette communication essayer de comparer nos approches respectives destinées à mettre en évidence un monopole magnétique. Il m'est apparu que nos deux méthodes avaient plus de similitudes que de différences et il m'a semblé intéressant de souligner les unes et les autres.

Pour ce faire il m'a paru nécessaire d'exposer les détails de nos deux théories, à savoir celle de Mr Georges Lochak (GL) et la mienne (DS).

Dans mon introduction je me permettrai de citer parfois textuellement les mots de G.Lochak, car qui mieux que lui saurait exposer simplement des choses qui ne le sont pas tellement.

Vous savez tous qu'un monopole magnétique est une particule hypothétique de charge magnétique ponctuelle, contrairement à ce qui est le cas pour les aimants qui possèdent 2 pôles magnétiques opposés.

Le monopole magnétique " fut le rêve de quelques-uns, nié par beaucoup et l'objet de toute une littérature. Dès le XVIII°siècle, Coulomb y pensait. . . , au XIX°siècle Maxwell, qui n'a pas vu le monopole, le mit à la base du magnétisme. En 1894, Pierre Curie décrivit les lois générales de la symétrie de l'électricité et du magnétisme et le rôle capital de la chiralité qui distingue la gauche de la droite (L'univers n'est pas égal à son image dans un miroir). Pierre Curie a décrit le magnétisme libre, donc le monopole, et a prédit qu'il devait être chiral, comme le sont les interactions faibles. "

Je vais donc dans un premier temps exposer la théorie de Mr G.Lochak du monopole magnétique.

Les fondements de la théorie de (GL) sont les suivants:

1) **Le photon est massif**, dans ce qui suit je noterai sa masse m_0.
2) **Le photon n'est pas une particule élémentaire**. Il résulte de la fusion de 2 particules de spin 1/2, et est donc représenté par un spineur du type

$$\psi_{a,b} \quad \text{où} \quad a, b = 1, 4 \quad \text{et} \quad \psi_{a,b} = \psi_a \otimes \eta_b$$

ψ et η étant tous deux de spin 1/2 et ayant la même masse $m_0/2$.

3) **L'existence du monopole magnétique résulte de la théorie de la fusion**, que je vais brièvement exposer.
Soient ψ_a et η_b deux particules massives (masse $m_0/2$) de spin 1/2. On sait que

$$\partial_\mu(\psi_a\eta_b) = (\partial_\mu(\psi_a)\eta_b + \psi_a(\partial_\mu\eta_b)$$

La condition de fusion est :

$$\frac{1}{2}\partial_\mu(\psi_a\eta_b) = (\partial_\mu\psi_a)\eta_b = \psi_a(\partial_\mu\eta_b)$$

J'en viens à présent à la théorie de (GL) proprement dite.
ψ et η représentant des particules de spin 1/2 et masse $m_0/2$, ils satisfont à l'équation de Dirac.

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{m_0}{2}\right)\psi = 0$$
$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{m_0}{2}\right)\eta = 0$$

Admettant $\Psi_{a,b} = \psi_a\eta_b$ et multipliant la première équation à droite par η et la deuxième à gauche par ψ puis appliquant la théorie de la fusion, on obtient les 2 équations suivantes pour le spineur $\Psi_{a,b}$:

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\left(\partial_\mu\Psi\right) - m_0\Psi &= 0 \\ i\left(\partial_\mu\Psi\right)^t\gamma^\mu - m_0\Psi &= 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs on sait qu'il existe 2 matrices Γ et Λ telles que :

$$\begin{aligned} {}^t\gamma^\mu &= \Lambda\gamma^\mu\Lambda^{-1} \\ &= -\Gamma\gamma^\mu\Gamma^{-1} \end{aligned}$$

Pour simplifier mes calculs, j'ai employé la métrique $(1,-1,-1,-1)$ et la représentation matricielle dont j'ai l'habitude et donc pris

$$\Gamma = C^{-1} \quad \text{et} \quad \Lambda = C^{-1}\gamma^5 \qquad \gamma^5 = i\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

où C est la matrice de conjugaison de charge.
On obtient ainsi deux groupes d'équations, le premier à l'aide de Γ et qui donne :

$$(I) \qquad \begin{cases} i\,\gamma^\mu\partial_\mu\left(\Psi C^{-1}\right) - m_0\left(\Psi C^{-1}\right) = 0 \\ i\,\partial_\mu\left(\Psi C^{-1}\right)\gamma^\mu + m_0\left(\Psi C^{-1}\right) = 0 \end{cases}$$

Et le deuxième en utilisant Λ qui permet d'obtenir (toujours en utilisant mes notations) :

$$(II) \qquad \begin{cases} i\,\gamma^\mu\partial_\mu\left(\Psi C^{-1}\gamma^5\right) - m_0\Psi\left(C^{-1}\gamma^5\right) = 0 \\ i\,\partial_\mu\left(\Psi C^{-1}\gamma^5\right)\gamma^\mu - m_0\Psi\left(C^{-1}\gamma^5\right) = 0 \end{cases}$$

Comparant les relations I et II, on voit que la différence formelle entre ces deux équations est un signe. Cette petite différence formelle engendre une grande différence physique.

On peut dès à présent remarquer, grâce à la représentation employée, que le groupe d'équations II peut être obtenu à partir du groupe d'équations I par multiplication par γ^5 à droite.

On obtient donc deux groupes d'équations duales.

