La géométrisation de la physique et Georges Lochak

Claude Daviau, Jacques Bertrand

Fondation Louis de Broglie
23 rue Marsoulan, F-75012 Paris, France
daviau.claude@orange.fr
bertrandjacques-m@orange.fr

RÉSUMÉ. La géométrisation de la physique n'est qu'une des nombreuses lignes de force des recherches de Georges Lochak. C'est aussi un champ de recherche toujours actif dans lequel il a eu une large contribution personnelle. Et cette géométrisation a grandement contribué au développement des travaux des auteurs de cet article. C'est pour nous le meilleur moyen de le remercier et de lui rendre hommage. L'équation d'onde du monopôle magnétique se généralise à une équation d'onde pour chacun des fermions du modèle standard, sa jauge chirale est une partie essentielle du groupe de jauge du modèle standard.

ABSTRACT. The geometrization of physics is only one of the many lines of action of Georges Lochak's research. This geometrization is also an always active research field where he himself largely contributed. Since this line of research greatly contributed to the development of our own work, this article is for us the best way to say our thanks to Georges Lochak and to honor his memory. The wave equation of the magnetic monopole may be generalized to a wave equation for each fermion of the Standard Model, his chiral gauge is an essential part of the gauge group of this model.

P.A.C.S.: 03.65.Bz ; 04.20.-q

1 Le livre

Georges Lochak publia en 1994 un livre intitulé "La géométrisation de la physique" [1]. Nous invitons nos lecteurs francophones ou lisant le russe à lire ou relire ce livre passionnant, au style alerte et précis. Il raconte aussi bien les prémisses, dès l'antiquité, l'apogée de la géométrie euclidienne avec Newton, le déclin avec Lagrange et le passage de la mécanique aux espaces abstraits. Il réussit à rendre simple les principes extrémaux, du temps minimal de parcours d'un rayon lumineux (principe de Fermat), jusqu'au principe de moindre action et à l'unification de ces deux principes par la mécanique ondulatoire de Louis de Broglie. Georges Lochak avait le don de rendre intelligible la complexité du passage aux géométries non euclidiennes, aux espaces à plus de trois dimensions, à l'espace-temps de la relativité restreinte puis générale.

Ce qui est moins connu est la part qu'il a prise lui-même dans cette géométrisation de la physique. Lorsqu'il est arrivé comme étudiant à l'Institut Henri Poincaré, on disait en plaisantant que tout le monde, sauf le concierge, y travaillait sur l'équation de Dirac. C'était une plaisanterie parce qu'il n'y avait pas de concierge. Si le principal axe de recherche était l'équation de Dirac, c'est parce que l'équation d'onde obtenue en 1928 par P.A.M. Dirac [4] a l'énorme avantage sur l'équation de Schrödinger, obtenue deux ans plus tôt [3], d'être relativiste. Et la relativité était le point de départ des travaux de L. de Broglie [2]. Il avait écrit un premier livre sur le sujet dès 1934. Il y expliquait pourquoi cette équation d'onde était meilleure que les précédentes, comment c'était elle qui donnait les nombres quantiques attendus par la spectroscopie, le bon nombre des états, les niveaux d'énergie, l'intensité des raies, les facteurs de Landé [5]. Dans son testament scientifique, Georges Lochak nous dit : "*Nous étions nombreux à l'Institut Henri Poincaré - y compris de Broglie lui- même - à travailler sur l'équation de Dirac. J'ai remarqué que tout est angulaire dans cette théorie, à cause du spin évidemment. C'est pourquoi j'ai eu l'idée d'exprimer l'équation uniquement avec des angles et une densité. Il fallait une densité scalaire et 7 angles : 3 angles d'Euler pour les rotations d'espace, 3 angles imaginaires d'espace-temps pour les vitesses ; et un angle étrange, que je désigne par A, introduit par Yvon et Takabayasi*". Ce travail a été publié dans deux notes présentées par Louis de Broglie lui-même à l'Académie des Sciences [6][7].

2 Les deux notes de 1956

L'onde de l'électron, dans un système de coordonnées arbitraire, s'écrit dans la première note :

$$q=\sqrt{D}e^{i\sigma_4\frac{A}{2}}LR\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ \Omega_1=q^*\alpha_4q=D\cos A;\ \Omega_2=q^*\alpha_5q=D\sin A,\tag{1}$$

L'angle A est l'angle d'Yvon-Takabayasi que nous retrouverons à la base de la théorie du monopôle magnétique, Ω_1 et Ω_2 sont deux invariants relativistes et D est le module du nombre complexe $\Omega_1+i\Omega_2$ tandis que A en est un argument. Les autres angles sont les paramètres de la rotation spatiale R et de la transformation générale de Lorentz L :

$$R = e^{i\sigma_3\frac{\psi}{2}}e^{i\sigma_1\frac{\theta}{2}}e^{i\sigma_3\frac{\varphi}{2}};\ L = e^{\alpha_1\gamma_1}e^{\alpha_2\gamma_2}e^{\alpha_3\gamma_3} \tag{2}$$

La note indique seulement : «*On voit que φ, θ, ψ et γ sont les angles d'Euler relativistes*». Dans une note où la place est très limitée, on ne peut pas se permettre de préciser ce que sont les matrices 4×4 complexes $\alpha_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$, ni le fait que la théorie de Dirac utilisait un temps imaginaire tel que $x^4 = ict$. Mais comme tous les chercheurs de l'IHP utilisaient les mêmes notations que Louis de Broglie, le texte est parfaitement clair. Avant d'entrer dans les résultats nouveaux obtenus par Georges Lochak dans ses deux notes, il est bon de comprendre le progrès important contenu dans ces quelques formules.

Autant la mécanique s'était accommodée de l'espace euclidien et du temps absolus de la physique de Newton, autant l'électromagnétisme de Maxwell avait été rétif à cette description : les lois de Maxwell ne sont pas invariantes sous le groupe dit aujourd'hui de Galilée, formé par les rotations dans l'espace et les translations dans le temps et dans l'espace. Albert Einstein avait montré que la mesure du temps et la mesure des longueurs variaient selon l'état de mouvement de l'observateur effectuant les mesures, pour les grandes vitesses. Cela avait été raconté par les mathématiciens comme Minkowski comme le remplacement de l'espace et du temps par un espace-temps, et du groupe de Galilée par un groupe différent, dit de Poincaré, comprenant les translations d'espace-temps et les transformations de Lorentz, qu'on peut considérer comme des pseudo-rotations conservant une métrique de signature + - - - ou - + + +. Notons en passant, parce que c'est important, que le temps imaginaire utilisé par Dirac permet de travailler avec des matrices de carré positif, en signature + + + +. Il y a par derrière ces questions de notations mathématiques la question lancinante : mais qu'est ce c'est que ce champ électromagnétique qui se propage, qu'est-ce que c'est la masse, la charge électrique, qu'est-ce que c'est l'onde quantique, le spin 1/2 ? Il y avait encore bien d'autres questions, et une immense querelle pour savoir s'il fallait seulement chercher à répondre à ces questions. Donc trouver des paramètres géométriques dans la mystérieuse équation de Dirac était un progrès immense. Aux yeux de de Broglie, qui admirait la géométrisation de la gravitation opérée par Einstein, cela justifiait parfaitement qu'il ait pris le temps de vérifier les calculs, avoué à son jeune collègue qu'il ne comprenait pas tout, et présenté quand même ce travail à l'Académie des Sciences. L'hamiltonien donnant l'équation d'onde vérifie :

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar c}{2i} q^* \alpha^k [\partial_k] q - m_0 q^* \alpha_4 q \quad (k = 1, 2, 3) \tag{3}$$

Le lagrangien étant nul au cours du mouvement (parce que l'équation d'onde est homogène), l'hamiltonien devient :

$$\mathcal{H} = -T_{44} = -\frac{\hbar c}{2i} q^* [\partial_4] q = -\frac{\hbar}{2i}\Big(q^* \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q^*}{\partial t} q\Big). \tag{4}$$

Ceci donne, avec la géométrisation de (1) :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = j_4 \frac{\partial}{\partial t}\Big(-\frac{\varphi}{2}\Big) + s_3 \mathrm{ch}\gamma_1 \mathrm{ch}\gamma_2 \frac{\partial}{\partial t}\Big(-\frac{\psi}{2}\Big) + s_4 \frac{\partial}{\partial t}\Big(-\frac{A}{2}\Big) \\ + (s_2 \mathrm{sh}\gamma_4 \mathrm{ch}\gamma_2 - s_1 \mathrm{sh}\gamma_2) \frac{\partial}{\partial t}\Big(-\frac{\gamma_3}{2}\Big);\ s_\mu = q^* \sigma_\mu q.\end{aligned} \tag{5}$$

