

**Symposium Louis de Broglie
Theory of the Double Solution
and Quantum Trajectories,
Journées Louis de Broglie 2019**

4 Nov 2019, Institut Henri Poincaré, Paris.

THOMAS DURT¹, DANIEL FARGUE², ALEXANDRE MATZKIN³,
JACQUES ROBERT⁴.

1: Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, Institut Fresnel, 13013
Marseille, France

2: Fondation Louis de Broglie, 23 rue Marsoulan, 75012 Paris, France

3: Laboratoire de Physique Théorique et Modélisation, CNRS Unité 8089,
CY Cergy Paris Université, 95302 Cergy-Pontoise cedex, France

4: Laboratoire, Université Paris-Saclay, France

Introduction ¹

1 Trajectoires quantiques.

En 1926 [1], de Broglie jette les bases d'une interprétation de la mécanique quantique connue aujourd'hui sous le nom d'interprétation de de Broglie-Bohm. Un des principes de base de cette interprétation est que tout système quantique est caractérisé par une trajectoire continue dans l'espace et le temps. Les relations d'incertitude de Heisenberg ne sont pas considérées dans cette approche comme une limitation intrinsèque au concept de trajectoire en tant que tel mais plutôt comme une contrainte inhérente aux distributions statistiques de la position et de l'impulsion d'un système quantique.

Dans le même article, de Broglie se heurte à un problème sérieux : si l'on considère un système quantique composite (par exemple une paire de particules) décrit par une fonction d'onde de Schrödinger non factorisable (ou intriquée selon l'appellation introduite par Schrödinger en 1935), l'interprétation conduit à décrire des trajectoires non plus dans l'espace physique à 3 dimensions (\mathbb{R}^3), mais dans l'espace de configuration (de

¹English version, see p. 8

dimension $3N$ pour un système composé de N particules). de Broglie ne surmontera jamais vraiment ce problème et il ne se rangera pas non plus [2] à la vision développée plus tard par Bohm (en 1951) [3, 4] et mise en exergue par Bell (en 1964) [5], vision selon laquelle la physique quantique est une théorie intrinsèquement non-locale. Dans les années '50 il s'efforcera d'ailleurs de développer [6] avec Andrade e Silva [7, 8, 9, 10], une version du programme de la double solution selon laquelle les interactions entre systèmes quantiques sont définies non pas dans l'espace de configuration mais dans R^3 .

Bohm s'attaquera de son côté au problème de la mesure (encore largement ignoré en 1926) auquel il apportera une solution préfigurant le concept de décohérence développé dans les années '70 dans le cadre de la théorie des systèmes quantiques ouverts [6] (voir à ce sujet dans ce numéro l'article de Drezet et Stock suscité par la découverte récente d'une lettre de Bohm à de Broglie de 1951, vraisemblablement basée sur un projet d'article refusé par Nature, lettre dans laquelle Bohm situe sa contribution personnelle par rapport à celle de de Broglie en 1926). l'idée de décohérence vient compléter l'édifice théorique préfiguré par de Broglie en 1926 et 1927 (lors de sa présentation à la conférence Solvay de 1927 [11] de Broglie présente une version simplifiée de son programme de double solution, qui constitue l'ossature de ce que l'on appelle aujourd'hui la théorie de l'onde pilote [12, 13], c'est cette dernière qui sera réactualisée par Bohm en 1951), le long des lignes de force suivantes :

- les particules sont localisées à tout moment dans une région de l'espace bien plus réduite que le support de l'onde de Schrödinger ;
- les trajectoires satisfont à la formule du guidage appliquée à l'onde pilote de Schrödinger (onde Psi) dans une approche de type Madelung:

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \frac{\text{Im}(\Psi^*(x, y, z, t) \vec{\nabla} \Psi(x, y, z, t))}{|\Psi(x, y, z, t)|^2} \quad (1)$$

- à tout moment la distribution statistique des positions est régie par la règle de Born (loi en $|\Psi(x, y, z, t)|^2$);
- toute mesure est en dernier ressort une mesure de position.

