Sur la construction de l'espace-temps

Claude Daviau, Jacques Bertrand

Fondation Louis de Broglie
23 rue Marsoulan, F-75012 Paris, France
daviau.claude@orange.fr
bertrandjacques-m@orange.fr

RÉSUMÉ. La géométrie de l'espace et de l'espace-temps est une construction intellectuelle partant d'outils de mesure dont on revoit ici comment elle a produit la géométrie classique, la géométrie relativiste, les groupes d'invariance, les algèbres et la géométrie différentielle de l'époque moderne. On propose une synthèse (théorie de toutes les interactions) autour de l'algèbre d'espace.

ABSTRACT. Space and space-time geometries are an intellectual construction starting from tools of measuring. We review here how this construction produced classical geometry, relativistic geometry, invariance groups and also geometric algebras and differential geometry of the modern area. A synthesis (Theory of Everything) of this construction is proposed with geometric algebra as center.

1 L'espace euclidien à trois dimensions

Sans remonter à la préhistoire, on commencera cette étude à la création du système métrique : la longueur d'un segment de droite se mesure en mètres, l'aire d'un rectangle, produit de sa longueur et de sa largeur, se mesure en mètres carrés, le volume d'un parallélépipède rectangle se mesure en mètres cubes. La mesure d'une longueur n'est pas un nombre pur, comme 1 ou π, mais un rapport entre la longueur de la chose à mesurer et la longueur unité, le « mètre étalon ». Ensuite il existe une relation simple entre les unités de longueur, d'aire et de volume. C'est le résultat d'un très grand effort d'unification et de simplification des procédés de mesure, d'où des résultats simples : l'aire d'un disque de rayon un mètre est π mètres carrés, le volume d'une pièce parallélépipédique de longueur 5m, de largeur 4m et de hauteur $2,5$m est 50m^3.

Sur ces bases s'est aussi développée une géométrie analytique, dans laquelle un point se repère par trois nombres réels, abscisse x, ordonnée y, cote z, tels que, si $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, sont trois vecteurs de longueur 1 m deux à deux orthogonaux, et si M est le point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la longueur OM vaut $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ mètres. On a étudié par la suite des transformations, comme les translations et rotations constituant les déplacements, les symétries par rapport à un plan étant des anti-déplacements. L'orientation en physique régit le produit vectoriel, et en mathématique vient du signe d'un déterminant.

La géométrie euclidienne fait ainsi de l'espace un « espace affine de dimension 3 ». Cette géométrie est basée sur les mètres-étalons, objets simples à utiliser et à reproduire, qui sont des solides, objets très peu déformables, qui ne changent pas quand on les transporte parallèlement à eux-mêmes (translation), quand on les tourne (rotation), quand on combine deux tels mouvements (vissage). Ce dernier mouvement est chiral : un vissage peut être droit, ou gauche.

Progressivement la géométrie euclidienne devint l'étude des figures qui sont invariantes par déplacement (translation, rotation). On vit donc s'y introduire la notion de groupe de transformations : groupe des translations, groupe des rotations autour d'un point (groupe $SO(3)$). Grâce à la trigonométrie et à l'utilisation des mètres-étalon, la triangulation étendit les capacités à mesurer longueurs, aires et volumes non seulement à toute la Terre, mais à tout le système solaire. Utilisant comme étalon de longueur le grand axe de l'orbite terrestre et des mesures de triangulation toujours plus précises, on a pu obtenir les coordonnées dans la Galaxie de milliards d'étoiles proches. Cette connaissance pratique du caractère euclidien de notre environnement galactique n'est pas celle d'un espace affine, où tous les points jouent un même rôle jusqu'à l'infini, mais concerne seulement un voisinage de l'origine, la Terre et son environnement proche est le seul domaine que nous avons pu arpenter dans tous les sens. A l'échelle des énormes distances de la Galaxie, on peut considérer tous nos systèmes de coordonnées comme centrés en un seul point, ici. Dit autrement, il y a une différence essentielle, à bien comprendre, entre les translations que nous pouvons faire avec nos instruments de mesure, sur un très petit domaine de l'immense univers, et les rotations autour du point origine, qui concernent la totalité de l'espace. Les rotations et les translations n'ont pas exactement les mêmes propriétés.

1.1 Topologie, limites, géométrie différentielle

L'espace de la géométrie euclidienne sera par la suite intégré dans une vision plus générale des « variétés différentielles », englobant les courbes, les surfaces, les espaces de variables complexes. C'est une variété sans bord ni torsion ni courbure, orientée, pour laquelle chaque espace tangent en un point peut être identifié à l'espace vectoriel des vecteurs $\vec{AB}$ définis par deux points quelconques A et B de la variété. Cet espace vectoriel est un $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps des nombres réels. En topologie, l'espace est métrique, donc séparé : deux points A et B distincts sont à une distance non nulle $r = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$, donc par suite de l'inégalité triangulaire [1], la boule de centre A et de rayon $r/3$ n'a aucun point commun avec la boule de centre B et de rayon $r/3$. Le fait que la topologie de l'espace est séparée est essentielle, parce que la séparabilité est utilisée chaque fois que l'on parle de continuité, de limite, de dérivation partielle, donc chaque fois que l'on utilise en physique les notions de vitesse, d'accélération et de force.