Donc les équations du mouvement du fluide de Dirac sont données par l'hamiltonien (3) et par les crochets de Poisson *classiques* (en italique dans le texte) :

$$\Big[\frac{\varphi}{2}, j_4\Big] = \frac{1}{\hbar}\delta(\vec{r} - \vec{r}\,'), \tag{6}$$

$$\Big[\frac{\psi}{2}, \mathrm{ch}\gamma_4 \mathrm{ch}\gamma_2 s_3\Big] = \frac{1}{\hbar}\delta(\vec{r} - \vec{r}\,'), \tag{7}$$

$$\Big[\frac{\gamma_3}{2}, s_2 \mathrm{ch}\gamma_2 \mathrm{sh}\gamma_1 - s_1 \mathrm{sh}\gamma_2\Big] = \frac{1}{\hbar}\delta(\vec{r} - \vec{r}\,'), \tag{8}$$

$$\Big[\frac{A}{2}, s_4\Big] = \frac{1}{\hbar}\delta(\vec{r} - \vec{r}\,'). \tag{9}$$

Notons que les seconds membres de ces quatre égalités sont identiques, et identiques aussi à ce qu'obtenait la mécanique quantique non relativiste. Les δ de Dirac y sont considérés non comme des fonctions, mais comme des distributions. La suite de la note explique ce qui se passe quand on prend l'approximation non relativiste, avec l'équation de Pauli puis l'équation de Schrödinger : le φ qui est l'angle de rotation propre pour une toupie en mécanique, devient la phase de l'onde de Schrödinger, liée à la jauge électrique, j_4 étant la densité de probabilité. Ceci fait apparaître que l'onde de l'équation de Dirac est essentiellement une onde à spin, et que « la » phase de l'onde est la phase d'une vraie rotation dans le « plan du spin », ce dont nous reparlerons. Mais la grande surprise de cette étude, c'est le fait qu'il existe non pas un mais deux crochets de Poisson, très similaires, (6) et (9). Mais alors qu'est cet angle A, du point de vue géométrique et surtout physique ? La seconde note explore diverses grandeurs de la théorie de Dirac comportant des dérivées partielles. Elle montre que l'angle ϕ de la rotation propre s'identifie à la fonction de Jacobi de la mécanique classique. C'est important pour qui veut relier mécanique quantique et mécanique classique. Georges Lochak nous dit dans son testament scientifique : "*Les deux crochets de Poisson que j'avais trouvés étaient semblables, mais on ignorait la signification des deux termes présents dans le second. J'y ai longuement réfléchi sans rien y comprendre avant de me décider (j'étais un jeune chercheur) à en parler à Louis de Broglie qui a eu trois attitudes que j'ai trouvées remarquables de la part d'un grand patron : 1) Il a refait tous mes calculs qui ont dû lui prendre beaucoup de temps. 2) Il m'a avoué qu'il ne comprenait rien à ma seconde formule. 3) Il m'a dit : « Tant pis, on publie comme ça, puisque c'est une conséquence logique de l'équation de Dirac ; j'espère qu'on comprendra un jour ». Et ma note est passée aux Comptes Rendus de l'Académie.*"

2.1 Regard critique, 65 ans plus tard, à la lumière des groupes de Lie

Ce qu'a trouvé Georges Lochak, il y a maintenant 65 ans, dépasse encore, et de loin, ce que racontent les manuels de mécanique quantique, qui sont tous restés basés, pour l'essentiel, sur l'équation de Schrödinger ou à la rigueur sur l'équation de Pauli (elle garde le spin mais pas l'invariance relativiste). Alors que peut-on apporter de plus ou de mieux, deux générations de physiciens plus tard ? La période à laquelle se situent ces deux notes se caractérise par le triomphe, passager, de la théorie des groupes. Cette branche des mathématiques a envahi la physique par les groupes de symétrie, qui font l'objet du chapitre 8 de la "géométrisation de la physique". C'était aussi l'époque où Vigier était parti à l'abordage de la classification des nombreuses nouvelles particules qu'on découvrait dans les accélérateurs, toujours plus puissants. Et c'est sur la théorie des groupes que Georges Lochak a passé sa thèse [8], justement à l'époque où "les groupes prennent le pouvoir" (chapitre 9). Mais il s'agit d'autres groupes que ces groupes de symétrie qu'il avait étudiés dans son certificat de minéralogie, groupes de symétrie qui expliquent la diversité finie des cristaux. Ce sont les mathématiques des groupes et algèbres de Lie qui prenaient le pouvoir. Trente ans après, Georges Lochak portait un regard nostalgique et critique sur cette prise de pouvoir des mathématiques, qui avait détourné les jeunes physiciens de la réalité physique et des résultats expérimentaux comme critère de valeur ultime de toute théorie physique.

Avant de passer à l'étape suivante concernant l'angle A, faisons trois remarques sur ces deux notes. D'abord, les différents angles sont tous divisés par 2, ce qui était à l'époque considéré comme banal. Ça ne l'est pas du tout si on compare physique quantique et physique classique : la toupie classique ignore complètement ces divisions par 2. Seconde remarque, les deux parties en L (ici le L est pour Lorentz) et en R (pour Rotation) des égalités (2) sont peu cohérentes entre elles, avec deux matrices d'indice 3 pour R et aucune d'indice 2, alors que la partie L contient les trois indices. De plus on a parfaitement le droit d'écrire le produit sous la forme $R'L'$, mais comme le produit n'est pas commutatif, en général R' et L' contiendront d'autres angles. Ceci est expliqué dans le livre de M.A. Naïmark que Georges Lochak traduira du russe pour les éditions Dunod [9], quelques années plus tard. La troisième critique est la plus importante, c'est l'abus qui a été fait, depuis les travaux du mathématicien Elie Cartan, des représentations infinitésimales et des groupes à un paramètre venant de chaque générateur de l'algèbre. Il est certes utile de classer toutes les algèbres de Lie, mais l'algèbre cache quelque peu la non commutativité des groupes et cela ne permet pas de bien distinguer algèbres de Lie et groupes de Lie. Or s'il existe une seule algèbre de Lie pour tout groupe de Lie, il existe ici deux groupes de Lie de même algèbre de Lie. Donc on voit mal apparaître le véritable groupe d'invariance de la théorie de Dirac, qui n'est pas, contrairement à ce qu'on croit, le groupe de Lorentz, mais le groupe de recouvrement, $SL(2,\mathbb{C})$, de la partie connexe à l'identité du groupe de Lorentz. Car le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ est le seul utilisé dans tous les calculs en mécanique quantique, puisque $SU(2)$, utilisé en mécanique quantique non relativiste, en est un sous-groupe.

3 L'intermède des algèbres de Clifford

Dix ans après ces notes, un jeune étudiant de l'Arizona, David Hestenes, utilisait les commodités des algèbres de Clifford (un mathématicien anglais du siècle précédent) pour revisiter l'équation de Dirac. Il commença par se servir de l'algèbre des matrices de Pauli, qui est l'algèbre de Clifford Cl_3 de l'espace euclidien à trois dimensions, puis opta pour l'algèbre de Clifford $Cl_{1,3}$ qui est l'algèbre de Clifford de l'espace-temps de la relativité restreinte, de signature $+$ - - -. Armé de cet outil puissant, il ne mit pas longtemps à retrouver ce qu'avait publié Georges Lochak dix ans auparavant [15] [16] [17]. La fonction d'onde notée q dans la note devient : $\psi(\mathrm{x}) = e^{\frac{1}{2}\mu(\mathrm{x})}$ avec $\mu(\mathrm{x}) = \alpha(\mathrm{x}) + i\beta(\mathrm{x}) + \phi(\mathrm{x})$. Il faut évidemment un peu d'habitude pour voir ici les mêmes demi-angles que dans la note, mais c'est bien la même géométrisation, qui écrit explicitement que l'onde est fonction de $\mathrm{x} = \mathrm{x}^\mu\gamma_\mu$, puisqu'ici on a remplacé les matrices α de la première version de la théorie de Dirac par les matrices γ_μ qui permettent d'obtenir l'invariance relativiste de l'équation d'onde. La comparaison est d'autant plus difficile à faire qu'Hestenes ne voulait pas utiliser le calcul matriciel et considérait les quatre γ_μ comme quatre vecteurs de l'espace-temps. Comme l'algèbre des matrices de Dirac est aussi un espace vectoriel, on peut parfaitement écrire tous les calculs d'Hestenes avec les matrices de Dirac. On peut aussi voir que l'angle A est maintenant écrit $\beta(\mathrm{x})$ et que la densité D est $e^{\alpha(\mathrm{x})}$. Quant aux six termes angulaires de (1), ils prennent ici la forme très condensée $e^{\frac{1}{2}\phi(\mathrm{x})}$. Ce travail fut repéré par Roger Boudet [10] [11] et son ami Gaston Casanova [12] le fit connaître par un petit livre publié dans la collection "Que sais-je", lointain ancêtre de Wikipédia. Roger Boudet apprit à David Hestenes que son angle β avait déjà un nom, et même deux puisqu'il était nommé depuis les patronymes du français Yvon et du japonais Takabayasi. Il a lui-même réécrit dans l'algèbre d'espace-temps le spin de l'électron comme rotation dans le plan du spin et l'angle β comme angle dans le plan scalaire-pseudo-scalaire de l'algèbre. En bon américain de l'Arizona Hestenes n'a cité qu'une fois notre ami Boudet et bien entendu jamais Georges Lochak qui l'avait pourtant précédé de dix ans.