2 Equilibre quantique, thermostat quantique de de Broglie.

De fait, il suffit que la distribution statistique des positions ρ soit régie par la règle de Born à un instant t pour qu'elle le soit à tous les temps.

En effet, on a alors

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi(x, y, z, t)|^2 = \text{div} \cdot \left(\frac{\hbar}{m} \text{Im} \cdot (\Psi^*(x, y, z, t) \vec{\nabla} \Psi(x, y, z, t)) \right) = \text{div} \cdot (\vec{J}_Q)$$

où \vec{J}_Q est le vecteur courant quantique associé aux ondes de Schrödinger; dans l'approche de de Broglie, \vec{v} est bien choisi car $\vec{v} = \vec{J}_Q / |\Psi(x, y, z, t)|^2$, et donc le vecteur courant de de Broglie $\rho \cdot \vec{v}$ est égal à \vec{J}_Q à tous les temps si et seulement si à un instant t l'égalité est satisfaite (théorème d'équivariance).

Même ainsi, l'on est encore amené à postuler qu'à un moment donné la distribution des positions est régie par la règle de Born. En outre, comme l'équation de Schrödinger est réversible dans le temps, tout écart à la règle de Born est irréversible, ce qui pose question.

Dans l'espoir de répondre à ces questions, de Broglie a développé, à l'époque, l'idée de thermostat quantique [14], à savoir l'existence de fluctuations expliquant pourquoi la distribution de Born émerge naturellement de la dynamique subquantique, à laquelle il faudrait pour ce faire ajouter une composante irréversible.

Bohm et Vigier [15] ont travaillé en parallèle à ces idées, et plus tard Bohm et Hiley [16] les ont recyclées dans l'approche de Nelson [17, 18] selon laquelle un mouvement brownien se superpose aux trajectoires de de Broglie-Bohm de façon à expliquer l'émergence de la distribution de Born (équilibre quantique).

L'idée d'équilibre quantique a été reprise et développée avec succès plus récemment par Valentini et ses collaborateurs [19, 20, 21, 22, 23]. Ce dernier a montré que la nature chaotique de la dynamique de de Broglie-Bohm suffisait dans bon nombre de situations à expliquer l'apparition de l'équilibre quantique à condition d'effectuer un "coarse graining" c'est-à-dire de moyenner la distribution des positions sur un voisinage de taille non-nulle de manière à effacer une éventuelle structure fine dans la distribution des positions. Ce résultat est moins fort que dans le cas de l'approche de Nelson car dans cette dernière la dynamique est irréversible dans le temps, et l'on peut dériver un théorème H quantique sans faire appel au coarse graining [24, 25, 26]; néanmoins il renforce la cohérence de l'édifice théorique imaginé par de Broglie, et permet de faire l'économie d'un postulat [27], ce qui renforce l'attractivité de l'interprétation de de Broglie-Bohm.

3 Double solution.

Le présent numéro spécial fait suite à la journée Louis de Broglie organisée à l'institut Poincaré le 4 novembre 2019, consacrée à l'héritage scientifique et philosophique de Louis de Broglie, avec comme objectif principal d'éclairer les développements récents s'inscrivant en continuité avec les intuitions primordiales développées par ce dernier. Les organisateurs de la journée (T. Durt, A. Matzkin, J. Robert et la Fondation L. de Broglie) entendaient en particulier apporter un éclairage nouveau sur le programme de la double solution auquel de Broglie a travaillé, avec divers collaborateurs, tout au long de sa vie (voir à ce sujet l'article de D. Fargue, de 2017, Louis de Broglie's "double solution" a promising but unfinished theory [28]). Sous sa forme initiale, le programme de la double solution décrivait les particules comme des singularités, dont les trajectoires satisfont la formule du guidage (1). Lorsque de Broglie s'est remis à travailler sur ces questions fondamentales en 1952 [29, 30, 31], après une longue interruption faisant suite à l'accueil mitigé fait à ses idées lors de la conférence Solvay de 1927, et sans doute à ses propres réserves, il a développé [32] une seconde version de son programme (mettant en exergue un "monisme" ondulatoire à opposer au dualisme Copenhaguien). Dans cette approche la particule resterait localisée dans une région où l'onde est de grande intensité, stabilisée par une self-interaction non-linéaire, ce que l'on appellerait aujourd'hui un soliton [6, 33, 34].