C'est cette dualité entre ces groupes d'équations qui se traduira par l'échange entre électricité et magnétisme.

Pour ce qui suit je me permets de souligner ici un point commun entre nos deux approches ; nous développons tous deux le spineur de rang deux Ψ_{ab} selon une base des matrices 4x4.

J'ai choisi, pour des raisons de convenance la décomposition suivante :

$$(III) \qquad \begin{aligned} \Psi = (C)\,\varphi + (\gamma_\alpha C)\,\varphi^\alpha + (\sigma_{\alpha\beta} C)\,\varphi^{\alpha\beta} \\ + (\gamma_5\gamma_\alpha C)\,\varphi^{\alpha 5} + (\gamma_5 C)\,\varphi^5 \end{aligned}$$

mais il est bien évident que ce choix est arbitraire.

Par ailleurs les coefficients de superposition sont respectivement notés en ce qui concerne la théorie de GL

$$\varphi, \quad \varphi^\alpha, \quad \varphi^{\alpha\beta}, \quad \varphi^{\alpha 5}, \quad \varphi^5$$

Alors que pour mon approche je les noterai

$$\phi, \quad G^{\alpha V}, \quad F^{\alpha\beta}, \quad G^{\alpha A}, \quad \phi^A$$

Ceci afin de permettre plus aisément de voir le lien existant entre nos deux approches.

J'en reviens à (GL). On remplace Ψ par sa décomposition III dans le groupe d'équations I, en posant $(h, j, l = 1, 2, 3)$:

$$H^h = m_0 \epsilon^{0hjl} \varphi_{jl} \ ; \ E^h = 2m_0 \varphi^{h0} \ ; \ A^h = \varphi^h$$
$$V = \varphi^0 \ ; \ B^h = \varphi^{h5} \ ; \ W = \varphi^{50} \ I_1 = \varphi \ ; \ I_2 = i\varphi^5$$

Avec ces notations et *sans imposition aucune*, on obtient deux systèmes d'équations, équations nommées par GL, **équations du photon électrique**, à savoir :

D'une part

$$
(M_1) \quad \begin{cases}
\vec{\nabla}.\,\vec{E} = -m_0^2 V & ;\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \partial_0 \vec{H} = 0 \\
\vec{\nabla}.\,\vec{H} = 0 & ;\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \partial_0 \vec{E} = -m_0^2 \vec{A} \\
\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} & \\
\vec{E} + \partial_0 \vec{A} = -\vec{\nabla} V & \\
\vec{\nabla}.\,\vec{A} + \partial_0 V = 0 &
\end{cases}
$$

Notons que le photon électrique de GL est **massif (masse m_0)**, ce qui n'est pas le cas du photon décrit par les équations de Maxwell.

D'autre part

$$
(NM_1) \quad \begin{cases}
\partial_0 I_1 = 0 \\
\vec{\nabla} I_1 = 0 \\
m_0 I_1 = 0 \quad \text{et comme } m_0 \neq 0, \quad I_1 = 0 \\
\partial_0 I_2 = -m_0 W \\
\vec{\nabla} I_2 = m_0 \vec{B} \\
\partial_0 W + \vec{\nabla}.\,\vec{B} = m_0 I_2 \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0 \\
\partial_0 \vec{B} + \vec{\nabla} W = 0
\end{cases}
$$

Notons qu'on obtient 2 groupes d'équations car les équations de départ décrivent tant des particules de spin 1 que des particules de spin 0.

Les équations notées M_1 correspondent aux équations régissant une particule de spin 1 et donc au sens strict aux équations du photon tandis que les équations NM_1 décrivent une particule de spin 0.

Quelles sont les différences existant entre les équations auxquelles obéit le photon électrique de GL et les équations usuelles de Maxwell ? Dont je rappelle qu'elles s'écrivent (sans entrer trop dans les détails):

$$
\begin{cases}
\vec{\nabla}.\,\vec{E} = \rho \\
\vec{\nabla}.\,\vec{H} = 0 \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \partial_0 \vec{H} = 0 \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \partial_0 \vec{E} = \vec{j}
\end{cases}
$$

Équations qui à leur tour permettent de poser :

$$
\begin{cases}
\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\
\vec{E} + \partial_0 \vec{A} = -\vec{\nabla} V \\
\vec{\nabla}.\,\vec{A} + \partial_0 V = 0
\end{cases}
$$

Il est intéressant de noter que les **équations imposées** dans la théorie de Maxwell :

$$\begin{cases} \overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} \\ \overrightarrow{E} + \partial_0 \overrightarrow{A} = -\overrightarrow{\nabla} V \\ \overrightarrow{\nabla}.\, \overrightarrow{A} + \partial_0 V = 0 \end{cases}$$

sont pour GL (et moi-même aussi d'ailleurs) des **conséquences** de la théorie. La raison en est pour GL la présence d'un photon massif qui introduit un lien entre champs et potentiels. De plus les divers champs obéissent à des équations de Klein Gordon, à savoir :

$$\left(\Box + m_0^2\right) F = 0 \qquad F = \overrightarrow{B}, \overrightarrow{H}, \overrightarrow{A}, V, \dots$$

Les équations notées NM_1 ont été obtenues pour la première fois par de Broglie pour la description d'un méson de spin 0. En effet I_1 est un scalaire mais $I_1 = 0$ puisque la masse m_0 du photon est non nulle, I_2 est un pseudo scalaire et $(W, \overrightarrow{B})$ est un pseudo quadrivecteur.