On peut dire aussi que l'on avait un peu avancé dans la géométrisation de l'onde quantique, parce que les notes de Georges Lochak comprenaient sept angles et une densité tout à fait à part, tandis que tous les termes contenus dans l'expression $\mu(\mathrm{x})$ apparaissent semblables.

4 La découverte du monopôle magnétique

Durant 23 ans, (nous dit Georges Lochak dans son testament scientifique pour son mystérieux angle A) *je consacrais vainement quelques jours par an à ce problème, jusqu'à ce que survienne un colloque en l'honneur de René Thom, où j'ai présenté ce problème comme étant l'une des surprises de la géométrisation de la physique ; et il m'a soudain sauté* *aux yeux pendant mon exposé que l'objet bizarre caché dans mes formules était un monopôle magnétique.* La découverte a été exposée au séminaire de la Fondation Louis de Broglie et publiée d'abord dans les Annales de la Fondation [18] [19], puis dans la revue I.J.T.P. [20]. L'idée de base est la suivante : l'angle de rotation propre φ est lié à l'invariance de jauge électrique, le courant lié par le théorème de Emmy Noether à cette invariance est le courant J dont la composante de temps J^0 est la densité de probabilité $J^0 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$. De même l'angle d'Yvon-Takabayasi est l'angle d'une seconde invariance de jauge. A cette invariance de jauge est associé un second courant, le courant K qui était déjà connu en théorie de Dirac. Ce courant est en tout point orthogonal (pour le produit scalaire d'espace-temps [1]) au courant de densité de probabilité, et de pseudo-norme opposée à la pseudo-norme de J. Il y a cependant un problème avec le terme de masse, qui relie la partie droite à la partie gauche de l'onde. Georges Lochak a trouvé et présenté le seul terme de masse pouvant être compatible avec la nouvelle invariance de jauge. La présentation de ce terme de masse oblige à clarifier ce qu'on appelle partie droite et partie gauche de l'onde. C'est quelque peu délicat, parce que les notations initiales de la théorie comportent un temps imaginaire, ce qui correspond implicitement à prendre un temps $\mathrm{x}^4 = ict$, et une signature + + + - pour l'espace-temps. Si l'on prend comme repère premier le fait que $(J^0)^2$ est le carré d'une quantité nécessairement positive il est quelque peu dérangeant d'avoir comme pseudo-norme $J \cdot J = -\rho^2$, ρ étant la quantité notée D dans les notes de 1956. Donc pour ne pas mélanger plus longtemps les signes, ni risquer d'appeler droit ce qui est gauche et inversement, nous nous devons de donner des notations simples et de nous y tenir. Mais pour ce faire, un détour par la question du langage s'impose.

4.1 Aparté sur la langue mathématique

Georges Lochak nous le redit avec solennité dans son testament scientifique : «*La Fondation a été créée par Louis de Broglie et par moi-même et je me permets, pour une fois, de me mettre en parallèle avec lui en proclamant notre égal attachement à la langue française. C'est un principe de notre fondation auquel il est hors de question de déroger. Certes, il est souvent utile et même inévitable, pour des raisons de communi-*

1. Attention, ce produit scalaire est à valeur réelle et n'a rien à voir avec le produit scalaire hermitien de la théorie quantique non relativiste, à valeur complexe et qui comporte en outre une intégration de la densité de probabilité sur tout l'espace.

cation, de parler ou d'écrire dans une langue étrangère. Actuellement, en général c'est de l'anglais qu'il s'agit ou, plus souvent, d'un pidgin international qu'on fait passer pour la langue de Shakespeare. Mais on ne conçoit et même on ne comprend vraiment, et surtout on n'exprime une chose importante que dans sa langue maternelle. Ainsi, Einstein parlait le français mais quand il recevait une lettre de Louis de Broglie, il se la faisait traduire en allemand (c'est lui qui l'a raconté). Inversement, de Broglie connaissait très bien l'allemand mais quand il recevait une lettre d'Einstein, il la traduisait lui-même en français.» On sait depuis Galilée que la géométrie est la langue de la physique. Quand Galilée ou Newton utilisaient le vocabulaire de la géométrie, il n'y avait pas d'ambiguïté sur ce qu'il signifiait, parce qu'il n'y avait qu'une géométrie, celle qui décrivait l'espace dans lequel nous nous mouvons. La découverte des géométries (sphérique, hyperbolique, différentielle, d'espace-temps, des espaces de configuration...) ressemble à la découverte, par un jeune enfant, qu'il existe d'autres langues que celle de sa mère. L'algèbre de Clifford peut être comparée à un de ces langages, ou plutôt à une famille de différentes sous-langues. Car il existe une algèbre de Clifford pour chaque géométrie euclidienne ou pseudo-euclidienne, et chacune a ses particularités. Il était nécessaire d'en parler ici, parce que la théorie du monopôle a été pensée dans la langue de la mécanique quantique relativiste, c'est-à-dire de l'algèbre des matrices complexes 4×4 utilisée par Dirac en 1928. Cette algèbre est aussi une algèbre de Clifford, et même pour trois géométries différentes, toutes trois de dimension nonpas 4 comme on l'attendrait mais 5, et de signature $+ + + +$ - ou $+ +$ - - - ou - - - - -. Certes cette algèbre des matrices de Dirac peut être utilisée pour toutes ses sous-algèbres, comme l'espace-temps à temps imaginaire et signature $+ + + +$ de la théorie du monopôle. Mais quand on veut faire le lien avec la géométrie différentielle de la relativité générale, à temps réel, on est forcément obligé de traduire. Et quand on passe son temps en traductions pénibles, on rêve forcément d'une langue universelle dans laquelle on n'aurait plus besoin de traduction. C'est un des multiples aspects de la « quête de la simplicité logique » que raconte le chapitre 10 de « la géométrisation de la physique ».

Or une telle langue universelle (pour toute la physique) existe, parce que, au moins en première approximation, la géométrie euclidienne dite « de l'espace » suffit. Elle suffit aux architectes pour bâtir nos maisons et monuments, elle suffit aux ingénieurs qui peuvent maintenant directement travailler « en 3D », elle suffit aux physiciens parce qu'elle seule connait les produits vectoriels de nos moments cinétiques ou du champ magnétique [2]. Dans le champ électromagnétique $F = \vec{E} + i\vec{H}$ cette géométrie relie et distingue aisément le vecteur champ électrique $\vec{E}$ du pseudo-vecteur champ magnétique $i\vec{H}$. Elle suffit aux astronomes, parce que l'espace observé à très grande échelle est plat. Elle suffit aussi pour une raison plus subtile : l'espace-temps de Minkowski n'est pas le meilleur langage, parce que le temps n'est pas l'espace, qu'il est irréversible tout comme l'espace est orientable, indépendamment du temps. Ceci surprend beaucoup les habitués de la relativité générale et de la courbure d'espace-temps, qui n'ont aucun besoin d'un temps orienté ni d'une différence entre droite et gauche. Mais eux aussi peuvent utiliser ce langage commun, parce que c'est tout l'espace-temps qui est la partie auto-adjointe de l'algèbre d'espace. Donc il vaut mieux ne pas trop s'éloigner de la bonne vieille géométrie, ce que nous ferons en utilisant désormais comme base de tous nos calculs l'algèbre de Clifford Cl_3, construite sur l'espace à trois dimensions.

4.2 La chiralité des ondes quantiques vient de l'espace-temps

L'espace-temps et Cl_3 ne sont vraiment pas des nouveautés en physique, l'espace-temps date de 1905 et Cl_3 a été introduit en physique quantique dès 1927 par Pauli pour obtenir une équation d'onde rendant compte du spin 1/2 de l'électron. L'algèbre de Pauli est l'algèbre engendrée par les trois matrices 2×2 complexes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{10}$$

Le terme général de l'algèbre prend la forme $M = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$ où les z_n sont quatre nombres complexes. Cette algèbre est donc aussi un espace vectoriel de dimension 4 sur le corps des nombres complexes, et comme on peut écrire ces nombres complexes $z_n = x_n + iy_n$ l'algèbre de Pauli est de dimension 8 sur le corps des nombres réels. C'est pourquoi on peut l'identifier à l'algèbre de Clifford Cl_3, de dimension $8 = 2^3$. Le groupe $SU(2)$ des matrices 2×2 unitaires (3 dimensions) est un sous-groupe de Lie du groupe (à 6 dimensions) $SL(2, \mathbb{C})$ (matrices de déterminant 1) qui est lui-même un sous-groupe du groupe (à 8 dimensions) $Cl_3^* =$

2. Ceci est rarement enseigné aux étudiants en physique : le produit vectoriel n'existe qu'en dimension 3, seule dimension pour laquelle l'espace vectoriel des pseudo-vecteurs est de même dimension que l'espace des vecteurs.