3.1 Self-gravitation.

L'idée selon laquelle la particule serait un soliton est à mettre en parallèle avec des études plus récentes visant à introduire au niveau de l'équation de Schrödinger une non-linéarité intrinsèque de nature gravitationnelle. Penrose a suggéré par exemple [35, 36] qu'une telle non-linéarité puisse expliquer le "collapse" de la fonction d'onde et par là même contribuer à résoudre le problème de la mesure (à noter que ledit collapse n' a pas été évoqué lors de la conférence Solvay de 1927, c'est plus tard, entre autres sous l'impulsion de von Neumann que l'importance de ces questions, et leurs implications en rapport avec le processus de mesure en mécanique quantique ont été reconnues). Cette approche donne lieu à l'équation non-linéaire de Newton-Schrödinger [37, 38, 39, 40] abordée dans un numéro spécial précédent dans l'introduction de laquelle on pouvait lire le commentaire suivant [41]:

...Rétrospectivement, cette approche rencontre des résonances profondes avec les idées déjà mentionnées de Poincaré et de Broglie, la

gravité jouant ici le rôle de pression de Poincaré, tout en fournissant un candidat idéal en vue de réaliser le programme de la double solution de de Broglie (le corpuscule correspondant ici à un soliton dont la dispersion serait bloquée par la self-gravitation)...

A noter que ces questions ont été abordées indépendamment au sein de l'école de de Broglie (voir par exemple section 6 de l'article de D. Fargue susmentionné [28]).

3.2 Gouttes vibrantes

Dans la même introduction [41] on pouvait aussi lire ceci :

...Ces quinze dernières années, la dualité onde-corpuscule s'est manifestée là où on ne l'attendait franchement pas du tout, en hydrodynamique, par le biais des "walkers" quantiques, des gouttes vibrantes de taille macroscopique, visibles à l'oeil nu, dont la dynamique n'est pas sans rappeler la dynamique de de Broglie-Bohm [...]. Bien sûr ces objets ne sont pas quantiques (l'intrication par exemple ne joue à l'évidence aucun rôle dans leur comportement), mais leur observation suggère que des propriétés telles que l'onde pilote ne sont pas que des artefacts théoriques. La physique des walkers suggère que pour des systèmes suffisamment complexes, des comportements pseudo-quantiques émergent spontanément, ce qui constitue un défi théorique stimulant...

L'observation de ces gouttes vibrantes a procuré un souffle nouveau à l'étude du programme de la double solution de de Broglie [42, 43] en apportant une manifestation concrète de l'intuition primordiale de de Broglie selon laquelle les particules seraient des "concentrations de champ" [44], structures complexes, émergentes et auto-organisées [45, 46, 47, 48].

4 Journées Louis de Broglie 2019 ; 4 Nov 2019, Institut Henri Poincaré, Paris : programme.

La première demi-journée du symposium était consacrée aux trajectoires quantiques, la seconde aux gouttes vibrantes. Le programme était le suivant :

Session du matin

- Jacques Robert (Lab. Phys. Gaz Plasmas, CNRS/Univ. Paris-Sud, Orsay)

Opening Remarks

- Angel Sanz (Univ. Complutense, Madrid)
Bohm's Quantum "Non-Mechanics": An Alternative Quantum Theory with its own ontology
- Samuel Colin (LPTM, Univ. Cergy-Pontoise)
The emergence of the Born Law in the de Broglie-Bohm pilot-wave theory
- Daniel Fargue (Ecole des Mines de Paris)
Louis de Broglie's "Double Solution Theory" a program more than a theory
- Thomas Durt (Inst. Fresnel/Ecole Centrale Marseille)
de Broglie's Double Solution program and self-gravity: problems and perspectives
- Alexandre Gondran (ENAC, Toulouse)
Internal and external wavefunctions: a form of Double Solution Theory ?
- Aurélien Drezet (CNRS/Inst. Néel, Grenoble)
Lorentz-Invariant, Retrocausal, and Deterministic Hidden Variables

Session de l'après-midi.