Si, comme l'a fait remarquer de Broglie, on pose :

$$\begin{cases} \overrightarrow{H}' = \partial_0 \overrightarrow{B} + \overrightarrow{\nabla} W \\ \overrightarrow{E}' = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B} \end{cases}$$

les relations NM_1 imposent : $\overrightarrow{H}' = \overrightarrow{E}' = 0$.

$(\overrightarrow{H}',\ \overrightarrow{E}') = 0$ est une espèce de deuxième champ électromagnétique.

GL dit que les systèmes d'équations M_1 et NM_1 correspondent aux équations d'un photon électrique et il en donne les raisons suivantes :

1) GL a obtenu un champ électromagnétique noté $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{H})$ et un quadri potentiel polaire $(V, \overrightarrow{A})$, reliés par la formule de Lorentz. Ces champs et potentiel décrivent la dynamique de la charge électrique. Comme pour GL le photon a une masse non nulle m_0, $\overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{E} \neq 0$. De sorte que le champ électrique $\overrightarrow{E}$ n'est pas transversal, contrairement au champ magnétique. $\overrightarrow{E}$ a une petite composante longitudinale de l'ordre de m_0.
2) Les équations NM_1 contiennent elles un pseudo scalaire I_2 et un potentiel axial $(W, \overrightarrow{B})$ auquel il faut ajouter l'invariant I_1 et le deuxième champ électromagnétique de de Broglie qui peut lui être relié au magnétisme. La nullité de ce dernier ainsi que celle du scalaire I_1 confirme le **caractère électrique du photon décrit par les équations N_1 et NM_1.**

On a jusqu'à présent exploité uniquement le groupe d'équations I.

Si on utilise le même processus que celui employé pour les équations I, pour le groupe d'équations II, et donc qu'on remplace le bispineur Ψ par sa décomposition III cette fois dans les équations II on obtient en posant :

$$\begin{cases} H'^k = 2\varphi^{0k} & ;\ E'^k = \epsilon^{0kjl}\varphi_{lj} \\ A'^k = -i\varphi^{k5} & \\ V' = -i\varphi^{05} & ;\ B'^k = \frac{1}{m_0}\varphi^k \qquad ;\ W' = \frac{1}{m_0}\varphi^0 \\ I_1 = \varphi^5 & ;\ I_2 = \varphi \end{cases}$$

De par leur définitions mêmes, on constate que :

$$(\overrightarrow{H}' \longleftrightarrow \overrightarrow{E}) \qquad (\overrightarrow{E}' \longleftrightarrow \overrightarrow{H}) \qquad (V', \overrightarrow{A}') \longleftrightarrow (W, \overrightarrow{B})$$

C'est-à-dire que les champs $(\overrightarrow{E}', \overrightarrow{H}')$ sont duaux des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{H}$ et par conséquent échangent électricité et magnétisme.

Comme précédemment, sans nouvelle imposition aucune, on obtient à nouveau deux systèmes d'équations à savoir :

$$(M_2) \qquad \begin{cases} \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E}' = 0 & ;\ \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E}' + \partial_0\overrightarrow{H}' = -m_0^2\overrightarrow{B}' \\ \overrightarrow{\nabla}.\vec{H}' = m_0^2 W' & ;\ \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{H}' - \partial_0\overrightarrow{E}' = 0 \\ \overrightarrow{H}' = \overrightarrow{\nabla}W' + \partial_0\overrightarrow{B}' & \\ \overrightarrow{E}' = \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{B}' & ;\ \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{B}' + \partial_0 W' = 0 \end{cases}$$

et

$$(NM_2) \qquad \begin{cases} \partial_0 I_2 = 0 \\ \overrightarrow{\nabla} I_2 = 0 \\ m_0 I_2 = 0 \quad \text{et comme } m_0 \neq 0, \quad I_2 = 0 \\ -\partial_0 I_1 = m_0 V' \\ \overrightarrow{\nabla} I_1 = m_0\overrightarrow{A}' \\ m_0 I_1 = \partial_0 V' + \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{A}' \\ \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{A}' = 0 \\ \partial_0\overrightarrow{A}' + \overrightarrow{\nabla}V' = 0 \end{cases}$$

Comparant les systèmes d'équations M_1 et M_2, on voit que ces systèmes d'équations intervertissent les rôles de $\overrightarrow{E}$ et de $\overrightarrow{H}$, tout comme d'ailleurs ceux de $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ d'une part et V et W d'autre part. GL dit de ce fait qu'on a affaire à **un photon magnétique, ou encore au monopole**.

De manière symétrique à ce qui se passe pour le photon dans le cas antérieur, on obtient à présent $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{H}' \neq 0$ (puisque pour GL la masse m_0 du photon est non nulle) de sorte que cette fois c'est le champ magnétique $\overrightarrow{H}'$ qui aura une petite composante longitudinale de l'ordre de m_0 , alors que $\overrightarrow{E}'$ est lui transversal.

J'espère ne pas avoir trop dénaturé les propos de Mr Lochak, et voudrais à présent donner les principes fondamentaux qui régissent mon approche.