$GL(2,\mathbb{C})$ (matrices inversibles, de déterminant non nul). C'est le groupe multiplicatif de Cl_3. L'algèbre de Lie de ce groupe n'est autre que Cl_3. De plus la partie auto-adjointe de Cl_3, c'est-à-dire l'ensemble des M tels que $M = M^\dagger$ (adjoint=transposé-conjugué) est aussi l'ensemble des :

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} \mathrm{x}^0 + \mathrm{x}^3 & \mathrm{x}^1 - i\mathrm{x}^2 \\ \mathrm{x}^1 + i\mathrm{x}^2 & \mathrm{x}^0 - \mathrm{x}^3 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

On peut donc associer à tout point-événement de l'espace-temps un tel x, en identifiant réels et matrices scalaires, et en identifiant x^0 à ct. En outre, M étant un élément quelconque de Cl_3, la transformation R qui à tout x fait correspondre $\mathrm{x}' = M\mathrm{x}M^\dagger$ vérifie :

$$\det(\mathrm{x}') = \det(M)\det(\mathrm{x})\det(M^\dagger) = |\det(M)|^2 \det(\mathrm{x}). \tag{12}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{x}) &= (\mathrm{x}^0 + \mathrm{x}^3)(\mathrm{x}^0 - \mathrm{x}^3) - (\mathrm{x}^1 + i\mathrm{x}^2)(\mathrm{x}^1 - i\mathrm{x}^2) \\ &= (\mathrm{x}^0)^2 - (\mathrm{x}^1)^2 - (\mathrm{x}^2)^2 - (\mathrm{x}^3)^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Et par conséquent, si l'on note r le module de $\det(M)$ et θ son argument ($\det(M) = re^{i\theta}$), et si on note R^ν_μ la matrice de la transformation R, on obtient (voir par exemple [36] A.4.4 et A.4.5) :

$$\begin{aligned}(\mathrm{x}'^0)^2 - (\mathrm{x}'^1)^2 - (\mathrm{x}'^2)^2 - (\mathrm{x}'^3)^2 = r^2[(\mathrm{x}^0)^2 - (\mathrm{x}^1)^2 - (\mathrm{x}^2)^2 - (\mathrm{x}^3)^2], \\ \mathrm{x}'^\nu = R^\nu_\mu \mathrm{x}^\mu;\ \det(R^\nu_\mu) = r^4. \end{aligned} \tag{14}$$

Ce résultat n'est pas du tout trivial, puisqu'il relie le déterminant $\det(R^\nu_\mu)$ d'une matrice 4×4 à coefficients réels à la puissance 4 du module du déterminant $\det(M)$ d'une matrice 2×2 à coefficients complexes ! Et pourtant l'égalité est vraie pour tout événement x et toute matrice M. Il en résulte que la transformation R est la composée d'une homothétie de rapport r et d'une transformation de Lorentz, c'est donc une similitude de rapport r. En outre l'application qui à M associe R est un homomorphisme du groupe Cl_3^* dans le groupe des similitudes conservant et la flèche du temps et l'orientation de l'espace. Ensuite pour justifier le titre de cette section, il convient d'introduire les trois conjugaisons de Cl_3. Une matrice quelconque de Cl_3 peut s'écrire :

$$M = a_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 + a_4 i\sigma_1 + a_5 i\sigma_2 + a_6 i\sigma_3 + ia_7, \tag{15}$$

où les a_n sont 8 réels quelconques. Les conjugaisons sont définies par :

$$\widehat{M} := a_0 - a_1\sigma_1 - a_2\sigma_2 - a_3\sigma_3 + a_4 i\sigma_1 + a_5 i\sigma_2 + a_6 i\sigma_3 - ia_7, \quad (16)$$

$$M^\dagger := a_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 - a_4 i\sigma_1 - a_5 i\sigma_2 - a_6 i\sigma_3 - ia_7, \quad (17)$$

$$\overline{M} := a_0 - a_1\sigma_1 - a_2\sigma_2 - a_3\sigma_3 - a_4 i\sigma_1 - a_5 i\sigma_2 - a_6 i\sigma_3 + ia_7. \quad (18)$$

La seconde et la troisième de ces conjugaisons inversent l'ordre des produits, et chacune est le produit des deux autres, donc la première conserve l'ordre des produits, c'est l'automorphisme principal de Cl_3. Il en résulte l'existence d'un second homomorphisme de l'ensemble des M dans l'ensemble des R, celui qui à $\widehat{M}$ associe R. C'est là l'origine de la chiralité en mécanique quantique. On appelle spineur droit un spineur qui est multiplié par M quand x est transformé en x′ et spineur gauche un spineur qui est multiplié par $\widehat{M}$. Plus précisément un spineur droit est une fonction de l'espace-temps dans $\mathbb{C}^2$: $\mathrm{x} \mapsto \xi(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ telle que, dans la transformation géométrique R de (14) induite par M on ait $\xi' = M\xi$. Et un spineur gauche est une fonction de l'espace-temps dans $\mathbb{C}^2$: $\mathrm{x} \mapsto \eta(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}$ telle que, dans la transformation géométrique R de (14) induite par M on ait $\eta' = \widehat{M}\eta$.

4.3 Le monopôle magnétique à partir de l'équation de Dirac

Le point de départ de Georges Lochak est l'équation d'onde de Dirac de l'électron, écrite à partir des deux spineurs, le droit ξ et le gauche η, constituant ensemble l'onde de l'électron, qui s'écrit, avec $q = e/\hbar c$:

$$0 = \sigma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu)\eta + im\xi, \quad (19)$$

$$0 = \widehat{\sigma}^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu)\xi + im\eta. \quad (20)$$

Dans ce système d'équations, on utilise uniquement les matrices de Pauli, avec les notations :

$$\sigma_0 = \sigma^0 = \widehat{\sigma}_0 = 1;\ \widehat{\sigma}^k = -\sigma^k = \sigma_k, k = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Les A_μ sont les composantes covariantes du vecteur d'espace-temps potentiel électromagnétique, dont la composante de temps est le potentiel électrique. On utilise un indice μ allant de 0 à 3, avec $x^0 = ct$. Ce n'est pas de tradition en mécanique quantique, mais c'est bien commode chaque fois qu'on veut distinguer le temps des coordonnées d'espace. Ces spineurs gauches et droits sont essentiels, depuis la découverte de la non-conservation de la parité dans les interactions faibles, un point sur lequel Georges Lochak a beaucoup insisté. Cela se traduit en théorie de Dirac d'abord par le fait que les courants j et s de (9) sont liés aux courants droits et gauches dont ils sont respectivement somme et différence. Pour le comprendre on peut raccourcir encore les notations en posant :

$$\nabla := \sigma^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^1} - \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^2} - \sigma_3 \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^3}, \tag{22}$$

$$A := \sigma^\mu A_\mu = A_0 - A_1\sigma_1 - A_2\sigma_2 - A_3\sigma_3. \tag{23}$$

Ceci permet d'écrire l'équation de Dirac sous la forme du système :

$$0 = (\nabla + iqA)\eta + im\xi, \tag{24}$$

$$0 = (\widehat{\nabla} + iq\widehat{A})\xi + im\eta. \tag{25}$$

Le terme de masse, $m = m_0 c/\hbar$ où m_0 est la masse propre de l'électron, relie les dérivées partielles de ξ aux composantes de η et inversement. On a présenté ici la véritable équation de Dirac, celle qui donne les bons résultats expérimentaux dans le cas des électrons atomiques. Trop souvent l'équation est présentée sans le terme de jauge iqA, comme si l'onde de l'électron n'était pas invariante de jauge et pouvait ne pas interagir avec les autres charges électriques. C'est désastreux, d'un point de vue pédagogique, de présenter l'électron, dont la charge est quantifiée, invariable quoi que l'on fasse à l'électron, comme si on pouvait lui enlever et lui remettre à volonté sa charge.