- Emmanuel Fort (Institut Langevin, ESPCI Paris)
Walking droplets: a tribute to Yves Couder
- Matthieu Labousse (CNRS/ESPCI, Paris)
Wave self-organization and build-up of macroscopic eigenstates
- Christian Borghesi (Vienna)
From walking droplets to de Broglie's Double Solution: an attempt
- Cedric Poulain (CEA/Inst. Néel, Grenoble)
A resonator moved by and within a wavefield: Radiation force and wave particle duality in the Double Solution framework

- Mohamed Hatifi (Institut Fresnel, Aix-Marseille Université)
Bouncing droplets and quantum trajectories

Table ronde de fin de journée :

Bouncing Droplets: a hydrodynamics phenomenon inspired by the double solution or an inspiration for sub-quantum phenomena ?

- Jean Bricmont (UCLouvain),
- Thomas Durt (Inst Fresnel, Marseille),
- Emmanuel Fort (ESPCI, Paris),
- Matthieu Labousse (ESPCI, Paris).
- Alexandre Matzkin (LPTM, Cergy). modérateur

Le présent numéro spécial fait suite à cette journée bien remplie. Il contient les contributions de certains orateurs mais aussi des contributions spontanées faisant suite à l'appel à contribution adressé à tous les participants. Il constitue enfin un hommage à Yves Couder pour sa contribution à l'étude des gouttes vibrantes (voir aussi la référence [49]), une discipline en plein essor qui a contribué à réactualiser certaines intuitions primordiales de Louis de Broglie esquissées dans le programme de la double solution.

Introduction (english version)

1 Quantum Trajectories

In 1926 [1], de Broglie laid the foundations for an interpretation of quantum mechanics known today as the de Broglie-Bohm interpretation. One of the basic principles of this interpretation is that every quantum system is characterized by a continuous space-time. In this approach, the Heisenberg uncertainty relations are not considered as an intrinsic limitation to the concept of trajectories but rather as a constraint relative to the statistical distributions of the position and the momentum of a quantum system.

In the same paper, de Broglie faces a serious problem: when one considers a composite quantum system (for example a pair of particles) described by a non-factorizable Schrödinger wave function (“entangled”, according to the term introduced by Schrödinger in 1935), the interpretation leads to trajectories that are not defined in our 3-dimensional physical space, but in configuration space (having dimension $3N$ for a system composed of N particles). De Broglie will never really overcome this problem and neither will he subscribe [2] to the view developed later by Bohm (in 1951) [3, 4] and highlighted by Bell (in 1964) [5], a view according to which quantum physics is an inherently non-local theory. In the 1950s he will also strive to develop [6] with Andrade e Silva [7, 8, 9, 10], a version of Double Solution program in which the interactions between quantum systems are defined not in configuration space but in R^3 .

Bohm will tackle the measurement problem (still pretty much disregarded in 1926) and suggest a solution anticipating the concept of decoherence, developed later in the 1970s within the framework of open quantum systems [6] (concerning this issue, the reader will find in this volume a paper by Drezet and Stock, following the recent discovery of a letter Bohm wrote to de Broglie in 1951, a letter – probably based on a manuscript rejected by Nature – in which Bohm discusses his own contribution compared to de Broglie’s 1926 article). The decoherence idea completes the theoretical construction prefigured by Broglie in 1926 and 1927 (during his presentation at the 1927 Solvay Conference [11] de Broglie gave a simplified version of his Double-Solution program, that constitutes the backbone of what is known today as the “pilot wave theory” [12, 13]; it is the latter that Bohm updates in 1951), along the following lines :

- the particles are localized at all times in a spatial region much smaller than the Schrödinger wave support;
- the trajectories satisfy the guidance formula applied to the Schrödinger pilot wave (Ψ wave) in a Madelung-type approach:

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \frac{\text{Im}(\Psi^*(x, y, z, t) \vec{\nabla} \Psi(x, y, z, t))}{|\Psi(x, y, z, t)|^2} \quad (2)$$

- at all times the statistical distribution of positions is governed by Born's rule (that is $|\Psi(x, y, z, t)|^2$);
- any measurement is ultimately a measurement of position.