En ce qui me (D.S.) concerne, les ingrédients de base de ma théorie sont :

1) la notion de chiralité, la définition d'invariance par transformation chirale (peut être non orthodoxe) étant :

$$\Psi \longrightarrow \Psi^{chi} = e^{i\theta\gamma^5}\,\Psi = \cos\theta\,\Psi + i\sin\theta\,\tilde{\Psi}$$
$$\Psi^{chi}_{inf} = \Psi + i\tilde{\Psi}$$

L'invariance chirale peut être interprétée comme une invariance par rapport au remplacement de Ψ par la superposition linéaire du champ Ψ et de son partenaire dual $\tilde{\Psi}$

Si on développe le spineur de rang 2 Ψ de la même manière et selon la même base que le bispineur de GL (décomposition III précédente), qui nous a permis d'aboutir aux conclusions de GL et qu'on rappelle :

$$(IV) \qquad \begin{aligned} \Psi = (C)\phi + (\gamma_\alpha C)G^{\alpha V} &+ (\sigma_{\alpha\beta}C)F^{\alpha\beta} \\ &+ (\gamma^5\gamma_\alpha C)G^{\alpha A} + (\gamma_5 C)\phi^A \end{aligned}$$

On obtient pour le champ dual $\tilde{\Psi}$ du champ Ψ :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} = \gamma^5\Psi = (\gamma^5 C)\phi + (\gamma^5\gamma_\alpha C)G^{\alpha V} &+ (\gamma^5\sigma_{\alpha\beta}C)F^{\alpha\beta} \\ &+ (\gamma_\alpha C)G^{\alpha A} + C\phi^A \end{aligned}$$

champ $\tilde{\Psi}$ qui développé selon la même base et le même principe que Ψ admet la décomposition :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} = (C)\tilde{\phi} &+ (\gamma_\alpha C)\tilde{G}^{\alpha V} \\ &+ (\sigma_{\alpha\beta}C)\tilde{F}^{\alpha\beta} + (\gamma_5\gamma_\alpha C)\tilde{G}^{\alpha A} + (\gamma_5 C)\tilde{\phi}^A \end{aligned}$$

La correspondance $\Psi \longrightarrow \tilde{\Psi}$ revient à avoir :

$$\begin{array}{ll} \tilde{\phi} = \phi^A & ;\ \tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\,\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ \tilde{G}^{\alpha V} = G^{\alpha A} & ;\ \tilde{\phi}^A = \phi \\ \tilde{G}^{\alpha A} = G^{\alpha V} & \end{array}$$

On voit ainsi qu'une transformation chirale (et par suite l'invariance par rapport à cette transformation) n'a de sens que si en plus du photon il existe une autre particule duale qui restaurera, on le verra, la symétrie des équations de Maxwell.

Je vous rends attentifs à la différence que je fais entre invariance par transformation chirale, à savoir :

$$\Psi \longrightarrow \Psi^{chi} = e^{i\theta\gamma^5}\Psi$$

et échange des composantes chirales à savoir

$$\Psi_R \longleftrightarrow \Psi_L$$

Pour les composantes chirales, une transformation chirale se réduit à une transformation de phase ; chaque composante chirale se transformant suivant une phase différente.

2) le formalisme spinoriel

Dans le **formalisme spinoriel**, une particule de spin s est décrite par un spineur de rang $2s$, et pour chaque spineur de rang $2s$, on peut définir 2^{2s} composantes chirales.

Ainsi pour une particule de spin 1/2, représentée par le spineur Ψ_a, $(a = 1,2,3,4)$ il y a 2 composantes chirales à savoir $\Psi_R = 1/2(1+\gamma^5)\Psi$ et $\Psi_L = 1/2(1-\gamma^5)\Psi$, tandis que pour une particule $\Psi_{ab}, (a,b = 1,2,3,4)$ de spin 1, il faudra considérer 4 composantes chirales soit :

$$\psi_{\substack{RR \\ LL}} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) \otimes \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)\psi$$

$$\psi_{\substack{RL \\ LR}} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) \otimes \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)\psi$$

Dans mon approche l'hélicité est donnée par :

$$\Gamma^5 = \frac{1}{2}(\gamma^5 \otimes 1 + 1 \otimes \gamma^5)$$

La définition ci-dessus, montre que les composantes chirales Ψ_{RR} et Ψ_{LL} ont respectivement des hélicités +1 et -1 et décriront donc des particules de spin 1, tandis que Ψ_{RL} et Ψ_{LR} ont toutes deux pour hélicité 0 et décriront de ce fait des particules de spin 0.

Les composantes dynamiques (D.S.) seront les composantes chirales, composantes pour lesquelles on peut également distinguer une partie symétrique (Ψ^S) et une partie antisymétrique (Ψ^A) :

$$\Psi^S = 1/2(\Psi + {}^t\Psi) \quad \text{et} \quad \Psi^A = 1/2(\Psi - {}^t\Psi)$$

où ${}^t\Psi$ désigne le transposé du spineur Ψ.

Il est à noter que dans ma théorie les masses seront générées par les parties antisymétriques des spineurs considérés.

À ce stade intervient un choix, fait dans mes publications antérieures, et qui conduit nécessairement **à des différences avec la théorie de GL si on l'adopte**, à savoir **supposer que la masse du photon est nulle et qu'il n'en est pas de même de celle du monopole magnétique**. Cette dernière considération nous a amenés à ne considérer dans le lagrangien, dont nous donnerons l'expression dans ce qui suit, que le seul terme :

$$m^2(\bar{\Psi}^A_{RL} + \bar{\Psi}^A_{LR})(\Psi^A_{RL} + \Psi^A_{LR}) = 2m^2 G^{+A\alpha} G^A_\alpha$$

cohérent avec ce que nous avons également montré, à savoir que le champ G^A est relié au monopole magnétique.