L'invariance relativiste de l'équation n'est pas du tout triviale, on démontre en effet que, dans la transformation R, induite par un M fixe quelconque, qui transforme x en x′ et avec $\nabla' = \sigma^\mu \partial'_\mu$ on a :

$$\nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M};\; A = \overline{M}A'\widehat{M};\; \overline{M} = \det(M)M^{-1}, \tag{26}$$

$$0 = \overline{M}[(\nabla' + iqA')(\widehat{M}\eta) + i\det(M^{-1})m(M\xi)], \tag{27}$$

$$0 = M^\dagger[(\widehat{\nabla}' + iq\widehat{A}')(M\xi) + i\det(M^\dagger)^{-1}m(\widehat{M}\eta]. \tag{28}$$

Si donc on se restreint à prendre M seulement dans $SL(2,\mathbb{C})$, c'est-à-dire à imposer $\det(M) = 1$, en posant $\eta' = \widehat{M}\eta$ et $\xi' = M\xi$ le système d'équation devient, dans les coordonnées x′ :

$$0 = (\nabla' + iqA')\eta' + im\xi', \tag{29}$$

$$0 = (\widehat{\nabla}' + iq\widehat{A}')\xi' + im\eta'. \tag{30}$$

Ceci permet de dire que l'équation est invariante (de forme) relativiste. On remarquera que c'est dans la manière dont ξ et η se transforment sous une transformation de Lorentz que se différencient ondes droites et ondes gauches. Outre l'invariance de forme, une autre règle d'invariance, l'invariance de jauge, est bien connue en mécanique quantique et se retrouve ici inchangée par rapport à la mécanique quantique non relativiste. En effet on peut toujours ajouter à la phase des ondes $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ la même quantité a, à condition de compenser A par une quantité adéquate :

$$\xi_1' = e^{ia}\xi_1;\ \xi_2' = e^{ia}\xi_2;\ \eta_1' = e^{ia}\eta_1;\ \eta_2' = e^{ia}\eta_2;\ A' = A - \frac{1}{q}\nabla a, \quad (31)$$

$$0 = (\nabla + iqA')\eta' + im\xi', \quad (32)$$

$$0 = (\widehat{\nabla} + iq\widehat{A}')\xi' + im\eta'. \quad (33)$$

Comment se calcule l'angle A des notes de 1956 ? Les ondes droites et gauches permettent de former deux densités Ω_1 et Ω_2 à la fois invariantes relativistes et invariantes de jauge :

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = 2\eta^\dagger\xi = 2(\bar{\eta}_1\xi_1 + \bar{\eta}_2\xi_2) = \rho e^{i\beta} \quad (34)$$

(nous notons dorénavant β l'angle d'Yvon-Takabayasi, la lettre A étant en service pour le potentiel électromagnétique). Ainsi l'angle d'Yvon-Takabayasi est un angle dans le plan des invariants relativistes. Ceci est typique des « symétries internes » qui ont envahi la physique des particules, nommées ainsi parce qu'on ne sait pas les voir comme des symétries par rapport à des droites ou plans de l'espace. On peut améliorer encore la simplicité des écritures et le rapprochement avec la géométrie en présentant l'onde de manière similaire aux coordonnées d'espace-temps, c'est-à-dire en mettant ensemble ξ et η, posant (pour plus de détails, voir [36] 1.3) :

$$\phi = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \xi_1 & -\bar{\eta}_2 \\ \xi_2 & \bar{\eta}_1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Ceci revient à considérer l'onde de l'électron comme une fonction de la partie auto-adjointe de Cl_3 dans Cl_3. On a alors :

$$\widehat{\phi} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \eta_1 & -\bar{\xi}_2 \\ \eta_2 & \bar{\xi}_1 \end{pmatrix};\ \phi^\dagger = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 \\ -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix};\ \overline{\phi} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Ainsi la conjugaison $M \mapsto \widehat{M}$ échange les ondes gauches et droites, cette conjugaison est appelée en physique des particules P (parité). Les invariants et l'équation d'onde deviennent respectivement :

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = \det(\phi);\ 0 = \nabla\widehat{\phi}\sigma_2\sigma_1 + qA\widehat{\phi} + m\phi. \tag{37}$$

Les courants, dorénavant notés $\mathrm{D}_0 = J$ et $\mathrm{D}_3 = K$ (au lieu des j et s de la note), ainsi que les courants gauches et droits D_L (Left) et D_R (Right) vérifient :

$$\mathrm{D}_\mu = \phi\sigma_\mu\phi^\dagger,\ \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{38}$$

$$\mathrm{D}_R = \phi\frac{1+\sigma_3}{2}\phi^\dagger;\ \mathrm{D}_L = \phi\frac{1-\sigma_3}{2}\phi^\dagger, \tag{39}$$

$$\mathrm{D}_0 = \mathrm{D}_R + \mathrm{D}_L;\ \mathrm{D}_3 = \mathrm{D}_R - \mathrm{D}_L. \tag{40}$$

Ce que Georges Lochak a compris pendant sa conférence en l'honneur de René Thom, c'est qu'il existe, pour l'onde de Dirac, c'est-à-dire pour le couple formé par un spineur droit ξ et un spineur gauche η, une autre invariance de jauge possible, dans laquelle c'est non plus la phase électrique, mais l'angle d'Yvon-Takabayasi qui tourne :

$$\begin{aligned} &\phi \mapsto \phi' = e^{ia}\phi;\ \Omega_1' + i\Omega_2' = \det(\phi') = e^{2ia}\det(\phi) = e^{2ia}(\Omega_1 + i\Omega_2) \\ &\quad \rho e^{i\beta'} = e^{2ia}\rho e^{i\beta};\ \beta' = 2a + \beta. \end{aligned} \tag{41}$$

Comme la première colonne de ϕ contient ξ tandis que la seconde contient $\widehat{\eta}$ les spineurs gauches et droit tournent du même angle dans cette invariance de jauge, mais en sens inverse ! Et ceci est effectivement la différence entre la symétrie d'un champ électrique et celle d'un champ magnétique, que Georges Lochak tenait de Pierre Curie. C'est pourquoi le monopôle magnétique ne peut en aucun cas se ramener à l'électron et à l'électricité, et c'est aussi pourquoi la découverte de cette seconde jauge est tout à fait originale et définitive. En 1956 six des 8 paramètres de l'onde relativiste de l'électron avaient reçu une interprétation géométrique, puisqu'ils donnaient une transformation géométrique. Le 7ème angle devient aussi membre d'un groupe qu'on peut qualifier de géométrique puisque construit sur l'algèbre de la géométrie de l'espace.

4.4 Terme de jauge, terme de masse

La nouvelle jauge fonctionne seulement avec le terme différentiel de l'équation d'onde, elle est incompatible avec le terme de masse de l'équation d'onde de l'électron, parce que ce terme lie les parties droite et gauche de l'onde, qui tournent en sens inverse. Le courant associé à cette seconde invariance de jauge n'est plus le courant D_0, mais le courant D_3. La nouvelle jauge peut être rendue locale si on ajoute un terme de potentiel adéquat :

$$0 = (\nabla + iQB)\widehat{\phi};\ Q = \frac{g}{\hbar c};\ B = \sigma^\mu B_\mu, \tag{42}$$

où g est la charge magnétique du monopôle et iB est un pseudo-vecteur d'espace-temps engendrant un champ électromagnétique par $F = \nabla\widehat{iB}$. Comme il faut, dans le terme de masse, compenser le changement de sens, dans la conjugaison de parité, de l'angle β, Georges Lochak a établi que le terme de masse devait être un produit d'une fonction de la densité invariante ρ par $e^{-i\beta}$. Il a donc proposé une équation qui, avec nos notations, s'écrit :

$$0 = (\nabla + iQB)\widehat{\phi} + m(\rho)e^{-i\beta}\phi\sigma_1\sigma_2. \tag{43}$$

Cette équation est non linéaire puisque ρ et β sont respectivement le module et l'argument de $\det(\phi)$, qui est quadratique par rapport à ϕ. On se doit de saluer le courage qu'il y avait à sortir de la commodité de la linéarité de la mécanique quantique, surtout de la part de quelqu'un qui savait ce qu'il en coûtait en complications de toute sorte. En cela aussi, il était fidèle à l'audace de Louis de Broglie, qui pensait qu'en physique les lois linéaires ne sont jamais que les approximations linéaires des vraies lois, qui sont elles toujours non linéaires. Notons en passant qu'Hestenes n'a fait que réécrire l'équation de Dirac, sans toucher à sa linéarité. C'est cette équation d'onde non linéaire que Georges Lochak a étudiée, ainsi que le cas beaucoup plus simple où $m(\rho)$ est nul, et où l'on retombe sur une équation aux dérivées partielles linéaire. Elle est invariante relativiste dans la transformation générale indiquée précédemment, puisque $\phi' = M\phi$ implique $\det(\phi') = \det(M)\det(\phi) = \det(\phi)$ dès que $\det(M) = 1$. Notons en passant que cette condition, suffisante, n'est pas nécessaire, car ce dont nous avons seulement besoin est que $\overline{M}$ puisse être en facteur à gauche de chaque terme. Le groupe d'invariance de l'équation d'onde du monopôle peut donc être plus vaste que le seul groupe de Lorentz ou de Poincaré.