L'autre concept dont on a besoin pour définir ces notions est le **temps**, qui en géométrie euclidienne est une grandeur indépendante de la géométrie de l'espace, qu'on mesure non pas avec des règles mais avec des horloges. Ce temps t est une grandeur réelle au sens mathématique du terme (le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels), orienté (du passé vers le futur). Il permet de définir la vitesse d'un point $M(t)$ comme la dérivée $\vec{v}(t) := \frac{d(\vec{OM})}{dt}$, vecteur ayant pour composantes les dérivées partielles des coordonnées :

$$\vec{v}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}, \ x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \qquad (1)$$

et ainsi de suite [2]. Nous avons besoin non seulement de considérer des points, mais aussi des solides comme les règles, et des horloges, et de considérer les mouvements de ces objets, dont les mouvements de translation uniforme et les mouvements de rotation. Un mouvement de translation uniforme est un mouvement (la position d'un point quelconque est fonction du temps), tel que la vitesse $\vec{v_A}(t)$ de tout point A du solide

1. La somme des longueurs de deux côtés d'un triangle est toujours supérieure à la longueur du troisième côté.

2. Nous nous excusons de rappeler des choses aussi élémentaires, mais cela nous permettra ensuite de comprendre les changements qu'apportent la physique quantique et la relativité.

est égale à un vecteur fixe $\vec{v}$. On passe alors de la position du solide à l'instant t_1 à la position du même solide à l'instant $t_2 > t_1$ par la translation de vecteur $(t_2 - t_1)\vec{v}$. Un mouvement de rotation uniforme est un mouvement tel qu'il existe un point O fixe, une droite D passant par ce point, orientée par un vecteur $\vec{u}$ et un angle $\theta = (t_2 - t_1)\theta_0$ où θ_0 est fixe, tel que l'on passe de la position du solide à l'instant t_1 à la position du solide à l'instant t_2 par une rotation autour de D d'angle θ. On remarquera ici que les définitions diffèrent en ce sens que la première fait intervenir une vitesse fixe tandis que la seconde fait intervenir une position fixe de l'axe de rotation et une vitesse angulaire fixe. On remarquera surtout qu'il n'y a jusqu'ici aucune difficulté à utiliser le calcul différentiel, qui a été conçu pour travailler dans des espaces métriques, donc séparés.

2 Le spin 1/2

La découverte du spin des particules s'est faite en deux temps, d'abord grâce à la polarisation de la lumière, ensuite en 1926 avec l'hypothèse du spin de l'électron, à l'origine du magnétisme des aimants permanents [1]. Construire une équation d'onde pour un électron avec spin fut fait aussi en deux temps, d'abord par Pauli puis par Dirac. La première tentative amena Pauli à introduire trois matrices :

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \ \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \ \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Ces trois matrices engendrent un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et une algèbre de dimension 8 sur $\mathbb{R}$ par :

$$\vec{v} : = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$M : = m_0 + m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + m_3\sigma_3 + m_4\sigma_2\sigma_3 + m_5\sigma_3\sigma_1 + m_6\sigma_1\sigma_2 + m_7\sigma_1\sigma_2\sigma_3,$$

où les trois x, y, z et les huit m_j sont des nombres réels. En identifiant nombres complexes z et matrices scalaires $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ on peut écrire :

$$M = m_0 + \mathbf{v} + i\mathbf{w} + im_7, \tag{4}$$

$$\mathbf{v} := m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + m_3\sigma_3; \ \mathbf{w} := m_4\sigma_1 + m_5\sigma_2 + m_6\sigma_3.$$

On trouvera plus de détails sur l'algèbre Cl_3 des M en [2] à [8]. La somme et le produit des M sont simplement la somme et le produit des matrices (produit ligne-colonne). La physique utilise principalement le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ et le produit vectoriel $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$:

$$i^2 = -1; \;\; \mathbf{vw} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + i\mathbf{v} \times \mathbf{w}. \tag{5}$$

L'écriture matricielle des coordonnées d'un point (3) de Pauli revient à considérer l'espace de la géométrie comme un sous-ensemble de Cl_3. Le besoin d'écrire une équation d'onde, donc d'utiliser des dérivées partielles, nécessite alors la définition d'un seul opérateur différentiel :

$$\vec{\partial} := \sigma_1 \partial_x + \sigma_2 \partial_y + \sigma_3 \partial_z. \tag{6}$$

Cet opérateur suffit à obtenir les gradients, les divergences et rotationnels de vecteurs, ainsi on a pour tout vecteur $\vec{v}$:

$$\vec{\partial}\vec{v} = \vec{\partial} \cdot \vec{v} + i\,\vec{\partial} \times \vec{v} = \mathrm{div}\vec{v} + i\,\mathrm{rot}\vec{v}. \tag{7}$$

L'équation d'onde de l'électron obtenue par Pauli pour l'onde ψ s'écrit :

$$(\frac{1}{c}\partial_t + i\frac{e}{\hbar c}V + i\frac{m_0 c}{\hbar})\psi = \frac{\hbar}{2im_0 c}(\vec{\partial} - i\frac{e}{\hbar c}\vec{A})^2\psi, \tag{8}$$

où V est le potentiel électrique et $\vec{A}$ est le potentiel vecteur. La manière dont cette équation d'onde est invariante sous les rotations est la suivante : Soit $M = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}$ un élément de Cl_3 tel que $M^\dagger = M^{-1}$. La transformation :

$$\begin{gathered} P(x,y,z) \mapsto P'(x',y',z'); \;\; \psi \mapsto \psi' = M\psi, \\ \vec{OP'} = M\vec{OP}M^\dagger; \;\; \vec{A} \mapsto \vec{A'} = M\vec{A}M^\dagger, \end{gathered} \tag{9}$$

est une rotation laissant l'équation d'onde invariante de forme. Ce résultat, qui n'a rien de trivial, vient de ce que :

$$1 = \det(M\,M^{-1}) = \det(M\,M^\dagger) = \det(M)\det(M)^\dagger = |\det(M)|^2, \tag{10}$$