Ceci étant, **il n'y a à priori rien qui s'oppose dans notre théorie à donner une masse au photon**. J'ai donc relevé le défi, et inclus dans mon approche un photon massif, ce qui m'a amenée à considérer en lieu et place du terme précédent le terme suivant :

$$m^2(\bar{\psi}_{RL} + \bar{\psi}_{LR})(\psi_{RL} + \psi_{LR}) = 2m^2(-G^{V\alpha} G^V_\alpha + G^{A\alpha} G^A_\alpha)$$

Mes résultats antérieurs étant obtenus à partir des résultats que je vais exposer en enlevant le terme supplémentaire $m^2 G^V_\alpha$ correspondant à un photon massif.

Je noterai en général **en gras** ce terme dans ce qui suit.

3) Le lagrangien (DS) est construit en utilisant les principes suivants :

– invariance par transformation de Lorentz, CPT,

- invariance chirale du lagrangien libre,
- rupture de l'invariance chirale pour les lagrangiens d'interaction,
- renormalisabilité.

Le Lagrangien, proposé par D.S., dont seront déduites les équations permettant de relier les théories de G.L. et D.S. entre elles, est le suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\Psi}_{RR}(i\partial\!\!\!/\psi_{RL}) + \bar{\Psi}_{RL}(i\partial\!\!\!/\psi_{LL}) + \bar{\Psi}_{LR}(i\partial\!\!\!/\psi_{RR}) + \bar{\Psi}_{LL}(i\partial\!\!\!/\psi_{LR})\\ &+ \bar{\eta}(i\partial\!\!\!/ - m_f)\eta + m^2(\bar{\Psi}_{RL} + \bar{\Psi}_{LR})(\Psi_{RL} + \Psi_{LR})\\ &- \frac{1}{2}(\bar{\Psi}_{RR}\Psi_{LL} + \bar{\Psi}_{LL}\Psi_{RR})\\ &+ \frac{\rho}{2}\bar{\eta}\left[(\Psi_{RL} + \Psi_{LR})C^{-1}\right]\eta - \frac{\rho}{2}\bar{\eta}\left[C(\bar{\Psi}_{RL} + \bar{\Psi}_{LR})\right]\eta\end{aligned}$$

m_f et m désignent respectivement les masses des champs η de spin 1/2, et Ψ de spin 1, ρ est une constante.

Afin de relier le formalisme proposé au formalisme usuel on utilise la décomposition (IV) du spineur de rang deux Ψ_{ab}. Pour mémoire notons que par construction le champ Φ est un scalaire, le champ Φ^A un pseudoscalaire, tandis que G^V_α est un vecteur, G^A_α pseudovecteur et $F_{\alpha\beta}$ est un tenseur antisymmétrique du second ordre.

Étant physicienne des particules, j'ai inclus dans mon lagangien, une particule de spin 1/2, masse m_f, représentée par le spineur η et interagissant avec les champs de spin 1.Cela également génère des différences facilement discernables avec la théorie de GL.

Le lagrangien proposé et la décomposition (IV) de Ψ_{ab} donnent lieu aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}&\partial_\alpha G^{V\alpha} = -\frac{i}{2}\phi \qquad ; \qquad \partial_\alpha G^{A\alpha} = \frac{i}{2}\phi^A\\ &F^{\alpha\beta} = (\partial^\alpha G^{V\beta} - \partial^\beta G^{V\alpha}) + i\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_\mu G^{A\nu}\\ &\tilde{F}^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_\mu G^V\nu - i(\partial^\alpha G^{A\beta} - \partial^\beta G^{A\alpha})\\ &\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\partial^\beta\phi - \frac{\rho}{8}\bar{\eta}\gamma^\beta\eta + \mathbf{m^2 G}^{V\beta}\\ &\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\partial^\beta\phi^A + i\frac{\rho}{8}\bar{\eta}\gamma^5\gamma^\beta\eta + im^2(G^A)^\beta\\ &(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_f)\eta = -\rho(G\!\!\!/^V + \gamma^5 G\!\!\!/^A)\eta\end{aligned}$$

Pour simplifier les explications postérieures, je pose : $F^{\alpha\beta} = F_1^{\alpha\beta} + i\tilde{F}_2^{\alpha\beta}$ et par suite : $\tilde{F^{\alpha\beta}} = \tilde{F}_1^{\alpha\beta} - iF_2^{\alpha\beta}$ et :

On déduit alors des équations satisfaites par $F^{\alpha\beta}$ et $\tilde{F^{\alpha\beta}}$, les équations suivantes pour les tenseurs $F_1^{\alpha\beta}$ et $F_2^{\alpha\beta}$:

$$\partial_\alpha F_1^{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\partial^\beta \phi - \frac{\rho}{8}\bar{\eta}\gamma^\beta \eta + \mathbf{m^2 G}^{V\beta}$$
$$\partial_\alpha F_2^{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}\partial^\beta \phi - \frac{\rho}{8}\bar{\eta}\gamma^5\gamma^\beta \eta - m^2 G^{\beta A}$$

On remarque par ailleurs que le vecteur G_α^V et le pseudo vecteur G_α^A obéissent à des équations à la Klein Gordon, qui résultent de l'imposition de cohérences entre les équations auxquelles sont soumis les champs $F^{\alpha\beta}$ et $\tilde{F^{\alpha\beta}}$, à savoir :

$$(\Box - \mathbf{m}^2)G^{V\alpha} = -\frac{\rho}{8}\bar{\eta}\gamma^\alpha \eta$$
$$(\Box + m^2)G^{A\alpha} = -\frac{\rho}{8}\bar{\eta}\gamma^5\gamma^\alpha \eta$$

