

## Non-linéarité et spectre de *particle-like*

PH. LERUSTE

ancien membre de LPNHE – Sorbonne Université

RÉSUMÉ. Un formalisme non-linéaire est construit en ajoutant le terme  $(\lambda m^2/2)(\psi^*\psi)^2$  au lagrangien de Klein-Gordon. Seules sont étudiées les solutions à symétrie sphérique. Parmi l'ensemble infini de ces solutions, seules un nombre fini d'entre elles possède une énergie finie, celles-ci sont appelées *particle-like*. L'ensemble structuré de ces solutions est dénommé *grappe* et fournit en particulier un spectre de masse.

Est à souligner que :

- chaque *particle-like* vérifie le Principe de Double Solution de de Broglie.
- il y a *discrétisation* d'un paramètre.

### 1 Introduction

Nous présentons ici une approche des particules élémentaires fondée sur la description par un champ classique (et non pas quantique) de *corpuscules* ou *particles-like*. Cette approche repose sur deux publications anciennes dont nous rappelons ci-dessous l'essentiel du contenu d'un point de vue actualisé. Nous rappelons donc les publications de :

- Finkelstein et al. [1]

En 1951 ces auteurs publient un article où ils introduisent un lagrangien non-linéaire pour représenter une particule élémentaire ou *particle-like*. Une contrainte essentielle : le champ représentant la particule est nul à l'infini, l'énergie de ce champ est finie, l'ensemble des solutions est dénombrable.

- Glasko et al. [2]

Un article paru à Moscou en 1957 et donnant les valeurs numériques attachées à cette théorie.

Sommairement résumé : le lagrangien utilisé est non-linéaire, il a la même forme que celui du boson de Higgs [3], [4] mais certains signes diffèrent, et surtout les conditions utilisées pour quantifier les masses des particules sont différentes.

## 2 Finkelstein et al

Dans leur article Finkelstein *et al.* [1] étudient en particulier le lagrangien non-linéaire :

$$\begin{cases} L = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - m^2(\psi^* \psi) + (\lambda/2)m^2(\psi^* \psi)^2 \\ m > 0 \\ \lambda > 0 \end{cases} \quad (1)$$

où  $\vec{x}$  est un quadrivecteur de l'espace-temps et  $\psi(\vec{x})$  est un champ scalaire classique (nous avons utilisé ici les notations de la référence [2]).

L'équation d'Euler déduite de (1) est

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi + m^2 \psi - \lambda m^2 (\psi^* \psi) \psi = 0 \quad (2)$$

Parmi les solutions de cette équation, Finkelstein *et al.* définissent des *particle-like* au repos comme

- ayant une fréquence  $\epsilon$ ,
- étant de symétrie sphérique, dépendant de la seule variable radiale  $r$ ,
- étant d'amplitude nulle pour  $r = \infty$ .

Une solution de type *particle-like* est donc de la forme

$$\psi = \exp(iet) u(r) \quad (3)$$

En introduisant (3) dans (2) on aboutit à l'équation différentielle

$$d^2u/dr^2 + (2/r)du/dr + [\epsilon^2 - m^2]u + \lambda m^2 u^3 = 0 \quad (4)$$

### 2.1 Equation réduite

En définissant deux nouvelles variables,  $\rho$  et  $y$ , définies par les formules ci-dessous

$$\begin{cases} u = \sqrt{(m^2 - \epsilon^2)/(\lambda m^2)} y \\ r = \rho / \sqrt{m^2 - \epsilon^2} \end{cases} \quad (5)$$