On a alors :

$$\det(\vec{OP'}) = \det(M)\det(\vec{OP})\det(M^\dagger) = \det(\vec{OP}); \tag{11}$$

$$-({x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2) = \det(\vec{OP'}) = \det(\vec{OP}) = -(x^2 + y^2 + z^2). \tag{12}$$

On utilise dans Cl_3 outre la conjugaison adjoint $M \mapsto M^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_3 \\ \bar{u}_2 & \bar{u}_4 \end{pmatrix}$, la conjugaison telle que $M \mapsto \overline{M} = \begin{pmatrix} u_4 & -u_2 \\ -u_3 & u_1 \end{pmatrix}$. Ces deux conjugaisons inversent l'ordre des produits : $(MN)^\dagger = N^\dagger M^\dagger$, $\overline{MN} = \overline{N}\,\overline{M}$. La composée de ces deux conjugaisons est une troisième conjugaison : $M \mapsto \widehat{M} := \overline{M}^\dagger$. Cette conjugaison conserve l'ordre des produits : $\widehat{MN} = \widehat{M}\widehat{N}$. De plus on a :

$$\vec{\partial}' := \sigma_1 \partial_{x'} + \sigma_2 \partial_{y'} + \sigma_3 \partial_{z'}, \ \vec{\partial} = \overline{M} \vec{\partial}' \widehat{M}. \tag{13}$$

2.1 SU(2) versus SO(3)

L'ensemble des matrices M telles que $M^\dagger = M^{-1}$ constitue un groupe de Lie noté $U(2)$, de dimension 4. La théorie de Pauli n'utilise pas ce groupe mais le sous-groupe $SU(2)$, de dimension 3, constitué, comme le S l'indique, par les matrices de déterminant 1. On a alors :

$$1 = \det(M) = M\overline{M} = \overline{M}M; \ \overline{M} = M^{-1} = M^\dagger; \ M = \widehat{M}. \tag{14}$$

Cette dernière égalité signifie que M appartient à la sous-algèbre paire $Cl_3^+ = \mathbb{H}$ qui est le corps des quaternions, et donc il faut aussi que le ψ de l'onde de Pauli soit à valeur dans $\mathbb{H}$. C'est ainsi que les quaternions s'introduisent en mécanique quantique. Et c'est aussi cette même égalité $M = \widehat{M}$ qui interdit à la mécanique quantique non relativiste d'apercevoir la chiralité des interactions faibles, comme on le verra plus loin. Pour tout M de $SU(2)$, on obtient alors :

$$\vec{\partial}' = M \vec{\partial} M^{-1}; \ \vec{A}' = M \vec{A} M^{-1}, \tag{15}$$

$$(\frac{1}{c}\partial_t + i\frac{e}{\hbar c}V + i\frac{m_0 c}{\hbar})\psi' = \frac{\hbar}{2im_0 c}(\vec{\partial}' - i\frac{e}{\hbar c}\vec{A}')^2\psi' \tag{16}$$

Remarquons tout d'abord que ce ne sont plus les rotations de $SO(3)$ qui agissent sur l'onde quantique ψ, mais les matrices M de $SU(2)$. Du point de vue mathématique on dit que $SU(2)$ est le groupe de recouvrement de $SO(3)$, ce qui signifie qu'il existe un homomorphisme (non inversible) de $SU(2)$ sur $SO(3)$, que les deux groupes ont la même algèbre de Lie $su(2)$, formée des matrices anti-hermitiennes, qu'il existe deux applications exponentielles, l'une de $su(2)$ dans $SU(2)$, qui est l'exponentielle ordinaire des matrices, $\exp(\mathbf{m}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{m}^n}{n!}$. L'autre, notée $\exp_2$, beaucoup moins évidente, de $su(2)$ dans $SO(3)$, fait correspondre à une matrice 2×2

complexe $\mathbf{m}$ une rotation dans l'espace, $R = \exp_2(\mathbf{m})$, donc une matrice orthogonale réelle 3×3 de déterminant 1. Par exemple, considérons un nombre réel quelconque θ et l'élément $\mathbf{m} := i\theta\sigma_1$ de $su(2)$. On a alors :

$$M := \exp(\mathbf{m}) = \exp(i\theta\sigma_1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & i\sin(\theta) \\ i\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$R := \exp_2(\mathbf{m}) = \exp_2(i\theta\sigma_1) \ : \ \mathrm{x} \mapsto \mathrm{x}' = e^{i\theta\sigma_1}\mathrm{x}e^{-i\theta\sigma_1},$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x}'^1 \\ \mathrm{x}'^2 \\ \mathrm{x}'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ 0 & -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x}^1 \\ \mathrm{x}^2 \\ \mathrm{x}^3 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

On donne rarement les relations générales entre ces deux exponentielles, pas évidentes du tout, ni la démonstration du fait que le déterminant de R vaut bien 1, donc que R est bien un déplacement et pas un anti-déplacement. Non seulement on n'explicite pas R dans la quasi-totalité des cours de mécanique quantique, mais on identifie la matrice 2×2 à coefficients complexes M de (17), avec ses angles θ, à la matrice 3×3 à coefficients réels (R^k_j) de (18), avec des angles doubles 2θ ! Cette usurpation d'identité entre exp et $\exp_2$ a peu de chance d'être détectée par l'étudiant moyen, même très attentif. Donc on croit comprise la question du spin 1/2, et l'on ne se demande jamais plus pourquoi il faut, en mécanique quantique, utiliser exp au lieu de $\exp_2$, ni quelle en est la signification géométrique.