2 Quantum Equilibrium, de Broglie's quantum thermostat

In fact, it is enough to require that the statistical distribution of the positions ρ obeys Born's rule at a time t , for then Born's rule will be obeyed at all times. Indeed, we then have

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi(x, y, z, t)|^2 = \text{div}.\left(\frac{\hbar}{m} \text{Im}(\Psi^*(x, y, z, t) \vec{\nabla} \Psi(x, y, z, t))\right) = \text{div}.\left(\vec{J}_Q\right)$$

where \vec{J}_Q is the quantum current density associated with Schrödinger waves; in de Broglie's approach, \vec{v} is chosen so that $\vec{v} = \vec{J}_Q / |\Psi(x, y, z, t)|^2$, and therefore de Broglie's current density $\rho \cdot \vec{v}$ is equal to \vec{J}_Q at all times if and only if at an instant t the equality is satisfied (equivariance theorem).

Even then, we still need to postulate that at some time t the distribution of positions is governed by Born's rule. Furthermore, the Schrödinger equation is time-reversible, while any deviation from Born's rule is irreversible; this raises questions.

Hoping to answer these questions de Broglie developed the idea of a quantum thermostat [14], namely the existence of fluctuations explaining why the Born distribution naturally emerges from subquantum dynamics, provided an irreversible component is added.

Bohm and Vigier [15] worked in parallel on these ideas, and later Bohm and Hiley [16] have recycled them in Nelson's approach [17, 18] according to which a Brownian motion is superimposed on the de Broglie-Bohm trajectories in order to explain the emergence of the Born distribution (the quantum equilibrium).

The concept of quantum equilibrium has been taken up and successfully developed more recently by Valentini and his collaborators [19, 20, 21, 22, 23]. The latter showed that the chaotic nature of the de Broglie-Bohm dynamics was sufficient in a great number of situations to explain the appearance of the quantum equilibrium provided a “coarse graining” is carried out, i.e. average the position distribution over a region of finite size so as to erase possible fine structures in the position distribution. This result is weaker than in Nelson’s approach because in the latter case the dynamics is irreversible in time, and this makes it possible to derive a quantum H theorem without appealing to coarse graining [24, 25, 26]; nonetheless coarse-graining strengthens the coherence of the theoretical structure imagined by de Broglie, and avoids assuming an additional postulate [27], which in turn makes the de Broglie-Bohm interpretation more attractive.

3 Double solution

This special issue follows the Journée Louis de Broglie workshop organized at the Institut Henri Poincaré on 4 Nov. 2019. The workshop was devoted to the scientific and philosophical heritage of Louis de Broglie, with the main objective of shedding light on recent developments in continuity with the ideas developed by de Broglie. The organizers of the workshop (T. Durt, A. Matzkin, J. Robert and the Fondation L. de Broglie) intended in particular to shed new light on the program of the double solution on which de Broglie worked, along with various collaborators, throughout his life (see on this subject the recent article by D. Fargue, “Louis de Broglie’s double solution: a promising but unfinished theory” [28]). In its initial form, the double solution program described particles as singularities, whose trajectories satisfy the guidance formula (2).

When de Broglie resumed his work on these fundamental questions in 1952 [29, 30, 31], after a long interruption due to the mixed reception given to his ideas at the Solvay conference in 1927, and, probably also because he had concerns of his own, he developed [32] a second version of his program (putting forward a wave “monism” to be opposed to Copenhagen dualism). In this approach the particle would remain localized in a region where the wave is of great intensity, stabilized by a non-linear self-interaction, that we would call today a soliton [6, 33, 34].