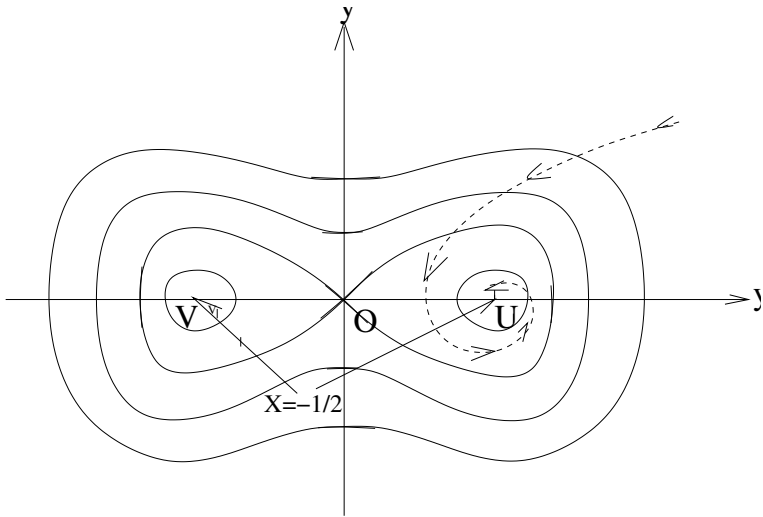


FIGURE 1 -

Courbes  $X(y, y') = a^2$ . Elles entourent les points  $U$  et  $V$  où  $X$  est minimal et prend la valeur  $-1$ . En pointillé une courbe solution de l'équation (6).

on obtient l'équation réduite (6)

$$d^2y/d\rho^2 + 2/\rho dy/d\rho - y + y^3 = 0 \tag{6}$$

que nous re-écrivons en posant  $y' = dy/d\rho$  :

$$y'' + 2y'/\rho - y + y^3 = 0$$

En multipliant par  $y'$ , cette équation peut être partiellement intégrée une fois et l'on obtient :

$$y'^2 - y^2 + y^4/2 = a^2 - 2 \int y'^2 d\rho/\rho$$

où  $a$  est une constante d'intégration. Posons :

$$X \equiv y'^2 - y^2 + y^4/2 \tag{7}$$

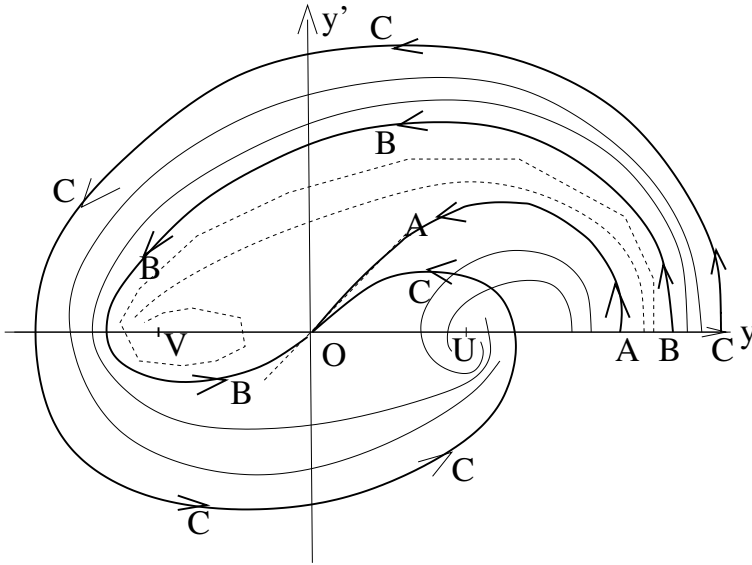


FIGURE 2 – *Ensemble de solutions.* Quand  $r \rightarrow \infty$  la plupart des trajectoires vont s’rouler autour des pointa  $U$  et  $V$ . et forment des sous-ensembles de solutions séparés par les courbes  $A, B, C, \dots$ . Ces courbes  $A, B, C, \dots$  ont pour limite le point  $O(0,0)$ . Ce sont elles qui définissent les *particles-like*.

Les courbes  $X = a^2$  sont représentées en figure (1). Compte tenu de (7), l’équation (6) peut s’écrire :

$$dX/d\rho = -2y'^2/\rho \quad (8)$$

quand  $\rho$  croit les courbes-solution doivent décroître par rapport au réseau  $X = a^2$  ainsi qu’il est montré sur la figures (1).