Remarquons ensuite que $SU(2)$ est un groupe de Lie, donc une variété différentielle analytique, avec une torsion non nulle, et que c'est aussi ainsi que la géométrie différentielle s'impose en physique, et pas seulement avec la gravitation et la relativité générale. Avec l'égalité (3) l'espace privé de l'origine devient une telle variété différentielle avec torsion non nulle. On voit ainsi apparaître deux ensembles de points de topologie différente : l'espace entier, que nous appellerons $\mathcal{E}$, qui a été assimilé à $\mathbb{R}^3$, et l'espace moins l'origine que nous appellerons $\mathcal{E}^*$, que l'on peut associer à l'ensemble des points P de coordonnées $(x, y, z) = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$ tels que $\begin{vmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{vmatrix} \neq 0$. Cet espace $\mathcal{E}^*$ est une variété différentielle de dimension trois, orientée, avec un bord qui est son origine, O. C'est une hypersurface sur le groupe multiplicatif Cl_3^* des éléments de déterminant non nul. L'espace complet $\mathcal{E}$ est supposé être un espace affine ayant pour espace vectoriel associé un sous-espace vectoriel de l'algèbre de Lie Cl_3

du groupe Cl_3^*.

3 L'espace-temps

La connaissance par triangulation des positions des étoiles proches, même à l'aide de satellites dédiés à cette mesure, ne permet de connaître la géométrie que d'une petite partie de notre Galaxie. Pour tous les objets plus lointains, on ne dispose que des ondes électromagnétiques (dont la lumière) [3]. Pour se faire il est essentiel de comprendre qu'on commence par tourner l'axe du télescope que l'on utilise dans la direction de l'étoile que l'on veut observer. Puis on se sert de la relation entre la luminosité intrinsèque de certaines étoiles, connue par l'astrophysique stellaire, et leur luminosité apparente, pour calculer la distance de ces étoiles. Les coordonnées spatiales de chacune de ces étoiles sont donc, d'abord et avant tout calcul, des coordonnées sphériques.

Et surtout nous devons tenir compte du fait que la propagation de la lumière n'est pas instantanée. Pour l'étoile la plus proche, il faut quand même quatre années pour que la lumière nous en parvienne. Quand nous observons l'allumage d'une supernova dans la galaxie satellite de la nôtre qu'est le grand nuage de Magellan, la lumière a voyagé pendant 163 000 ans avant de nous parvenir. Donc tout événement que nous observons doit être repéré, outre les trois coordonnées (x, y, z) du point de l'espace où il se produit, par une coordonnée temporelle t. On fera correspondre à un tel événement le point-événement :

$$\mathrm{x} := (\mathrm{x}^0, \mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \mathrm{x}^3) = \begin{pmatrix} \mathrm{x}^0 + \mathrm{x}^3 & \mathrm{x}^1 - i\mathrm{x}^2 \\ \mathrm{x}^1 + i\mathrm{x}^2 & \mathrm{x}^0 - \mathrm{x}^3 \end{pmatrix} := \mathrm{x}^\mu \sigma_\mu, \tag{19}$$

où l'on utilise, outre la convention usuelle de sommation sur les indices haut et bas :

$$\sigma_0 := 1;\ \mathrm{x}^0 := ct;\ \mathrm{x}^1 := x;\ \mathrm{x}^2 := y;\ \mathrm{x}^3 := z. \tag{20}$$

Cette manière d'écrire les coordonnées d'espace et de temps revient à considérer l'espace-temps comme un espace affine d'espace vectoriel contenu dans Cl_3. Nous noterons cet ensemble de tous les événements $\mathcal{ET}$. L'espace vectoriel associé est la partie auto-adjointe de Cl_3, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel des x tels que $\mathrm{x} = \mathrm{x}^\dagger$, de dimension 4 sur $\mathbb{R}$. Or on a :

$$\det(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}^0)^2 - (\mathrm{x}^1)^2 - (\mathrm{x}^2)^2 - (\mathrm{x}^3)^2 = \mathrm{x}\overline{\mathrm{x}}, \tag{21}$$

3. On vient de commencer l'ère d'une nouvelle astronomie, grâce à la mise en évidence des ondes gravitationnelles.

En notant O_0 l'origine du repère d'espace et de celui du temps, de coordonnées spatiotemporelles $(0,0,0,0)$, en notant $\mathcal{ET}^*_{O0}$ l'ensemble des points-événements M tels que det(x) $\neq 0$, et $Cone(O_0)$ l'ensemble des M tels que det(x) $= 0$, $\mathcal{ET}$ est la réunion de $\mathcal{ET}^*_{O0}$ et de $Cone(O_0)$. Tous les événements observables par la réception des ondes lumineuses en O à l'instant 0 sont sur le cône de lumière $Cone(O_0)^*$. On peut en exclure le point-événement O_0 lui-même car on ne peut pas compter les photons qui sont à la fois créés et annihilés en un même point à un même instant. Tous les autres événements appartiennent à la réunion du point origine O_0 avec $\mathcal{ET}^*_{O0}$ qui est la partie auto-adjointe de Cl_3^*. Or Cl_3^* est un groupe multiplicatif, habituellement noté $GL(2,\mathbb{C})$, isomorphe au groupe multiplicatif des matrices complexes 2×2 de déterminant non nul. Ce groupe de Lie est bien connu et est, comme tous les groupes de Lie une variété différentielle à torsion non nulle.