3.1 Self-gravitation.

The idea according to which the particle is a soliton is to be compared with more recent studies aiming to introduce an intrinsic non-linearity of gravitational nature at the level of Schrödinger equation. Penrose suggested for example [35, 36] that a non-linearity of this type could explain the “collapse” of the wave function and thereby solve the measurement problem (note that the collapse issue was not mentioned during the Solvay conference in 1927, as it was later, under the impetus of von Neumann among others, that the importance of these questions and their relations with the measurement process in quantum mechanics were recognized). This approach gives rise to the non-linear Newton-Schrödinger equation [37, 38, 39, 40] addressed in a previous Special Issue, in the Introduction of which we could read the following comment [41]:

... Retrospectively, this approach has deep resonances with the ideas already mentioned by Poincaré and de Broglie, gravity acting here as the Poincaré pressure, and providing an ideal candidate to carry out de Broglie’s double solution program (the corpuscle would then correspond to a soliton whose dispersion would be blocked by self-gravitation) ...

Note that these questions have been investigated independently within the school of de Broglie (see for example section 6 of the article by D. Fargue mentioned above [28]).

3.2 Vibrating droplets

In the same text [41] we could also read the following:

... Over the past fifteen years, the wave-particle duality has been put into evidence – frankly, rather unexpectedly – in hydrodynamics, through “walkers”, that is bouncing drops of macroscopic size, visible to the naked eye, whose dynamics are reminiscent of the dynamics of de Broglie-Bohm [...] . Of course these objects are not quantum (entanglement, for example, obviously plays no role in their behavior), but their observation suggests that terms such as the pilot wave are not mere theoretical artefacts. The physics of walkers suggests that for sufficiently complex systems, pseudo-quantum behaviors emerge spontaneously, a point that constitutes a stimulating theoretical challenge ...

The observation of these bouncing drops brought a new impetus to the study of de Broglie’s double solution program [42, 43] by bringing a concrete manifestation of de Broglie’s intuition according to which

the particles are “field concentrations” [44], complex, emergent and self-organized structures [45, 46, 47, 48].

4 **Louis de Broglie: Theory of the Double Solution and Quantum Trajectories; 4 Nov 2019, Institut Henri Poincaré, Paris : Workshop program**

The first part of the workshop was devoted to quantum trajectories, while the second part dealt with bouncing droplets. The precise program was the following:

Morning session:

- Jacques Robert (Lab. Phys. Gaz Plasmas, CNRS/Univ. Paris-Sud, Orsay)

Opening Remarks

- Angel Sanz (Univ. Complutense, Madrid)

Bohm’s Quantum “Non-Mechanics”: An Alternative Quantum Theory with its own ontology

- Samuel Colin (LPTM, Univ. Cergy-Pontoise)

The emergence of the Born Law in the de Broglie-Bohm pilot-wave theory

- Daniel Fargue (Ecole des Mines de Paris)

Louis de Broglie’s ”Double Solution Theory” a program more than a theory

- Thomas Durt (Inst. Fresnel/Ecole Centrale Marseille)

de Broglie’s Double Solution program and self-gravity: problems and perspectives

- Alexandre Gondran (ENAC, Toulouse)

Internal and external wavefunctions: a form of Double Solution Theory ?

- Aurélien Drezet (CNRS/Inst. Néel, Grenoble)

Lorentz-Invariant, Retrocausal, and Deterministic Hidden Variables

Afternoon session.

- Emmanuel Fort (Institut Langevin, ESPCI Paris)
Walking droplets: a tribute to Yves Couder
- Matthieu Labousse (CNRS/ESPCI, Paris)
Wave self-organization and build-up of macroscopic eigenstates
- Christian Borghesi (Vienna)
From walking droplets to de Broglie's Double Solution: an attempt
- Cedric Poulain (CEA/Inst. Néel, Grenoble)
A resonator moved by and within a wavefield: Radiation force and wave particle duality in the Double Solution framework
- Mohamed Hatifi (Institut Fresnel, Aix-Marseille Université)
Bouncing droplets and quantum trajectories

Round Table:

Bouncing Droplets: a hydrodynamics phenomenon inspired by the double solution or an inspiration for sub-quantum phenomena ?

- Jean Bricmont (UCLouvain),
- Thomas Durt (Inst Fresnel, Marseille),
- Emmanuel Fort (ESPCI, Paris),
- Matthieu Labousse (ESPCI, Paris).
- Alexandre Matzkin (LPTM, Cergy). moderator

The present special issue follows this busy one-day workshop. It contains the contributions of some speakers but also spontaneous contributions following the call for contributions addressed to all participants. Finally, this issue pays a tribute to Yves Couder for his contribution to the study of bouncing droplets (see also the reference [49]), a booming discipline that has refreshed certain primordial intuitions sketched by Louis de Broglie in his double solution program.