Rappelons ici les résultats essentiels de la référence [1]. En intégrant l’équation (6) à partir d’un point  $(y = y_0, y' = 0)$  (donc situé sur l’axe  $\vec{y}$  entre 0 et  $l'(\infty)$ ),  $X$  décroît et s’approche généralement des points  $U(+1, 0)$  ou  $V(-1, 0)$  (figure 2).

- Toutefois il existe des solutions particulières  $A, B, C, \dots$  telles que
- elles sont solutions de l’équation réduite (6),
  - elles convergent vers  $O = (0, 0)$ ,

- elles ne divergent donc pas pour  $r \rightarrow \infty$ ,
- nous verrons qu'elles ont une énergie finie,
- elles ont la propriété de séparer les autres solutions en familles, familles qui.s'approchent alternativement de  $U$  et  $V$ .

La fonction  $y(r)$  pour  $m$  et  $\lambda$  quelconques est donnée par les formules (5) ; ce sont des solutions de l'équation(4). Les fonctions  $y(r)$  correspondant aux solutions A, B, C, ... décrivent les *particle-like* de Finkelstein.

### 3 Glasko et al

#### 3.1 particularité de cette publication

Cet article.du *journal de Physique théorique et expérimentale* [2] est paru à Moscou en 1957 dans des conditions politiques particulières. Considéré comme "théorie de droite", "sujet inintéressant" —cela selon une vraisemblable instruction de l'Académie des Sciences de l'URSS [5], [6]. L'article est paru cependant car il soulignait l'intérêt de l'ordinateur de l'Université pour résoudre numériquement une équation différentielle non-linéaire et calculer les grandeurs y afférentes.

Cet article suit la ligne de Finkelstein, en particulier il utilise le lagrangien (1). Ne sont traitées que les solutions à symétrie sphérique ce qui conduit à une équation différentielle dont la variable est le rayon  $r$  (4). Cette équation sera traitée ci-dessous par une méthode similaire. Les premières solutions de cette équation (4) sont calculées, les grandeurs qui les caractérisent sont tabulées. De plus l'apport théorique est l'introduction la relation  $W = h\nu$ , ce qui a pour effet potentiel de réduire le nombre de paramètres indépendents. Ce point sera également évoqué ci-dessous.

#### 3.2 densités

Les densités de charge et d'énergie font intervenir les quantités intégrales auxiliaires :

$$\begin{cases} I = \int_0^\infty \rho^2 y^2 d\rho \\ J = \int_0^\infty \rho^2 y^4 d\rho \end{cases} \quad (9)$$

Les valeurs numériques  $I$  et  $J$  ont été tabulées dans la référence [2] et sont reproduite ci-dessous.

TABLE I					
solution	a	b	c	d	e
$I$	1.53	9.4	27.7	63.6	212.8
$J$	5.5	39.4	123.	255.	476.

### 3.3 densité de charge

La théorie des champs définit le courant  $j_\mu$  selon :

$$j_\mu = i\epsilon[\partial L/\partial(\partial_\mu\psi) - \partial L/\partial(\partial_\mu\psi^*)] \quad (10)$$

on trouve :

$$j_\mu = i\epsilon(\psi^*\partial_\mu\psi - \psi\partial_\mu\psi^*)$$

Et avec la définition (3) de  $\psi$  en fonction de  $u(r)$  :

$$j_0 = \epsilon u^2(r) \quad (11)$$

puis avec la définition (5) de  $u(r)$  en fonction des variable réduites  $y(\rho)$  :

$$j_0 = \epsilon/(\lambda m^2 \sqrt{m^2 - \epsilon^2}) y^2(\rho)$$

Soit la charge  $Q$  de la *particle-like*. On peut évaluer numériquement cette charge totale :

$$Q = 4\pi \int_0^\infty j_0(r) r^2 dr = 4\pi\epsilon/(\lambda m^2 \sqrt{m^2 - \epsilon^2}) I \quad (12)$$