Comme tous les voyages que nous avons pu effectuer dans notre environnement proche (le système solaire) nous ont convaincus qu'il n'existait pas de centre privilégié, comme le temps présent ne parait pas plus privilégié qu'un autre, nous pouvons penser raisonnablement que le meilleur modèle que nous pouvons développer est de faire de l'espace-temps un espace affine où tous les points-événements jouent le même rôle [4]. Dans cette hypothèse la partition précédente de l'espace temps peut se faire en n'importe quel point-événement P_t : tous les événements observables par la réception des ondes lumineuses en P à l'instant t de son horloge sont sur le cône de lumière $Cone(P_t)$. Tous les points-événements autres que P_t et observables de ce point-événement constituent un $\mathcal{ET}^*_{Pt}$ qui peut être considéré comme la partie auto-adjointe de Cl_3^*. Pour chaque point-événement le cône de lumière de ce point-événement est le bord de son $\mathcal{ET}^*_{Pt}$. Chaque point-événement appartient au bord de l'espace-temps vu de ce point, tandis que chaque origine est à la fois au bord et sur l'espace-temps ! Cette situation est contraire à tout ce qu'on utilise habituellement en théorie des variétés différentielles, mais on peut en rendre compte dans la théorie des fibrés, où l'on peut considérer l'espace-temps comme la réunion de tous les $\mathcal{ET}_{Pt}$. La géométrie différentielle a été bâtie à partir des notions de courbes et surfaces, qui sont des sous-variétés de la variété d'espace, variété métrique, donc séparée. On peut certes considérer la variété d'espace-temps comme contenue dans Cl_3, espace vectoriel euclidien de dimension 8, espace séparé, sans bord. Mais pour les phénomènes électromagnétiques

4. Mais cela peut ne pas bien correspondre à un big-bang avec début du temps.

la variété d'espace-temps n'a pas la topologie euclidienne de $\mathbb{R}^8$: la longueur ds d'une ligne d'univers, $ds = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}$ n'a de sens que pour les mouvements des points matériels, vérifiant $(dx^0)^2 > (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$, ou pour les points-événements de l'ailleurs, où $ds = -\sqrt{-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}$. Pour un point P_t situé sur le cône de O_0 la longueur de la ligne d'univers O_0P_t est exactement nulle, le cône n'est pas séparé. [5]

La non-séparation de l'espace-temps dans sa partie cône de lumière entraine de sérieuses difficultés pour la description de la polarisation des photons émis en un même point-événement. On peut bien sûr faire de la géométrie différentielle sur la variété d'espace-temps. Simplement il ne faut pas lui appliquer sans réfléchir les théorèmes mathématiques établis pour des variétés métriques séparées et sans bord.

4 L'équation de Dirac améliorée

L'équation d'onde de Pauli a été rapidement dépassée par Dirac, parce que non relativiste, et parce qu'elle ne fournissait pas les résultats attendus pour l'atome d'hydrogène. L'équation de Dirac, elle, est relativiste. Nous la présentons ici sous la forme améliorée qu'elle prend lorsqu'on simplifie le terme de masse de la densité lagrangienne, et lorsqu'on utilise pour l'écrire l'algèbre Cl_3 de Pauli (voir [8] 1.5) :

$$0 = \overline{\phi}(\nabla\widehat{\phi})\sigma_{21} + \overline{\phi}qA\widehat{\phi} + m\rho, \tag{22}$$

où $\nabla := \sigma^\mu\partial_\mu = \partial_0 - \vec{\partial}$, $\sigma_{21} = \sigma_2\sigma_1$, $A = \sigma^\mu A_\mu = A^0 + \vec{A}$ est le vecteur d'espace-temps potentiel électromagnétique, $m = m_0c/\hbar$, m_0 étant la masse propre de l'électron, $q = e/\hbar c$, e étant la charge de l'électron. L'onde ϕ de l'électron est une fonction de l'espace et du temps à valeur dans Cl_3 écrite avec une partie droite notée ξ et une partie gauche notée η :

$$\phi := \sqrt{2}\begin{pmatrix}\xi_1 & -\overline{\eta}_2\\ \xi_2 & \overline{\eta}_1\end{pmatrix};\ \widehat{\phi} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}\eta_1 & -\overline{\xi}_2\\ \eta_2 & \overline{\xi}_1\end{pmatrix};\ \overline{\phi} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}\overline{\eta}_1 & \overline{\eta}_2\\ -\xi_2 & \xi_1\end{pmatrix}. \tag{23}$$

La conjugaison $\phi \mapsto \widehat{\phi}$ échange ondes droite et gauche : c'est la transformation appelée P (parité) en mécanique quantique. L'onde est définie par quatre fonctions ξ_1, ξ_2, η_1 et η_2 à valeur complexe, contrairement à

5. Si, comme le pensait Louis de Broglie, les photons ont une masse très très petite et ne vont pas exactement à la vitesse c, il suffit de considérer le cône comme l'ensemble des points P_t tels que $\det(\overrightarrow{O_0P_t}) = 0$.

l'onde de Pauli, comportant seulement 2 fonctions à valeurs complexes. Ces quatre fonctions complexes, qu'on peut écrire comme huit fonctions réelles, permettent de construire $36 = 8 \times (8+1)/2$ densités (voir [8] A.4) [6]. Parmi ces 36 densités figurent les 16 composantes D_μ^ν des quatre vecteurs $\mathrm{D}_\mu := \phi\sigma_\mu\phi^\dagger$, dont D_0^0 qui est la densité de probabilité. Parmi les 36 densités figurent la partie réelle Ω_1 et la partie imaginaire Ω_2 de :

$$\phi\overline{\phi} = \det(\phi) = \rho e^{i\beta} = \Omega_1 + i\Omega_2. \tag{24}$$

L'équation de Dirac est l'approximation linéaire de (22) qui s'obtient en remplaçant $m\rho$ par $m\rho\cos(\beta) = m\Re[\det(\phi)]$. Les solutions obtenues pour le cas de l'atome d'hydrogène correspondent complètement [9] à ce qui est attendu par la spectroscopie. On se contentera ici de regarder les aspects géométriques de cette onde, qui apparaissent de deux manières, par la structure de l'onde elle-même et par l'invariance relativiste de l'équation d'onde.