References

- [1] L. de Broglie, Comptes Rendus de l'Académie des sciences **183**, 447 (1926).
- [2] L. de Broglie, Réfutation du théorème de Bell, in Jalons pour une nouvelle microphysique : exposé d'ensemble sur l'interprétation de la mécanique ondulatoire , editor Gauthier-Villars (Paris), 1978.
- [3] D. Bohm. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I. *Phys. Rev.*, 85(2):166–179, 1952.
- [4] D. Bohm. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. II. *Phys. Rev.*, 85(2):180–193, 1952.
- [5] J. S. Bell. On the EPR paradox. *Physics*, 1: 165 (1964).
- [6] S. Colin, T. Durt, and R. Willox. L. de Broglie's double solution program: 90 years later. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, **42**, 19, 2017.; available on the website <http://aflb.ensmp.fr/AFLB-421/table421.htm>
- [7] L. de Broglie and J. Andrade e Silva. Idées nouvelles concernant les systèmes de corpuscules dans l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 244(5), 529–533, (1957).
- [8] J. Andrade e Silva. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 245, 1893, (1957).
- [9] J. Andrade e Silva. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 245, 2018, (1957).
- [10] J. Andrade e Silva. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 246, 391, (1958).
- [11] G. Bacciagaluppi and A. Valentini. Quantum Theory at the Crossroads: Reconsidering the 1927 Solvay Conference. Cambridge University Press (2010), and quant-ph/0609184.
- [12] P.R. Holland. The Quantum Theory of Motion (Cambridge University Press, 1993)
- [13] J. Bricmont, Comprendre la physique quantique, Odile Jacob, 2020

- [14] L. de Broglie. Interpretation of quantum mechanics by the double solution theory *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, **12**, 4, 1987, english translation from a paper originally published in the book Foundations of Quantum Mechanics- Rendiconti della Scuola Internazionale di Fisica Enrico Fermi, IL Corso, B. d' Espagnat ed. Academic Press N.Y.1972.
- [15] D. Bohm and J.P. Vigier. Model of the Causal Interpretation of Quantum Theory in Terms of a Fluid with Irregular Fluctuations *Phys. Rev.*, 96, 208, 1954.
- [16] D. Bohm and B.J Hiley. Non-locality and locality in the stochastic interpretation of the Quantum theory. *Annales de l'I.H.P. Physique théorique*, Tome 49 (1988) no. 3 , p. 287-296
- [17] Nelson (Derivation of the Schroedinger equation from Newtonian Mechanics, *Phys. Rev.* 150, 4, 1079-1085, (1966)
- [18] E. Nelson, "Dynamical Theories of Brownian Motion", *Mathematical Notes* 131, 2381-2396 (1967).
- [19] A. Valentini, "Signal locality, uncertainty and the subquantum H-theorem", *Phys. Lett. A* 156, 511, (1991).
- [20] A. Valentini and H. Westman. Dynamical origin of quantum probabilities. *Proc. R. Soc. A*, 461:253-272, 2005.
- [21] E. Abraham, S. Colin and A.Valentini.Long-time relaxation in pilot-wave theory *J. Phys. A: Math. Theor.* 47, 395306, 2014.
- [22] S. Colin and A. Valentini. Instability of quantum equilibrium in Bohm's dynamics. *Proc. R. Soc. A* 470, 20140288, (2014).
- [23] C. Eftymiopoulos, G. Contopoulos and A.C. Tzemos . Chaos in de Broglie - Bohm quantum mechanics and the dynamics of quantum relaxation. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, **42**, 73, 2017.
- [24] Petroni, N.C. Asymptotic behaviour of densities for Nelson processes. In *Quantum Communications and Measurement*; Springer: New York, NY, USA, 1995; pp. 43?52.23.
- [25] Petroni, N.C.; Guerra, F. Quantum Mechanical States as Attractors for Nelson Processes.*Found. Phys.*1995,25, 297?315