5 Difficultés de la théorie du monopôle magnétique

Les difficultés d'une équation d'onde non linéaire se sont accompagnées d'autres problèmes. Certains ont été résolus dès les articles de 1983-1985, comme le fait que le courant K, contrairement au courant J de probabilité est du genre espace et non du genre temps. Georges Lochak a expliqué que les courants fondamentaux étaient les courants droit D_R et gauche D_L de (39)dont les courants J et K sont respectivement somme et différence. Ces courants chiraux ne sont ni du genre temps ni du genre espace, ils sont de carré scalaire nul, comme la lumière. Le raccord avec la mécanique quantique n'est pas simple, notamment parce que, ne connaissant pas les courants droit et gauche, sans équivalent en mécanique quantique non relativiste, la conservation de l'électricité s'y déduit de l'invariance de jauge locale électrique, compensée par une variation locale de la phase de l'onde. Et cette conservation fait partie de ce que l'on obtient en appliquant le théorème très général démontré par la mathématicienne Emmy Noether sur le lien entre invariance d'un lagrangien et loi de conservation. Le théorème de Noether n'a besoin, pour la conservation du courant électrique, que d'une invariance globale de la phase, et cette invariance globale est satisfaite, tant pour la charge électrique que pour la charge magnétique. D'autre part la seule chose qui s'obtienne en utilisant le théorème de Noether est la conservation de la charge, mais avec une valeur quelconque, non quantifiée.

La croyance dominante de toute la physique contemporaine est l'universalité de l'onde quantique régie par une équation de Schrödinger ou au moins du type Schrödinger à hamiltonien modifié, et de l'invariance de jauge locale électrique associée au courant de probabilité. On publie encore aujourd'hui des travaux utilisant l'équation de Dirac dans lesquels on affirme que toutes les densités calculées sans dérivation sont nécessairement combinaisons linéaires des 16 densités connues dès 1934, alors que ces densités ne sont pas complexes mais à valeur réelle d'une part, et d'autre part qu'il en existe 36 (on en trouvera le détail notamment en [36] A.4) et non pas 16. Certes ces 16 densités sont les seules, parmi les 36 constructibles à partir des spineurs droit et gauche de l'onde électronique (ou de l'onde du monopôle magnétique), à être invariantes de jauge électrique, mais l'électron n'est pas doté que d'interaction électrique, il est aussi actif dans les interactions faibles. On le sait depuis qu'on a observé la radioactivité bêta. De même le monopôle magnétique n'a certes pas d'interaction purement électrique, puisque son équation d'onde ne contient pas de terme qA, mais il « voit » aussi les charges électriques par produit vectoriel avec le champ électrique, comme l'a expliqué Georges Lochak, ce qui aboutit à la quantification à la fois de la charge électrique et de la charge du monopôle, à partir de la quantification du moment cinétique (c'est l'invariance sous le groupe des rotations qui donne un moment cinétique constant). Georges Lochak a retrouvé le résultat de Dirac de très belle manière à partir de la seule invariance sous le groupe des rotations. Et comme il n'y a toujours pas d'autre explication permettant de comprendre la quantification de la charge électrique, il faut bien que le monopôle magnétique prévu par Maxwell et par Dirac existe, puisque la charge, on le sait, est quantifiée.

L'autre énorme difficulté vient de ce que chacun de nous s'attend à des propriétés, pour toutes les particules élémentaires, qui sont celles auxquelles nous nous sommes habitués pour les particules de nos accélérateurs et les photons de la lumière. Tous les expérimentateurs s'attendent à ce que la masse soit quantifiée, parce que les électrons, ou les protons, etc. ont tous la même masse propre, c'est même une caractéristique de chaque type de particule. Mais c'est ainsi parce que tous ces objets sont invariants sous le groupe de Poincaré. Or le groupe d'invariance de l'équation d'onde du monopôle ne contient pas le groupe de Poincaré (à cause de la conservation de la flèche du temps et de l'orientation de l'espace) et n'est pas contenu dans ce même groupe de Poincaré (transformations de Lorentz plus translations), à cause du rapport d'homothétie qui peut être différent de 1. Donc nous ne savons pas si les monopôles magnétiques ont une unique masse propre, il se pourrait que l'onde gauche ait une masse propre différente de celle de l'onde droite. L'équation d'onde du monopôle n'a pas pour approximation non relativiste l'équation de Schrödinger, parce que la phase unique de celle-ci est la phase commune aux quatre composantes complexes de l'onde et ne peut pas tolérer que deux d'entre elles puissent tourner en sens inverse des deux autres ! Ceci heurte de plein fouet les prétentions de la mécanique quantique axiomatique postulant, pour tout système quantique, une équation de Schrödinger adaptée à ce système.

Autre difficulté, la théorie quantique en vigueur englobe dans un même moule théorique les bosons et les fermions. Elle prétend que ce moule est absolument nécessaire au calcul des probabilités qui est son fonds de commerce principal. Ce calcul des probabilités utilise la loi normale comme critère suprême et universel. Or celui-ci n'a aucune raison de s'appliquer, et d'ailleurs ne s'applique jamais, aux fermions comme l'électron ou le monopôle magnétique : quand on élabore, pour les électrons, une théorie (inégalités de Bell) valable pour fermions et bosons, on n'arrive à monter un dispositif expérimental que pour des photons, et c'est déjà un travail formidable. Mais on a tendance à oublier que, sur une seule onde électronique, on ne peut pas avoir deux électrons dans le même état quantique (principe de Pauli). Comme il est bien possible que ce soit la même chose avec les monopôles magnétiques, on n'aurait jamais la possibilité de faire des statistiques et de calculer des écarts-types à partir d'une seule et unique onde, alors qu'on peut toujours le faire avec les myriades de photons d'un laser. Est-ce à dire qu'on ne peut pas valider les lois théoriques par des statistiques basées sur les expériences ? Non bien sûr, mais il faudra faire appel aux lois de Poisson, valables aussi pour les événements rares, pas en premier et uniquement à la loi normale.

Georges Lochak a continué d'explorer toutes les pistes possibles, comme les états de Majorana [24], ainsi que le cas plus simple d'une masse nulle qui permet un découplage entre spineur droit et gauche. Il s'est quelque peu fâché avec son équation non linéaire, à cause des symétries CPT qui ne sont pas sans changement par rapport à l'onde de l'équation linéaire de Dirac [25] [26]. En fait la conjugaison de charge est simplement la symétrie PT, il suffit de ne changer, dans l'équation d'onde, que le signe devant le terme différentiel pour obtenir l'équation d'onde de l'antiparticule (voir [36] 1.5.6).

Par la suite la recherche est devenue expérimentale avec la rencontre de L. Urutskoev, mais d'autres que nous sont plus qualifiés et raconteront cette partie du travail de Georges Lochak

6 Plus loin dans la géométrisation de la physique

D'abord l'onde de l'électron, ou du monopôle magnétique, ne contient pas seulement 7 paramètres mais 8. C'est la première raison pour laquelle on peut prendre comme ensemble des valeurs de l'onde de l'électron ou du monopôle magnétique, Cl_3, de dimension 8. Comme l'algèbre d'espace-temps d'Hestenes, $Cl_{1,3}$, est de dimension 16 et comme l'algèbre des matrices de Dirac est de dimension 16 sur le corps des complexes, donc de dimension 32 sur le corps des réels, l'utilisation de ces algèbres pose une question supplémentaire : pourquoi l'onde est-elle à 8 paramètres seulement, pas à 16 ou à 32 ? Il devait donc être possible de raconter toute la théorie de Dirac en utilisant seulement Cl_3.