### 3.4 densité d'énergie

La théorie lagrangienne permet également de définir la densité d'énergie  $T_{00}$  du champ  $\psi$  ) :

$$2T_{00} = \partial L/\partial(\partial_0\psi^*) \partial_0\psi + \partial L/\partial(\partial_0\psi) \partial_0\psi^* - Lg_{00}$$

En utilisant la valeur de  $\psi$  définie par (3) et la fonction  $y(\rho)$  définie par (5) on aboutit à :

$$E = 4\pi\epsilon^2 \int y^2 \rho^2 d\rho + 4\pi(\lambda m^2/4) \int y^4 \rho^2 d\rho$$

soit

$$E = 4\pi\epsilon^2 I + \pi\lambda m^2 J \quad (13)$$

### 3.5 relation de Planck

L'article cité utilisait aussi la relation de Planck qui introduisait une relation entre les 3 paramètres  $m$ ,  $\epsilon$  et  $\lambda$ . Nous utiliserons cette relation ci-dessous au paragraphe 6.

## 4 Solution présente

La fonction à intégrer est  $y(\rho)$  solution de (7). Les calculs sont présentés en appendice, nous nous bornons ici à en présenter les résultats.

Comme nous l'avons vu, il existe une suite de solutions. : A, B, C... correspondant chacune à une forme de l'amplitude entrainant une énergie finie. Les résultats essentiels figurent dans le tableau ci-dessous. On y trouve :

- le paramètre d'initialisation  $\gamma$  (voir paragraphe 8-Annexe).
- l'amplitude  $y_0$  de la fonction  $y(\rho)$  pour  $\rho = 0$ ,
- le moment  $I$  d'ordre 2 de la fonction  $y(\rho)$ ,
- le moment  $J$  d'ordre 4 de la fonction  $y(\rho)$ .

TABLE II				
paramètres	A	B	C	D
$\gamma$	2.71	17.1	83.4	368.
$y_0$	0.866	2.82	5.85	9.95
I	1.50	9.46	28.6	63.5
J	6.02	37.9	115	257

Les moments d'ordre 2 et 4 de la fonction  $y(\rho)$  ont été définis par la formule (9) et seront utilisés au paragraphe suivant. Leurs valeurs présentent un accord de l'ordre du pourcent avec les valeurs anciennement calculées (ref.[2]).

## 5 Double Solution

Il est facile de voir que la fonction  $\phi(t)$  :

$$\phi(t) = A \exp(i\epsilon t) \tag{14}$$

est solution de l'équation non-linéaire (ref 2) que nous rappelons ici :

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi - \lambda m^2 (\phi^* \phi) \phi = 0$$

cela ssi  $\epsilon < m$  et que la constante  $A$  ait pour valeur :

$$A = \pm \sqrt{(m^2 - \epsilon^2)/\sqrt{(\lambda m^2)}} \quad (15)$$

A cette fonction  $\phi(t)$

- correspond (3) une fonction :  $u(r) = A$ ,
- et selon (4) :  $u(r) = A = \pm \sqrt{(m^2 - \epsilon^2)/\sqrt{(\lambda m^2)}}$ ,
- enfin selon (5) la fonction  $y(\rho)$  déduite de  $u(r)$  est  $y(\rho) = \pm 1$ .

Les trajectoires de ces deux dernières solutions, dans le diagramme des solutions de l'équation non-linéaire (figure 2), se réduisent aux courbes-points situées en U et en V.

Par ailleurs ces fonctions  $\phi(t)$  — définies par (14) et vérifiant (2)— sont aussi solutions de l'équation l'équation :

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \epsilon^2 \phi = 0 \quad (16)$$

Nous avons ainsi un couple  $(\psi(t), \phi(t))$ , de même phase, chacune solution de l'équation non-linéaire (2). La première est dotée d'un module nul à l'infini et décrivant la "forme" de la *particle-like*. La seconde est dotée d'un module constant ; elle est aussi solution l'équation de Klein-Gordon de cette *particle-like*.

Cette association vérifie le *principe de Double Solution* de Louis de Broglie, énoncé selon [7] :

« ... toute solution continue [ $\phi$ ] des équations de la Mécanique ondulatoire [est] doublée ... par une solution à singularité en général mobile  $\mathbf{u}$  (le corpuscule!) et ayant même phase que la solution  $\phi$  ».