- [26] M. Hatifi, S. Colin, R. Willox and T. Durt. Bouncing oil droplets, de Broglie's quantum thermostat and convergence to equilibrium, submitted to *Chaos*, April 2018.
- [27] T. Norsen, "On the explanation of born-rule statistics in the de Broglie-Bohm pilot-wave theory", *Entropy* 20, 422 (2018).
- [28] D. Fargue. Louis de Broglie's double solution: a promising but unfinished theory. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, **42**, 19, 2017.
- [29] A. Drezet and B. Stock, same issue.
- [30] O. Freire Jr., *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences*, **36**, 1-34 (2005).
- [31] O. Freire Jr., *David Bohm: A life dedicated to understanding the quantum world*, p. 85, Springer (2019).
- [32] L. de Broglie. Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire: la théorie de la double solution. Paris: Gauthier- Villars, (1956). English translation: *Nonlinear wave mechanics: A causal interpretation*. Elsevier, Amsterdam 1960.
- [33] D. Fargue. Permanence of the corpuscular appearance and non linearity of the wave equation. In S. Diner et al., editor, *The wave-particle dualism*, pages 149–172. Reidel, 1984.
- [34] Hatifi, M.; Lopez-Fortin, C.; Durt, T. de Broglie's double solution: Limitations of the self-gravity approach. *Ann. Fond. Louis Broglie*, 2018,43, 63-90.
- [35] R. Penrose. On Gravity's Role in Quantum State Reduction. *General Relativity and Gravitation*, 28(5):581–600, 1996.
- [36] R. Penrose. On the Gravitization of Quantum Mechanics 1: Quantum State Reduction. *Foundations of Physics*, 2014, Vol. 44, Issue 5.
- [37] L. Diósi. Gravitation and quantum-mechanical localization of macro-objects. *Phys. Lett. A*, 105:199–202, 1984.
- [38] K. R. W. Jones. Newtonian Quantum Gravity. *Aust. J. Phys.*, 48:1055–1081, 1995.

- [39] S. Colin, T. Durt, and R. Willox. Can quantum systems succumb to their own (gravitational) attraction? *Class. Quantum Grav.*, 31:245003, 2014.
- [40] Durt, T. L. de Broglie’s double solution and gravitation. *Ann. Fond. Louis Broglie*, 2017,42, 73-102
- [41] T. Durt, D. Fargue and R. Willox, “Louis de Broglie, à la croisée des chemins?”, Introduction, *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, Volume 42, numéro spécial, 2017.
- [42] C. Borghesi. Dualité onde-corpuscule formée par une masselotte oscillante dans un milieu élastique : étude théorique et similitudes quantiques. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, **42**, 161, 2017.
- [43] A. Drezet, P. Jamet, D. Bertschy, A. Ralko, and C. Poulain, “Mechanical analog of quantum bradyons and tachyons”, *Phys. Rev. E* 102, 052206, 2020
- [44] H. Poincaré. La fin de la matière *Athenaeum* 4086, 201-202, 1906, Sur la dynamique de l’électron *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* 21, 129-176, 1906.
- [45] Y. Couder and E. Fort. Single-Particle Diffraction and Interference at a Macroscopic Scale. *Phys. Rev. Lett.*, 97:15410, 2006.
- [46] Y. Couder, A. Boudaoud, S. Protière and E. Fort. Walking droplets, a form of wave-particle duality at macroscopic scale? *Europhysics News* Vol. 41, No. 1, 14-18 2010.
- [47] E. Fort, A. Eddi, A. Boudaoud, J. Moukhtar, and Y. Couder, “Path-memory induced quantization of classical orbits”, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 107, 17515-17520 (2010).
- [48] J.W.M. Bush. Pilot-Wave Hydrodynamics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 49:269-292, 2015.
- [49] Martine Ben Amar ; Laurent Limat ; Olivier Pouliquen ; Emmanuel Villiermaux, Tribute to an exemplary man: Yves Couder, *Comptes Rendus. Mécanique*, Tome 348 (2020) no. 6-7.