Le terme de masse de l'équation d'onde du monopôle magnétique est invariant relativiste, il est aussi invariant de jauge électrique, donc il peut convenir à l'équation d'onde de l'électron. Pour l'électron, dont l'équation de Dirac donne les états atomiques avec beaucoup de précision, on peut avoir intérêt à effectuer des changements a minima en ce qui concerne l'équation d'onde. C'est pourquoi l'un de nous, avec l'aide et le support de Georges Lochak [21], a choisi comme terme de masse celui qui diffère le moins du cas linéaire. En effet, pour l'équation de Dirac linéaire la densité lagrangienne prend la forme :

$$\mathcal{L} =< \overline{\phi}(\nabla\widehat{\phi})\sigma_{21} + \overline{\phi}qA\widehat{\phi} > +m\rho\cos\beta, \tag{44}$$

où $< X >$ est la partie scalaire de X. Prendre le terme de masse de l'équation du monopôle revient à supprimer le $\cos\beta$, ce qui donne [23] :

$$\mathcal{L} =< \overline{\phi}(\nabla\widehat{\phi})\sigma_{21} + \overline{\phi}qA\widehat{\phi} > +m\rho, \tag{45}$$

On peut dire aussi que cela revient à se placer dans le cas où l'équation n'est plus additive, mais où elle reste telle que, si ϕ est une solution et z un nombre complexe fixe quelconque, alors $z\phi$ est aussi solution de l'équation d'onde. La normalisation de l'onde est une question qui n'est alors pas différente du cas linéaire. L'équation d'onde est équivalente à :

$$0 = \nabla\widehat{\phi}\sigma_{21} + qA\widehat{\phi} + me^{-i\beta}\phi. \tag{46}$$

La comparaison avec l'équation d'onde du monopôle montre que cela revient à prendre pour la fonction $m(\rho)$ de l'équation d'onde générale du monopôle une simple fonction constante. L'équation d'onde se réduit alors à l'équation de Dirac lorsque l'angle d'Yvon-Takabayasi est nul ou négligeable. On peut facilement montrer que l'équation résout la question des énergies négatives, et beaucoup plus difficilement résoudre l'équation d'onde complètement pour le cas de l'atome d'hydrogène [38] [39]. Il est tout à fait remarquable que cette équation d'onde, malgré son caractère non linéaire, comporte un même ensemble de solutions, avec les mêmes nombres quantiques et les mêmes niveaux d'énergie. Ceci indique que la quête d'une équation d'onde non linéaire pour la physique de l'électron n'était pas un rêve inaccessible.

Le huitième paramètre des notes de 1956, $\rho = e^{\alpha(\mathrm{x})}$ n'a été interprété comme paramètre géométrique ni par Georges Lochak ni par David Hestenes dix ans plus tard. Ils lui ont attribué un rôle statistique. Certes on sait faire des statistiques à partir des myriades d'électrons contenus dans les atomes de tous nos matériaux. Mais chacun de ces électrons a sa propre onde, donc le paramètre ρ, qui se calcule à partir de l'onde d'un seul électron, ne peut pas être interprété comme un paramètre statistique. D'ailleurs c'est un autre paramètre qui est assimilable à une probabilité, paramètre lié à la composante de temps J^0 du courant J, qui se réduit à la densité de probabilité de l'onde non relativiste de l'électron. Cette erreur sur la signification de ρ est d'autant plus bizarre que Georges Lochak, dans son chapitre 11 de « la géométrisation de la physique », « Le retour des épicycles », a expliqué avec beaucoup de clarté les invariances de jauge, globale et locale, ainsi que le théorème de Noether. Il raconte aussi comment la première théorie de jauge, celle de Hermann Weyl (elle correspondait exactement à notre paramètre $\rho = e^{\alpha(\mathrm{x})}$) a été contrée par Einstein, mais plus tard, en 1927, London a remarqué qu'il suffisait de multiplier cette phase par i pour obtenir la manière dont Fock reliait l'invariance de la phase de l'onde quantique avec l'électromagnétisme.

Pour interpréter géométriquement ρ il suffit (et c'est probablement ce qui a manqué à Georges Lochak en 1956) de prendre l'onde ϕ de l'électron, ou du monopôle, comme une fonction de l'espace et du temps à valeur non pas dans $\mathbb{C}^4$ (où il n'existe pas de produit interne) mais dans l'algèbre Cl_3 des M. Donc on peut associer à l'onde en chaque point une transformation géométrique, qui est la composée d'une transformation de Lorentz et d'une homothétie dont le rapport est le module du déterminant de ϕ, c'est-à-dire ρ. Donc la densité ρ aussi a un sens géométrique : c'est un rapport d'homothétie (un facteur local d'échelle donc) [32].

Considérons à nouveau, avec les matrices de Dirac et les fonctions à valeur dans $\mathbb{C}^4$ pour l'onde de l'électron ou du monopôle, la propriété d'homogénéité (c'est-à-dire le fait que si ψ est une solution et z un nombre réel quelconque, alors $z\psi$ est aussi une solution). On sait qu'elle est liée au fait que, pour toute solution de l'équation d'onde, la densité lagrangienne est exactement nulle. Cette propriété n'est pas reconnue à sa juste importance, elle est seulement vue comme une des deux propriétés de la linéarité. Or si l'on regarde comment Hestenes écrit cette même équation de Dirac, découlant de la même densité lagrangienne réelle, si Ψ est une solution de l'équation d'onde et k un réel, alors $k\Psi$ est une solution. Mais ça ne marche plus avec k complexe, parce que la non-commutativité de l'algèbre l'interdit. Remarquons en passant que cela suffit à justifier que l'équation de Dirac n'est pas une sorte d'équation de Schrödinger. Or la simplification de la densité lagrangienne qu'apporte le terme de masse du monopôle rétablit la propriété avec z complexe : si ϕ, à valeur dans Cl_3 est une solution de l'équation d'onde et z un nombre complexe quelconque, alors $z\phi$ est solution de l'équation d'onde, comme dans le cas non relativiste.

La dualité qui se manifeste par les deux crochets de Poisson semblables (6) et (9) est une partie de la dualité correspondant à l'existence conjointe d'une onde droite et d'une onde gauche. Cette dualité se retrouve dans toutes les densités qu'on calcule à partir de l'onde de l'électron (ou du monopôle). Ainsi la densité lagrangienne est somme d'une partie droite et d'une partie gauche, il existe non pas un seul mais deux tenseurs d'impulsion-énergie, l'autre ayant été pointé par O. Costa de Beauregard [27]. Il existe de même deux tenseurs d'impulsion-énergie pour le monopôle magnétique, l'un étant somme et l'autre différence des tenseurs venant des parties droite et gauche de l'onde.

On peut aller encore plus loin dans la géométrisation de la physique. En effet nous avons dit que, pour l'onde $\phi = \phi(\mathrm{x})$ du monopôle ou de l'électron, $\phi(\mathrm{x})$ et x appartenaient tous deux à Cl_3. Nous pouvons même dire que l'ensemble des valeurs, pour l'électron, est réduit à la partie Cl_3^* de Cl_3, autrement dit ρ n'est jamais nul. Ce résultat a été établi en calculant, pour l'atome d'hydrogène, d'autres solutions de l'équation d'onde de Dirac que celles calculées en 1928 par C.G. Darwin, et qui vérifient, pour toutes les solutions correspondant aux différents états atomiques, et en tout point, la propriété $\det(\phi) \neq 0$ (voir [36] chapitre C). Cette géométrisation de la totalité de l'onde quantique de l'électron se fait non pas à l'intérieur d'un groupe de transformations géométriques classiques (rotations, translations, etc) mais, et parce que la note de 1956 comporte des angles divisés par 2, à l'intérieur du groupe Cl_3^*, c'est-à-dire du groupe linéaire à deux dimensions, groupe des transformations linéaires de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$.

Ceci réunifie aussi les deux manières dont la géométrisation de la physique a avancé depuis Maxwell. Lorsque Albert Einstein s'est passé de l'éther pour décrire l'électrodynamique des corps en mouvement, il a changé le statut de l'espace-temps comme devenant le sujet actif de cette électrodynamique. Puis il a étendu ce changement de statut à la gravitation : dans l'onde gravitationnelle, qui est maintenant sujet à observations, c'est la structure de l'espace-temps qui ondule. Simultanément Albert Einstein a découvert le dualisme onde-particule de la lumière, que Louis de Broglie a généralisé à toute la matière. La physique quantique a ensuite découvert tout un ensemble d'objets (électrons, muons, quarks, neutrinos...) et a décrit leurs interactions comme des groupes de jauge, baptisés "symétries internes", qui agissent sur un fond d'espace-temps, mais pour lesquelles l'espace-temps parait "passif". L'onde quantique (on parle de seconde quantification) apparait comme constituée d'opérateurs