Cela en identifiant le mot *forme* d'une part avec le mot *singularité* de l'autre.

## 6 Spectre de Particules

### 6.1 Relation de Planck

L'onde porteuse (3) a une période  $T$  telle que  $\epsilon T = 2\pi$ , soit  $T = 2\pi/\epsilon$ . Sa fréquence est donc  $\nu = 1/T = \epsilon/2\pi$ . Les *particle-like* ont une masse  $E$  donnée par (13) qui satisfait la relation de Planck :

$$E = h\nu = h \epsilon/2\pi = \hbar \epsilon$$

soit ici :

$$\hbar \epsilon = 4\pi\epsilon^2 I + \pi\lambda m^2 J \quad (17)$$



**Remarque**

Nous venons d'introduire explicitement la constante  $\hbar$ . Il nous faut en connaître la valeur dans le cadre du formalisme qui est utilisé. Nous choisissons *a priori* un système de grandeurs de base tel que :

$$c = 1$$

$$\hbar = 1$$

Dès lors l'équation (17) devient :

$$\epsilon = 4\pi\epsilon^2 I + \pi \lambda m^2 J \quad (18)$$

**6.2 Analyse des solutions**

Partant de la fonction de Lagrange (1) qui dépend de *deux paramètres*  $m$  et  $\lambda$ , nous avons déterminé des solutions qui forment une suite de types A, B, C,... chacun défini par un indices  $k$  et par les valeurs numériques des moments  $I_k$  et  $J_k$ . L'équation (18) prend la forme d'une suite d'équations indicées par  $k$  :

$$\epsilon = 4\pi\epsilon^2 I_k + \pi (\lambda m^2) J_k \quad (19)$$

Les valeurs de  $I_k$  et de  $J_k$  figurent dans la Table II. Ces équations admettent chacune 2 solutions ssi leur discriminant est positif, i.e. :

$$\Delta_k = 1 - 16\pi^2 (\lambda m^2) I_k J_k > 0. \quad (20)$$

(il n'y a pas de sommation sur  $k$ ). Les valeurs de  $\epsilon$  sont alors définies par :

$$8\pi I_k \epsilon = 1 \pm \sqrt{(\Delta_k)} \quad (21)$$

Un cas particulier se présente si, pour une valeur déterminée de  $k$ , le discriminant (19) est nul. On obtient alors une solution double pour un point de contact avec la droite  $\lambda m^2 = 1/(16\pi^2 I_k J_k)$ .

Sur la figure (3) il apparait également que, selon la valeur de  $\lambda m^2$ , plusieurs paires de *particle-like* peuvent se présenter sous la forme d'une *grappe*. Précisément ces particules forment un ensemble dont les éléments sont inter-connectés et dépendent des paramètres  $m$  et  $\lambda$  du lagrangien (1). Dans un *fit* le changement de masse pour une particule modifie toutes les autres.

En ce qui concerne l'ordre de grandeur des résultats, considérons à nouveau la figure (3). A titre d'exemple, nous y avons tracé la droite