Il est intéressant de souligner dès à présent un point de concordance entre nos deux approches. La décomposition ci-dessus (DS) fait clairement apparaitre des champs quadri dimensionnels polaires G_α^V et axiaux G_α^A et qui s'avéreront reliés respectivement aux potentiels électrique de G.L. notés V et $\overrightarrow{A}$ et magnétique de G.L.notés W' et $\overrightarrow{B}'$. Comme Maxwell l'avait découvert une différence essentielle entre l'électricité et le magnétisme est que la première est polaire et le second est axial

Contrairement à leur formulation habituelle, les deux théories permettent d'écrire les équations de Maxwell sous une forme similaire pour le champ électrique et le champ magnétique. Alors que les équations de Maxwell ne contenant pas de monopole magnétique sont écrites sous une forme faisant apparaitre une nette différence entre le champ électrique et le champ magnétique.

Dans ce qui suit, on a adopté les notations de G.L. là où les deux théories en présence sont en parfait accord, et conservé celles de D.S. là ou un léger doute subsiste.

En ce qui concerne le **photon électrique** posant :

$$E^k = F_1^{k0} = -\partial_k G^{V0} - \partial_0 G^{Vk}$$
$$H^k = \tilde{F}_1^{k0} = \epsilon^{kjl}\partial_j G^{Vl}$$

Et donc si on note :

$$G^{V0} = A^0 \equiv V \qquad ; \qquad G^{Vk} = A^k$$
$$G^{V\mu} = A^\mu$$

Ce qui conduit naturellement, et sans hypothèses supplémentaires aux deux équations :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} V - \partial_0 \overrightarrow{A}$$
$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}$$

Notons que ces équations, tout comme c'est le cas pour GL, découlent du formalisme. Pour DS elles résultent de l'application des équations de Euler Lagrange au lagrangien proposé.

Les expressions obtenues par DS donnent également lieu aux relations suivantes :

$$\partial_0 \overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{H} + \frac{i}{2} \overrightarrow{\nabla} \phi + \frac{\rho}{8} \bar{\eta} \overrightarrow{\gamma} \eta - \mathbf{m^2} \overrightarrow{A}$$
$$-\partial_0 \overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}$$
$$\overrightarrow{\nabla} . \overrightarrow{E} = \frac{i}{2} \partial_0 \phi - \frac{\rho}{8} \bar{\eta} \gamma^0 \eta + \mathbf{m^2 V}$$
$$\overrightarrow{\nabla} . \overrightarrow{H} = 0$$
$$\partial_\alpha A^\alpha = -\frac{i}{2} \phi$$

ainsi qu'aux contraintes :

$$(\Box - m^2) V = -\frac{\rho}{8} \bar{\eta} \gamma^0 \eta$$
$$(\Box - m^2) \overrightarrow{A} = -\frac{\rho}{8} \bar{\eta} \overrightarrow{\gamma} \eta$$

Par ailleurs le scalaire ϕ de D.S. et le scalaire I_1 de G.L. se ressemblent beaucoup. Ils sont même identiques si on adopte la jauge de Lorentz puisqu'alors : .

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 = -\frac{i}{2} \phi \Longrightarrow \phi = 0$$

DS obtient également :

$$\partial_\alpha A^\alpha = \partial_0 V + \overrightarrow{\nabla} . \overrightarrow{A} = -\frac{i}{2} \phi$$

qui coïncide avec le résultat de GL si on choisit $\phi = 0$.

Le scalaire ϕ obéit à l'équation de Klein Gordon suivante :

$$(\Box - m^2)\phi = \frac{i\rho}{4}\partial_\alpha(\bar\eta\gamma^\alpha\eta)$$

Il y a une très grande concordance entre nos résultats, puisqu'il ne faut pas considérer, pour les comparer, les termes résultant de l'interaction des particules de spin 1 avec la particule représentée par le symbole η de spin 1/2, ajoutée dans le formalisme lagrangien de DS.

La différence qui existe ici entre les théories de G.L. et D.S.vient du fait que D.S. n'obtient pas d'équations pour les I_2, W et $\overrightarrow{B}$ de G.L., ce qui ne semble pas fondamental en ce qui concerne l'existence d'un monopole magnétique, ce qui est notre propos ici.

En ce qui concerne le **photon magnétique** je pose :

$$\begin{aligned} H'^k &= iF_2^{0k} = \partial^0(iG^{Ak}) + \partial^k(iG^{A0}) \\ E'^k &= i\tilde F_2^{0k} = \epsilon^{kjl}\partial_j(iG^{Al}) \end{aligned}$$

Donc en notant

$$i\ G_A^\alpha = \begin{pmatrix} iG_A^0 \\ iG_A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W' \\ B'^k \end{pmatrix}$$

j'obtiens :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H}' &= \partial^0\overrightarrow{B}' + \overrightarrow{\nabla}W' \\ \overrightarrow{E}' &= \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{B}' \end{aligned}$$

ainsi que les équations :

$$\begin{aligned} \partial_0\overrightarrow{E}' &= \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{H}' \\ \partial_0\overrightarrow{H}' &= -\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E}' - \frac{1}{2}\overrightarrow{\nabla}\phi^A - \frac{i\rho}{8}\bar\eta\gamma^5\overrightarrow{\gamma}\eta - m^2\overrightarrow{B}' \\ \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E}' &= 0 \\ \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{H}' &= -\frac{1}{2}\partial^0\phi^A + \frac{i\rho}{8}\bar\eta\gamma^5\gamma^0\eta + m^2W' \end{aligned}$$