(applications linéaires), notamment opérateurs de création et d'annihilation, agissant sur l'onde elle-même. Ce que nous avons vu pour Cl_3^* est parfaitement conciliable avec cette seconde quantification pour les raisons suivantes :
1- Cl_3^* est un groupe d'opérateurs, agissant sur lui-même si on identifie $\mathbb{C}^2$ aux matrices diagonales à coefficients non nuls. Ce groupe apparaît comme une généralisation de l'invariance de forme de l'équation d'onde.
2- Le groupe End(Cl_3) contient Cl_3^*, il a pour algèbre de Lie $M_8(\mathbb{R})$ qui est aussi l'algèbre de Clifford $Cl_{3,3}$ (de dimension $2^6 = 64$) permettant de décrire la totalité des ondes des 8 fermions d'une "génération" (électron, neutrino-monopôle, quarks u et d avec pour chacun trois états de couleur et une onde à 8 paramètres réels) [34]. Ce groupe contient le groupe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ du modèle standard, d'une manière qui justifie automatiquement l'insensibilité des leptons aux interactions fortes, le confinement des quarks à l'intérieur des protons et des neutrons, ainsi que la quantification du moment cinétique avec la valeur $\hbar/2$ [36] [37].
3- Les deux sortes d'invariance, invariance de forme de l'équation d'onde, invariance de jauge, sont de même nature : existence d'un groupe multiplicatif agissant sur lui-même. La seule différence est que l'invariance de forme est contrainte par la multiplication par les opérateurs différentiels agissant sur l'onde, tandis que les groupes de jauge, agissant par multiplication de l'autre côté, sont moins contraints et comportent donc plus de degrés de liberté.
4- L'inclusion de l'espace-temps dans Cl_3^*, qui est, en tant que groupe de Lie, aussi une variété différentielle, et de dimension double de celle de la variété d'espace-temps, permet d'obtenir, pour l'espace-temps, le statut d'objet actif, agissant sur lui-même. Un point-événement d'espace-temps est un élément du groupe d'invariance des lois physiques agissant sur l'espace-temps. Le cône de lumière (det(x) = 0) en devient un bord.
5- La jauge chirale de la théorie du monopôle, qui est la partie $U(1)$ du groupe de jauge [35], a pour générateur le i qui commute avec tout élément de Cl_3, donc agit à la fois du côté de la gravitation et du côté de l'invariance de jauge. Georges Lochak a aperçu cette propriété dans le cadre de ses travaux prolongeant ceux de de Broglie sur la lumière [13] [14] [24] [31].
6- Des propriétés qui étaient précédemment postulées, comme la charge fractionnaire des quarks, la valeur de l'angle de Weinberg-Salam, les trois états de couleur des quarks, la préférence pour les ondes gauches, sont obtenus par raisonnement et calcul.

7- On relie la quantification elle-même, celle du moment cinétique d'abord, aux propriétés des ondes de matière. Et de même on relie les principes, comme le principe d'équivalence entre masse gravitationnelle et masse d'inertie, le principe d'exclusion de Pauli [33], le principe de moindre action, aux propriétés des ondes de matière et donc aussi aux propriétés de l'espace-temps lui-même. Ainsi le principe de moindre action, qui se traduit en théorie de Dirac par la nullité de la densité lagrangienne, vient simplement du fait que la nullité de cette densité est la partie réelle de l'équation d'onde sous forme complètement invariante.

Il reste bien des choses à comprendre, le modèle standard de la physique contemporaine comporte encore beaucoup trop de paramètres non calculés pour être définitif. Mais on peut parier que le temps vient où nombre de ces difficultés seront aplanies.

Comme l'a longuement cherché Albert Einstein et tant d'autres après lui, la physique est donc susceptible d'être réunifiée par la géométrisation de toutes les dynamiques en œuvre dans l'univers matériel.

Références

[1] G. Lochak, *La géométrisation de la physique*, Paris, Flammarion, 1994.
[2] L. de Broglie. Recherches sur la théorie des quantas. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 17(1), 1924.
[3] E. Schrödinger. *Annalen der Physik (4)*, 81, 1926.
[4] P.A.M. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proc. R. Soc. Lond.*, 117 :610–624, 1928.
[5] Louis de Broglie. L'électron magnétique. *Hermann*, Paris, 1934.
[6] G. Lochak, Paramètres relativistes de Cayley-Klein dans l'équation de Dirac, C. R. Acad. Sci., 243, 1956, p. 234, en collaboration avec G. Jakobi.
[7] G. Lochak, Décomposition de l'impulsion de Dirac et invariance de jauge, C. R. Acad. Sci., 243, 1956, p. 357, en collaboration avec G. Jakobi.
[8] G. Lochak, Problèmes sur le groupe des rotations et la toupie quantique, Cahiers de Physique., 13, 1959, p. 41 (Thèse de doctorat).
[9] M.A. Naïmark, Les représentations linéaires du groupe de Lorentz, traduit par G. Lochak, Dunod, Paris 1962.
[10] R. Boudet. The Takabayasi moving frame, from a potential to the Z boson. In S. Jeffers and J.P. Vigier, editors, *The Present Status of the Quantum Theory of the Light*. Kluwer, Dordrecht, 1995.
[11] R. Boudet. *Quantum Mechanics in the Geometry of Space-Time*. Springer, Heidelberg Dordrecht London New York, 2011.
[12] Gaston Casanova. *L'algèbre vectorielle*. Presses Universitaires de France, Paris, 1976.

[13] de Broglie, L. (1940). *La mécanique du photon, Une nouvelle théorie de la lumière : tome 1 La lumière dans le vide* (Hermann, Paris).
[14] de Broglie, L. (1942). *tome 2 Les interactions entre les photons et la matière* (Hermann, Paris).
[15] D. Hestenes. Real spinor fields. J. Math. Phys., 8(4) :798–808, 1967.
[16] D. Hestenes. Local observables in the Dirac theory. J. Math. Phys., 14(7) :893–905, 1973.
[17] D. Hestenes. Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory. J. Math. Phys., 16(3) :556–572, 1973.
[18] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, **8** (4), 1983.
[19] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$(partie 2). *Ann. Fond. Louis de Broglie*, **9** (1), 1984.
[20] G. Lochak. Wave equation for a magnetic monopole. *Int. J. of Th. Phys.*, **24** :1019–1050, 1985. Scientific, Singapore, 1990.
[21] C. Daviau, G. Lochak, Sur un modèle d'équation spinorielle non linéaire, Ann. de la Fond. Louis de Broglie, **16**, 1991, p. 43–71
[22] G. Lochak. Un monopôle magnétique dans le champ de Dirac, (Etats magnétiques du champ de Majorana), Ann. de la Fond. Louis de Broglie, **17**, 1992, p. 203–216.
[23] Daviau, C. (1993) Equation de Dirac non linéaire, Thèse, Université de Nantes, France.
[24] G. Lochak. Sur la présence d'un second photon dans la théorie de la lumière de Louis de Broglie, Ann. de la Fond. Louis de Broglie, **20**, 1995, p. 111.
[25] G. Lochak. Les symétries P,T,C, les solutions à énergie négatives et la représentation des antiparticules dans les équations spinorielles, partie I, Annales de la Fondation Louis de Broglie, 22, 1997, p. 1.
[26] G. Lochak. Les symétries P,T,C, les solutions à énergie négatives et la représentation des antiparticules dans les équations spinorielles, partie II, Annales de la Fondation Louis de Broglie, 22, 1997, p. 187.
[27] O. Costa de Beauregard. Sur un tenseur encore ininterprété en théorie de Dirac. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 14-3 :335–342, 1989.
[28] C. Daviau, Sur l'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli, Ann. Fond. Louis de Broglie **22(1)**, p. 87–103, (1997).
[29] C. Daviau, Sur les tenseurs de la théorie de Dirac en algèbre d'espace, Ann. Fond. Louis de Broglie, **23(1)**, p. 27–37 (1998).
[30] C. Daviau, Vers une mécanique quantique sans nombre complexe, Ann. Fond. Louis de Broglie **26(S)**, p. 149–171, (1998).
[31] G. Lochak. « Photons électriques » et « photons magnétiques » dans la théorie du photon de de Broglie (un renouvellement possible de la théorie du champ unitaire d'Einstein), Annales de la Fondation Louis de Broglie 29, 2004, p. 297.

[32] C. Daviau. Retour à l'onde de Louis de Broglie. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 40 :113–138, 2015.
[33] C. Daviau and J. Bertrand. Charge des quarks, bosons de jauge et principe de Pauli. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 40 :181–209, 2015.
[34] C. Daviau and J. Bertrand. Electro-weak gauge, Weinberg-Salam angle. *JMP*, 6 :2080–2092, 2015.
[35] C. Daviau and J. Bertrand. Le monopôle magnétique dans le modèle standard. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 44-1 :163–186, 2019.
[36] C. Daviau, J. Bertrand, T. Socroun, D. Girardot, Developing a Theory of Everything, Ann. Fond. Louis de Broglie, Mémos https ://aflb.minesparis.psl.eu/MEMOS/ToEAFLB.pdf
[37] Daviau, C. and Bertrand, J. (2020) Extended Relativistic In variance, Quantization of the Kinetic Momentum. Journal of Modern Physics, **11**, 1263– 1278. https ://doi.org/10.4236/jmp.2020.119079
[38] Daviau, C., Bertrand, J. and Ng, R.A. (2020) Resolution in the Case of the Hydrogen Atom of an Improved Dirac Equation. Journal of Modern Physics, **11**, 1075–1090. https ://doi.org/10.4236/jmp.2020.117068
[39] Daviau, C. and Bertrand, J. (2021) Christoffel Symbols and Chiral Properties of the Space-Time Geometry for the Atomic Electron States. Journal of Modern Physics , **12**, 483-512. https ://doi.org/10.4236/jmp.2021.124033

(Manuscrit reçu le 20 mars 2021)