4.1 Structure de l'onde

Celle-ci a été obtenue une première fois par G. Lochak [10] [11] en 1956 avec le formalisme des matrices complexes 4×4 de Dirac (espace vectoriel de dimension 32 sur $\mathbb{R}$). Dix ans plus tard cette structure de l'onde de Dirac a été ré-obtenue par D. Hestenes [12] [13] [14] avec le formalisme de l'algèbre de Clifford $Cl_{1,3}$ (espace vectoriel de dimension 16 sur $\mathbb{R}$). Comme l'onde de l'électron est une fonction de l'espace et du temps à valeur dans un espace vectoriel de dimension 8 seulement sur $\mathbb{R}$ on utilisera ici seulement Cl_3, de dimension 8. Cette structure de l'onde est un élargissement de la formule d'Euler $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$:

$$\phi = \exp(\frac{a}{2});\ a = \ln(\rho) + \vec{u} + i\vec{w} + i\beta, \tag{25}$$

où l'argument β de $\det(\phi)$ est appelé angle d'Yvon-Takabayasi. La partie non commutante $\exp[(\vec{u}+i\vec{w})/2]$ dans ϕ appartient à $SL(2,\mathbb{C})$ puisque son déterminant, exponentielle de la trace, vaut 1. En mécanique quantique, de la même manière qu'on n'a pas cherché à distinguer $SO(3)$ de $SU(2)$, on n'a pas non plus cherché à distinguer le groupe de Lorentz orthochrone $\mathcal{L}_+^\uparrow$ qui contient comme sous-groupe $SO(3)$ de son groupe de recouvrement $SL(2,\mathbb{C})$ qui contient comme sous-groupe $SU(2)$. La

6. La théorie de Dirac sous sa forme initiale ne connaissait que les 16 densités invariantes de jauge électrique, et ignorait les 20 autres.

mécanique quantique accordant une grande importance aux statistiques et probabilités, la densité ρ a été interprétée comme un paramètre statistique. Ceci ne convient pas, d'une part parce que la généralisation de la densité de probabilité $|\psi|^2$ de la physique quantique non relativiste est la densité D_0^0, d'autre part parce que l'onde de l'électron ne peut, par suite du principe de Pauli (nombre d'occupation égal à 0 ou 1), comporter un nombre d'électrons suffisant pour faire des statistiques. Certes il existe un lien entre les deux densités ρ et D_0^0 (voir [8], A.4.2) :

$$(\mathrm{D}_0^0)^2 = \rho^2 + (\mathrm{D}_0^1)^2 + (\mathrm{D}_0^2)^2 + (\mathrm{D}_0^3)^2, \tag{26}$$

mais cette relation prouve bien qu'en général ces deux densités ne doivent pas être confondues. Le plus important, pour la physique de l'électron, c'est que, (25) comportant un logarithme, cette forme de l'onde n'est possible que si et là où ρ n'est pas nul. Or pour toutes les solutions de l'équation de Dirac pour l'atome d'hydrogène telles que les polynômes de la variable radiale sont réduits à des constantes (états 1s1/2, 2p3/2, etc) cela fonctionne, ρ est partout non nul. Mais pour tous les autres états il existe des valeurs de la variable radiale pour laquelle ρ s'annule, donc la forme (25) n'a pas de sens. Cette difficulté ne se résout qu'avec l'équation améliorée, pour laquelle, tant pour les solutions en ondes planes que pour les solutions pour l'atome d'hydrogène [9], ρ est effectivement partout et toujours non nul, donc ϕ vérifie toujours (25), ce qui revient à dire que l'onde de l'électron est à valeur dans $Cl_3^* = GL(2, \mathbb{C})$

Ceci est en fait extrêmement important, cela signifie que l'utilisation des algèbres de Clifford est en quelque sorte un accident mathématique, ce qui est important ici est l'utilisation non pas de Cl_3 directement, mais du groupe multiplicatif Cl_3^*, ou tout aussi bien du groupe linéaire $GL(2, \mathbb{C})$, dont $M_2(\mathbb{C}) = Cl_3$ constitue l'algèbre de Lie. Ceci justifie d'ailleurs pleinement le fait que la mécanique quantique est une théorie purement linéaire. Et cependant ce groupe linéaire est, comme tous les groupes $GL(n, \mathbb{C})$, une variété différentielle à torsion non nulle, susceptible donc d'accueillir l'espace-temps actif de la relativité générale, rendant compte de la gravitation par sa structure elle-même.