Par ailleurs, j'obtiens également :

$$\partial^\alpha(iG_\alpha^A) = \partial^0W' + \partial^kB'_k = -\frac{1}{2}\phi^A$$

Le pseudo scalaire ϕ^A obéit à l'équation de Klein Gordon

$$(\Box + m^2)\phi^A = \frac{i\rho}{4}\partial_\alpha(\bar{\eta}\gamma^5\gamma^\alpha\eta)$$

Que ce soit dans l'approche de GL ou celle de DS ces équations ne sont en aucun cas surajoutées mais découlent des équations (GL) ou du lagrangien de départ (DS).

Nous sommes également d'accord pour dire que la matrice γ^5 échange électricité et magnétisme.

Le groupe d'équations ci-dessous permet de voir que les champs électrique et magnétique sont duals l'un de l'autre, et de souligner le rôle fondamental commun aux deux approches, de la matrice γ^5 puisque c'est elle qui permet d'échanger électricité et magnétisme. La partie de $F_{\alpha\beta}$ contenant G^V (relié au potentiel électrique) a en effet été obtenue en calculant la trace de 4 matrices de Dirac et celle contenant G^A (relié au potentiel magnétique) en calculant la trace de ces mêmes matrices multipliées par la matrice γ^5 :

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} &= (\partial^\alpha G^{V\beta} - \partial^\beta G^{V\alpha}) + i\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_\mu G^A_\nu \\ \tilde{F}^{\alpha\beta} &= \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_\mu G^V_\nu - i(\partial^\alpha G^{A\beta} - \partial^\beta G^{A\alpha}) \end{aligned}$$

Les contraintes obtenues dans le formalisme de D.S. sont donc les suivantes :

$$\begin{aligned} (\Box + m^2)W' &= -\frac{i\rho}{8}\bar{\eta}\gamma^5\gamma^0\eta \\ (\Box + m^2)\overrightarrow{B}' &= -\frac{i\rho}{8}\bar{\eta}\gamma^5\overrightarrow{\gamma}\eta \end{aligned}$$

Le pseudo scalaire ϕ de D.S. obéit lui aussi à une équation de Klein Gordon, à savoir :

$$(\Box + m^2)\phi^A = \frac{i\rho}{4}\partial^\alpha(\bar{\eta}\gamma^5\gamma_\alpha\eta)$$

Le but ayant toujours été pour D.S. d'obtenir *in fine* la formulation communément admise et énoncée par exemple par Jackson. On a :

$$\begin{aligned} J^0_m &= -\frac{1}{2}\partial_0\phi^A + \frac{i\rho}{8}\bar{\eta}\gamma^5\gamma^0\eta + m^2W' \\ \overrightarrow{J}_m &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\nabla}\phi^A + \frac{i\rho}{8}\bar{\eta}\gamma^5\overrightarrow{\gamma}\eta + m^2\overrightarrow{B}' \end{aligned}$$

Ou encore en adoptant une notation quadridimensionnelle :

$$(J_m)^\alpha = -\frac{1}{2}\partial^\alpha \phi^A + \frac{i\rho}{8}\bar{\eta}\gamma^5\gamma^\alpha\eta + m^2 B'^\alpha$$

Il est important de noter que les courants (D.S.) sont conservés, que ce soit le courant électrique :

$$\begin{aligned} J_e^\alpha &= \frac{1}{2}\partial^\alpha \phi - \frac{\rho}{8}\bar{\eta}\gamma^\alpha\eta + m^2 A^\alpha \\ \partial_\alpha J_e^\alpha &= 0 \end{aligned}$$

ou le courant magnétique :

$$\begin{aligned} J_m^\alpha &= -\frac{1}{2}\partial^\alpha \phi^A + i\frac{\rho}{8}\bar{\eta}\gamma^5\gamma^\alpha\eta + m^2 B'^\alpha \\ \partial_\alpha J_m^\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Je me permettrai une dernière remarque qui est la suivante : si, avec mon approche, je veux obtenir les équations usuelles existantes (photon) ou postulées (monopole), je dois avoir :

- pour le photon : $\partial^\alpha \phi = 2im^2 G^{V\alpha}$

  d'où on tire : $(\Box - m^2)\phi = 0$

  qui à son tour conduit à : $\partial_\alpha J_e^\alpha = 0 = -\frac{\rho}{8}\partial_\alpha(\bar{\eta}\gamma^\alpha\eta)$

  c'est-à-dire à l'équation de conservation usuelle.
- pour le monopole : $\partial^\alpha \phi^A = 2im^2 G^{A\alpha}$

  d'où on tire : $(\Box + m^2)\phi^A = 0$

  qui à son tour conduit à $\partial_\alpha J_m^\alpha = 0 = i\frac{\rho}{8}\partial_\alpha(\bar{\eta}\gamma^5\gamma^\alpha\eta)$

  c'est-à-dire à l'équation de conservation usuellement postulée.

Il faut noter que DS obtient moins d'équations puisqu'au départ elle a exactement la moitié des champs que ceux engendrés par la théorie de GL. De plus la théorie de DS ne prend en compte que des particules de spin 1 alors que celle de GL inclut celles de spin 0.