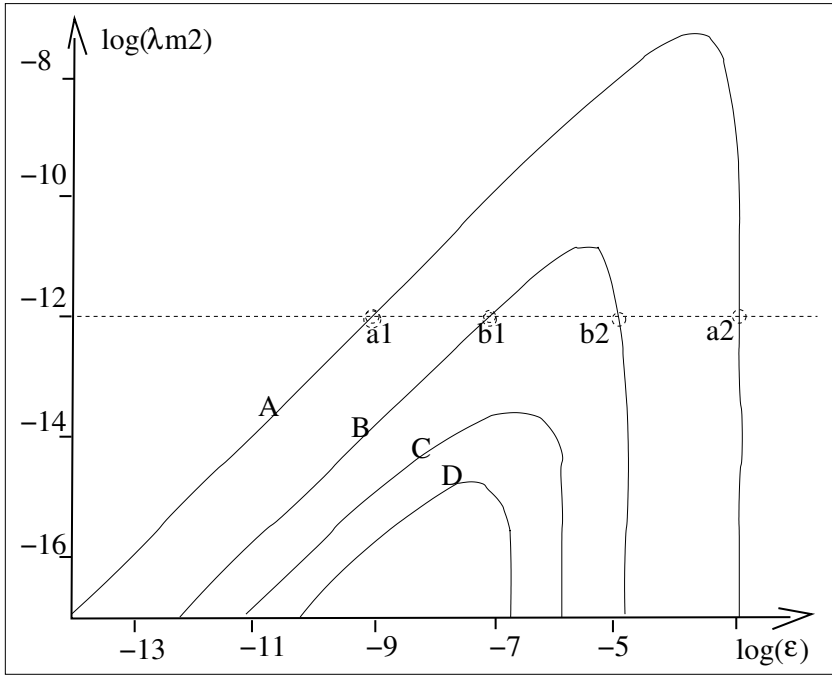


FIGURE 3 –

Courbes  $A, B, \dots$  établies pour  $k = 1, 2, 3, 4$ . —  $\text{Logn}(\lambda m^2)$  figure en ordonnée et  $\text{Logn}(\epsilon)$  figure en abscisse. Les solutions sont données par les intersections du faisceau de courbes  $A, B, \dots$  avec une droite d'ordonnée constante. Une telle droite a été tracée en pointillé. Pour la valeur de  $\lambda m^2$  à laquelle elle correspond, sont définies 4 *particle-like*  $a_1, b_1, b_2, a_2$ .

d'ordonnée  $\text{Logn}(\lambda m^2) = -12$ . Entre les abscisses des points  $a_1$  et  $a_2$ , une différence de l'ordre de 6 unités, soit un rapport des fréquences  $\epsilon$  de l'ordre de 400, donc ce même rapport pour les masses des *particle-like*. Avec un tel ordre de grandeur, il est plus qu'improbable que le spectre des particules élémentaires connues puisse être représenté par le lagrangien (1) avec le choix de solutions à symétrie sphérique, ce qui est l'objet de la présente étude.

## 7 Conclusion

Nous avons présenté ici un formalisme obéissant à une mathématique *non-linéaire*. Nous en avons rappelé l'origine lointaine et évoqué les causes externes de l'arrêt de son développement.

Ici nous en avons repris l'étude. Quelques aspects caractéristiques ont été explicités, en particulier :

- Nous nous sommes limités aux solutions à symétrie sphérique.
- Parmi l'ensemble non-dénombrable des solutions, la condition "*l'énergie des solutions doit être finie*" définit un sous-ensemble dénombrable de solutions. Cette propriété est à l'origine de quantification des masses.
- Cette dernière propriété se manifeste par le fait que lagrangien (1) dépend de 2 paramètres continus ( $m$  et  $\lambda$ ) mais que la solution (19) dépend d'un paramètre continu et d'un paramètre entier (respectivement  $\lambda m^2$  et  $k$ ). Nous dirons qu'il y a eu *discrétisation* d'un paramètre.
- Ces solutions, dites *particle-like*, forment un ensemble dont les éléments sont inter-connectés, dépendant les uns des autres. Nous avons appelé *grappe* cet ensemble. Une telle propriété ne se rencontre pas dans les théories linéaires.
- Il est apparu un autre sous-ensemble particulier  $E$  de solutions. Il y a correspondance bi-univoque entre chaque élément de  $E$  et une *particle-like* ; leurs phases sont deux à deux identiques. Chaque élément de  $E$  est solution d'une équation linéaire, à savoir l'équation de Klein-Gordon de la *particle-like* libre. Ce dernier énoncé entre dans le cadre de la *Théorie de la double solution* de Louis de Broglie [7].

Le développement de la Mécanique Quantique et ses succès ont, depuis 60 ans, occulté l'intérêt d'une approche telle que celle nous venons de présenter. Cette dernière, pourtant, est pourvue de possibilités, nous venons de présenter celles qui nous sont apparues.