4.2 Invariance relativiste

Le groupe de Lie Cl_3^* intervient non seulement comme ensemble d'arrivée, comme contenant l'ensemble de départ de l'onde électronique, mais aussi comme groupe d'invariance de l'équation d'onde (voir [8] 1.5.4) parce que, avec n'importe quel M fixe de Cl_3^* et avec :

$$\phi' = M\phi;\ \mathrm{x}' = \mathrm{x}'^{\mu}\sigma_\mu;\ \mathrm{x} = \mathrm{x}^{\mu}\sigma_\mu;\ \mathrm{x}' = R(\mathrm{x}) := M\mathrm{x}M^\dagger,$$
$$\nabla = \sigma^\mu\partial_\mu;\ \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^\mu};\ \nabla' = \sigma^\mu\partial'_\mu;\ \partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}'^\mu}, \tag{27}$$
$$re^{i\theta} := \det(M);\ m = m'r;\ qA = \overline{M}q'A'\widehat{M}';\ \rho' e^{i\beta'} := \det(\phi'),$$

on obtient :

$$\rho' = r\rho;\ \beta' = \beta + \theta;\ \nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M}. \tag{28}$$

Cette relation, qui n'a rien d'évident, permet de comprendre pourquoi, lorsqu'un angle θ figure dans M et donc fait tourner ϕ de cet angle θ, c'est un angle 2θ qui figure dans la transformation $R : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{x}' = M\mathrm{x}M^\dagger$ et dans $\nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M}$, parce que l'angle agit à la fois par le M à gauche et par le $M^\dagger$ à droite. Cette relation introduit aussi une différence entre vecteurs contravariants, se transformant comme x, et vecteurs covariants, se transformant comme ∇. Et surtout cela permet d'obtenir l'équivalence entre l'équation d'onde (22) et :

$$0 = \overline{\phi}'(\nabla'\widehat{\phi}')\sigma_{21} + \overline{\phi}'q'A'\widehat{\phi}' + m'\rho', \tag{29}$$

où chacune des trois parties de l'équation d'onde, terme différentiel, terme de jauge, terme de masse, est invariante de forme. La transformation R est une similitude, composée dans un ordre quelconque d'une transformation de Lorentz orthochrone et d'une homothétie centrée sur l'origine O_0, de rapport positif r. Cette transformation, élément d'un groupe de Lie $\mathcal{S}$ à 7 paramètres, ne peut évidemment plus être identifiée et confondue avec l'élément fixe M de Cl_3^*, groupe à 8 paramètres, qui l'engendre. La transformation de l'onde, $\phi \mapsto \phi' = M\phi$ est ce qui sépare la partie droite ξ de l'onde (première colonne de ϕ), telle que $\xi' = M\xi$, de la partie gauche η de l'onde (première colonne de $\widehat{\phi}$), telle que $\eta' = \widehat{M}\eta$. Le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ utilisé par la mécanique quantique relativiste est le sous-groupe obtenu en imposant $\det(M) = 1$, condition qui ne sert absolument à rien, d'une part parce que l'angle β est le générateur du groupe chiral des $e^{i\beta}$ qui est le noyau de l'homomorphisme $M \mapsto R$, qui est aussi la partie $U(1)$ du groupe de jauge $U(1) \times SU(2)$ des interactions faibles (voir [8] Chapter 2), et enfin qui est le groupe d'invariance de jauge du monopôle magnétique de Lochak [15] [16] [17]. D'autre part le fait que c'est une transformation de Lorentz propre qui intervient dans R vient de l'égalité simple et non triviale $\det(R) = r^4$. Elle ne nécessite pas que l'on pose arbitrairement $r = 1$.

La (fausse) symétrie entre les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ dans $\vec{u}+i\vec{w}$ en (25) fait passer de la transformation R : $\mathrm{x} \mapsto \mathrm{x}' = e^{i\vec{w}}\mathrm{x}e^{-i\vec{w}}$ à la transformation $B : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{x}' = e^{\vec{u}}\mathrm{x}e^{+\vec{u}}$. Simplifions les calculs en supposant $\vec{u} = \vec{w} = u\sigma_1$. Alors on a pour R :

$$\begin{aligned} \mathrm{x}'^0 &= \mathrm{x}^0;\ \mathrm{x}'^1 = \mathrm{x}^1, \\ \mathrm{x}'^2 &= \cos(2u)\mathrm{x}^2 + \sin(2u)\mathrm{x}^3, \\ \mathrm{x}'^3 &= -\sin(2u)\mathrm{x}^2 + \cos(2u)\mathrm{x}^3. \end{aligned} \tag{30}$$

Donc R est la **rotation** d'axe (O, σ_1), d'angle $2u$. Pour B on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{x}'^0 &= \cosh(2u)\mathrm{x}^0 + \sinh(2u)\mathrm{x}^1, \\ \mathrm{x}'^1 &= \sinh(2u)\mathrm{x}^0 + \cosh(2u)\mathrm{x}^1. \\ \mathrm{x}'^2 &= \mathrm{x}^2;\ \mathrm{x}'^3 = \mathrm{x}^3, \end{aligned} \tag{31}$$

Donc B décrit, non pas une translation, mais un **mouvement de translation uniforme** à la vitesse $\vec{v} = \tanh(2u)c\sigma_1$. L'association entre rotation d'espace et non pas translation d'espace, mais mouvement de translation uniforme n'est pas dû à l'utilisation de Cl_3, qui permet seulement de simplifier les calculs. Elle vient des propriétés physiques de l'espace-temps, elle associe l'invariance sous le groupe des rotations (l'espace est isotrope) à l'invariance sous les mouvements de translation uniforme (« le mouvement uniforme est comme rien », dixit Galilée)). Le principe de relativité énoncé par Galilée est donc étroitement lié à l'isotropie de l'espace, et on l'aperçoit le plus facilement par l'inclusion de ces deux propriétés dans un même groupe d'invariance. L'association entre rotation et mouvement de translation uniforme se prolonge, pour la gravitation, entre mouvement de rotation uniforme (angle proportionnel au temps écoulé) et mouvement de translation uniformément accéléré (vitesse proportionnelle au temps écoulé).