Pour conclure voici 2 tableaux comparatifs entre les approches de GL, DS et la formulation communément admise et tirée du livre de Jackson.

Appendice 1: Le photon électrique

GL	DS	"Jackson"
$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \partial^0 \vec{A}$	$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \partial^0 \vec{A}$	$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \partial^0 \vec{A}$
$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$	$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$	$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$
$\partial_0 \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H} + m_0^2 \vec{A}$	$\partial_0 \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - m^2 \vec{A} + \frac{i}{2} \vec{\nabla} \phi + \frac{\rho}{8} \bar{\eta} \vec{\gamma} \eta$	$\partial_0 \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H} + e \bar{\eta} \vec{\gamma} \eta$
$\partial_0 \vec{H} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$	$\partial_0 \vec{H} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$	$\partial_0 \vec{H} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$
$\vec{\nabla} . \vec{E} = -m_0^2 V$	$\vec{\nabla} . \vec{E} = m^2 V + \frac{i}{2} \partial^0 \phi - \frac{\rho}{8} \bar{\eta} \gamma^0 \eta$	$\vec{\nabla} . \vec{E} = -e \bar{\eta} \gamma^0 \eta$
$\vec{\nabla} . \vec{H} = 0$	$\vec{\nabla} . \vec{H} = 0$	$\vec{\nabla} . \vec{H} = 0$
aussi	aussi	
$\partial_0 V + \vec{\nabla} . \vec{A} = 0$	$\partial_0 V + \vec{\nabla} . \vec{A} = -\frac{i}{2} \phi$	Rq
$I_1 = 0$	$(\Box - m^2) \phi = \frac{i\rho}{4} \partial_\alpha (\bar{\eta} \gamma^\alpha \eta)$	$J_e^\alpha = \begin{cases} J^0 = -e \bar{\eta} \gamma^0 \eta \\ \vec{J} = -e \bar{\eta} \vec{\gamma} \eta \end{cases}$
+ relations sur I_2, W, $\vec{B}$		

Appendice 2: Le photon magnétique

GL	DS	"Jackson"
$\vec{H}' = \vec{\nabla} W' + \partial_0 \vec{B}'$	$\vec{H}' = \vec{\nabla} W' + \partial_0 \vec{B}'$	J_m^0 pseudo scalaire
$\vec{E}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}'$	$\vec{E}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}'$	$\vec{J}_m$ pseudo vecteur
$\partial_0 \vec{H}' = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}' - m_0^2 \vec{B}'$	$\partial_0 \vec{H}' = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}' - m^2 \vec{B}' - 1/2 \vec{\nabla} \phi^A - i \frac{\rho}{8} \bar{\eta} \gamma^5 \vec{\gamma} \eta$	$\partial_0 \vec{H}' = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}' - \vec{J}_m$
$\partial_0 \vec{E}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{H}'$	$\partial_0 \vec{E}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{H}'$	$\partial_0 \vec{E}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{H}'$
$\vec{\nabla} . \vec{H}' = m_0^2 W'$	$\vec{\nabla} . \vec{H}' = m^2 W' - 1/2 \partial^0 \phi^A + i\rho/8 \bar{\eta} \gamma^5 \gamma^0 \eta$	$\vec{\nabla} . \vec{H}' = J_m^0$
$\vec{\nabla} . \vec{E}' = 0$	$\vec{\nabla} . \vec{E}' = 0$	$\vec{\nabla} . \vec{E}' = 0$
en plus	en plus	
$\partial_0 W' + \vec{\nabla} . \vec{B}' = 0$	$\partial_\alpha B'^\alpha = \partial^0 W' + \vec{\nabla} . \vec{B}' = -1/2 \phi^A$	
$I'_e = 0$	$(\Box + m^2) \begin{pmatrix} W' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} = -i\rho/8 \bar{\eta} \gamma^5 \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \vec{\gamma} \end{pmatrix} \eta$	
+ relations sur I'_1 , V' , $\vec{A}'$	$(\Box + m^2) \phi^A = -i\rho/8 \partial_\alpha \left(\bar{\eta} \gamma^5 \gamma^\alpha \eta \right)$	

Remerciements. L'auteur tient tout particulièrement ici à vivement remercier Michel Karatchentzeff et Daniel Fargue pour leurs précieux commentaires.

Références

[1] Lochak G. *Une nouvelle théorie du monopole magnétique, avec un aperçu sur les effets physiques, chimiques biologiques et nucléaires*, AFLB **33** no 1-2, (2008) ; *Le monopole magnétique n'est plus un mythe! il a une équation, des expériences et il prévoit des applications* Fondation Louis de Broglie.

[2] T. Borne, G. Lochak, H. Stumpf, *Non perturbative Quantum field theory and the Structure of matter* Kluwer Academic publish. (2001).

[3] P. A. M. Dirac, Proc. Royal Soc. London **A133**, 60 (1931); Phys. Rev. **74**, 817 (1940).

[4] D. Spehler, J. Math. Phys. **31**, 423 (1990).

[5] G. C. Marques and D. Spehler, J. Math. Phys. **37**, 174 (1996); Mod. Phys. Lett. **A13**, 553 (1998). Int. J. Mod. Phys. **A14**, 5121 (1999); Int. J. Mod. Phys. **A18**, No. 14, 2457 (2003).

[6] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley, New York, 1975).