## 8 Annexe

### Intégration

L'équation à intégrer est (6), à savoir :

$$d^2y/d\rho^2 + 2/\rho dy/d\rho - y + y^3 = 0$$

Il s'avère que la technique d'intégration s'adapte mieux à la fonction :

$$z = \rho y \quad (22)$$

Celle-ci vérifie en particulier :

$$\begin{cases} d^2 z/d\rho^2 - z + z^3/\rho^2 = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Vers la limite  $\rho \rightarrow \infty$  le dernier terme de (23) devient négligeable et l'équation se réduit à :

$$d^2 z/d\rho^2 - z = 0$$

dont les solutions sont :

$$z = \alpha \exp(-\rho) + \beta \exp(+\rho)$$

Nous désirons que  $z \rightarrow 0$  pour  $\rho$  infini ; seules les solutions avec  $\beta = 0$  conviennent.

Nous avons utilisé la variable d'intégration :

$$\chi = \exp(-\rho) \quad (24)$$

Cette variable  $\chi$  est une fonction décroissante de  $\rho$  ; les figures (4) et (5) sont donc orientées de façon inhabituelle :  $\rho = 0$  à droite et  $\rho = \infty$  à gauche.

L'équation à intégrer prend la forme :

$$d^2 z/d\chi^2 = -1/\chi \, dz/d\chi + (z - z^3/\rho^2)/\chi^2 \quad (25)$$

Nous avons intégré cette équation  $\chi$  variant de 0 à 1 en initialisant le calcul à partir de la forme limite :

$$z = \gamma \exp(-\rho) = \gamma \chi \quad (26)$$

Les solutions ainsi élaborées admettent une forme qui dépend du paramètre  $\gamma$ . Il s'agit de déterminer les valeurs de  $\gamma$ , telles que la valeur de  $z$  pour  $\chi = 0$  soit nulle, i.e.  $z(0) = 0$  (cf (23)). On obtient ainsi différentes solutions A, B, C, D,... qui présentent 1 arceau, 2 arceaux, 3 arceaux... (voir figure (4)).

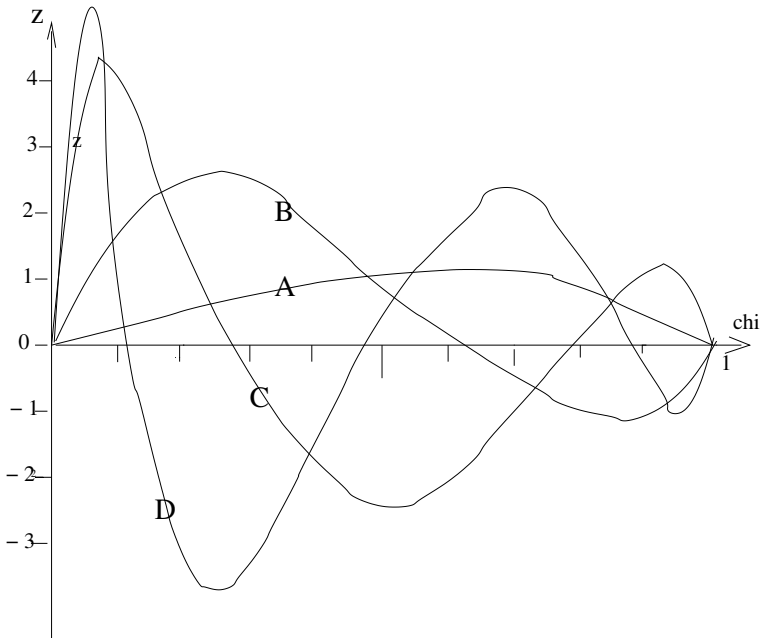


FIGURE 4 –

Les courbes A, B, C, D sont les premières solutions de l'équation (25) qui s'annulent en  $\chi = 0$  et en  $\chi = 1$  (voir le texte).

En figure (5) nous avons représenté les fonctions  $y$  (cf (7)) en fonction de  $\chi$ .