De la même manière que pour $\vec{u}+i\vec{w}$, il existe dans (25) une fausse symétrie entre $\ln(\rho)$ et β, qui fait passer du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^{+*}$ des homothéties $M \mapsto e^{\ln(\rho)}M$ au groupe chiral $U(1)$ des transformations $M \mapsto e^{i\beta}M$. Ce groupe chiral est le noyau de l'homomorphisme $\phi \mapsto R(\phi)$ où $R(\phi)$ est la similitude qui à tout $\mathrm{X} = \mathrm{X}^\mu\sigma_\mu$ associe $\mathrm{x} = \phi\mathrm{X}\phi^\dagger$ (voir [2] à [4] et [8] 1.8). On ne peut pas se débarrasser complètement de ce groupe chiral, même quand on impose la condition $\det(M) = 1$ pour se restreindre à $SU(2)$, car alors le noyau $U(1)$ est écrasé en un $\{1,\ -1\}$

qui s'obstine à ne pas être $\{1\}$. L'utilisation en mécanique quantique des représentations à deux valeurs du groupe des rotations est donc l'indice toujours présent du fait qu'on n'a pas pris en considération le bon groupe d'invariance, qui est non pas $SL(2,\mathbb{C})$, mais $GL(2,\mathbb{C}) = Cl_3^*$.

Une autre manière de se tromper de groupe d'invariance serait d'utiliser la fausse symétrie entre $\vec{u}$ et $\vec{w}$ et de la refuser entre $\ln(\rho)$ et β en imposant dans (25) $\rho = 1$. Outre qu'un tel choix est parfaitement arbitraire, incompatible avec l'équation d'onde, on raterait la principale utilisation de cette homothétie en physique, qui est le rayon $R(t)$ de l'Univers en cosmologie relativiste, car r et donc aussi ρ sont des rapports d'homothétie (facteurs d'échelle).

5 Conclusion et perspectives

En conclusion, le groupe Cl_3^*, qui intervient triplement pour l'électron, à savoir comme ensemble d'arrivée pour la fonction d'onde, comme ensemble contenant l'ensemble de définition (l'espace-temps), et enfin comme groupe d'invariance de forme de l'équation d'onde, est une variété différentielle à torsion non nulle indispensable à la construction d'une théorie physique rendant compte à la fois de l'électromagnétisme, de la physique quantique et de la gravitation. Son utilisation amène une quatrième raison, qui est l'inclusion de Cl_3^* dans le groupe $\mathrm{End}(Cl_3)$ de dimension 64. En effet ce groupe est suffisamment vaste pour que tous les fermions d'une génération y prennent place (électron, neutrino-monopôle, quarks u et d à trois états de couleur). Il est aussi suffisamment vaste pour héberger le groupe de jauge $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ du modèle standard. Ceci nous a permis de commencer le développement d'une théorie du tout capable d'intégrer à la fois les trois types de forces du modèle standard, forces électromagnétiques, forces faibles, forces fortes, et la gravitation [8] comme structure de l'espace-temps. Le principal bénéfice en est la quantification elle-même, qui résulte des propriétés de l'onde quantique et de l'invariance sous Cl_3^* (voir [8] 2.5 et 3.7).

Références

[1] Louis de Broglie. L'électron magnétique. *Hermann*, Paris, 1934.
[2] C. Daviau. *L'espace-temps double.* JePublie, Pouillé-les-coteaux, 2011.
[3] C. Daviau. *Double Space-Time and more.* JePublie, Pouillé-les-coteaux, 2012.

[4] C. Daviau. Invariant quantum wave equations and double space-time. *Adv. in Imaging and Electron Physics*, 179, chapter 1 :1–137, 2013.
[5] C. Daviau and J. Bertrand. *New Insights in the Standard Model of Quantum Physics in Clifford Algebra.* Je Publie, Pouillé-les-coteaux, 2014.
[6] C. Daviau and J. Bertrand. *The standard model of quantum physics in Clifford algebra.* World Scientific, Singapore, 2016.
[7] C. Daviau, J. Bertrand, T. Socroun, and D. Girardot. *Modèle Standard et Gravitation.* Presses des Mines, Paris, 2019.
[8] C. Daviau, J. Bertrand, T. Socroun, D. Girardot, Developing a Theory of Everything, Ann. Fond. Louis de Broglie, Mémos https ://aflb.minesparis.psl.eu/MEMOS/ToEAFLB.pdf
[9] Daviau, C. Bertrand, J. and Ng, R., Resolution in the Case of the Hydrogen Atom of an Improved Dirac equation (2020) JMP, **11**, 1075–1090, http ://dx.doi.org/10.4236/jmp.2020.117068
[10] G. Lochak, Paramètres relativistes de Cayley-Klein dans l'équation de Dirac, C. R. Acad. Sci., 243, 1956, p. 234, en collaboration avec G. Jakobi.
[11] G. Lochak, Décomposition de l'impulsion de Dirac et invariance de jauge, C. R. Acad. Sci., 243, 1956, p. 357, en collaboration avec G. Jakobi.
[12] D. Hestenes. Real spinor fields. J. Math. Phys., **8**(4) :798–808, 1967.
[13] D. Hestenes. Local observables in the Dirac theory. J. Math. Phys., **14**(7) :893–905, 1973.
[14] D. Hestenes. Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory. J. Math. Phys., **16**(3) :556–572, 1973.
[15] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, **8** (4), 1983.
[16] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$(partie 2). *Ann. Fond. Louis de Broglie*, **9** (1), 1984.
[17] G. Lochak. Wave equation for a magnetic monopole. *Int. J. of Th. Phys.*, **24** :1019–1050, 1985. Scientific, Singapore, 1990.

(Manuscrit reçu le 27 novembre 2021)