Les valeurs numériques de  $I, j, \gamma$ , résultats de cette intégration, figurent dans le tableau du paragraphe 4.

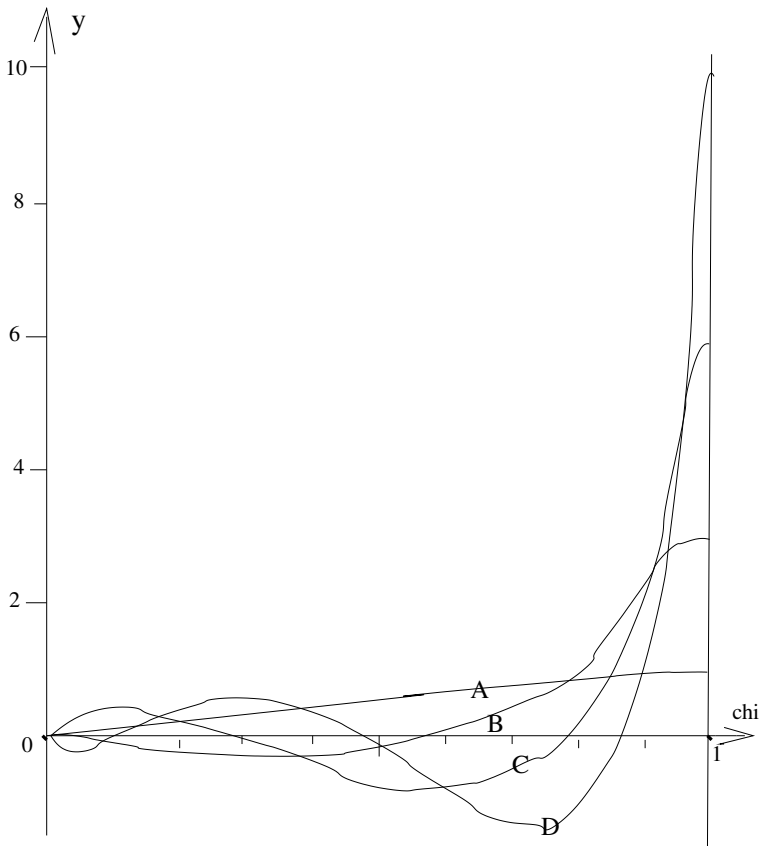


FIGURE 5 – Fonction  $y = y(\chi)$  courbes A et C – ; fonction  $y = -y(\chi)$  courbes B et D.

## Références

- [1] R.Finkelstein R.LeLevier, M.Ruderman  
Non linear Spinor Fields.  
Phys.Rev. 83, p 326 (July.15 1951)
- [2] V.B.Glasko, Ph.Leruste, Ia.P.Terletski, S.F.Shushurin  
An investigation of particle-like solutions of a non-linear scalar field equation.  
JETP 35 452-457 (August 1958)

- Soviet Physics JETP 35(8) number 2 Feb 1959
- [3] P.W.Higgs  
Broken Symetries, massless Particles and Gauge Fields.  
Physics Letters 12 number 2 (15 september 1964)
  - [4] KUNGL VETENSKAPS AKADEMIEN  
Nobel-BEH-advanced-physicsprize2013
  - [5] KUNGL VETENSKAPS AKADEMIEN  
advanced-physicsprize2013.pdf – paragraphe "Autres tentatives"
  - [6] A.A.Migdal and A.M.Polyakov  
Sov.Phys.JETP 24, p 91 (1967)  
Zh.Eksp.Teor.Fiz. 51, p 135 (1966)
  - [7] Louis de Broglie – La Physique quantique restera-t-elle indéterministe ?  
Gauthier-Villars – 1953

## Remerciements

Je remercie chaudement MM. Maurice Benayoun et Jacques Chauveau du LPNHE pour leur aide technique très importante pendant l'élaboration de ce texte et pour m'avoir ainsi maintenu en liaison avec le monde scientifique.

*(Manuscrit reçu le 20 mars 2020)*