Une nouvelle dérivation de la distribution de Bose-Einstein avec énergie du point zéro

Satyanad Kichenassamy

Laboratoire de Mathématiques (UMR9008) et GREI (EPHE-PSL et UPS),
Université de Reims Champagne-Ardenne, Moulin de la Housse, B.P. 1039,
F-51687 Reims Cedex 2, France
satyanad.kichenassamy@univ-reims.fr

RÉSUMÉ. On complète la dérivation de la distribution de Planck proposée par Boyer en 1969 pour obtenir une distribution pour des bosons quelconques, incorporant une énergie du point zéro. L'élément nouveau est l'introduction de la méthode de Réduction fuchsienne, qui permet d'obtenir la solution générale de l'équation satisfaite par la densité d'énergie. Les traitements antérieurs d'Einstein et Hopf, et d'Einstein et Stern sont également incomplets d'un point de vue mathématique, pour les mêmes raisons.

ABSTRACT. By improving Boyer's 1969 derivation of Planck's law, we obtain an energy distribution for arbitrary Bosons, including a zero-point energy. The new element is the introduction of the method of Fuchsian Reduction, that enables a correct determination of the general solution of the equation for the energy density. Earlier treatments by Einstein and Hopf, and Einstein and Stern, are also shown to be mathematically incomplete, for the same reasons.

P.A.C.S.: 03.50.-z, 02.30.Hq, 02.30.Jr

1 Introduction

Louis de Broglie a proposé en 1922 une dérivation de la loi de Wien pour la distribution spectrale du rayonnement d'un corps noir en équilibre dans la limite des hautes fréquences, sur la base de considérations relativistes qui, « seules, permettent à la théorie des quanta de lumière d'obtenir la valeur exacte [...] de la pression de radiation, tandis que l'ancienne théorie corpusculaire de la lumière conduit à une valeur deux fois trop forte » [1, p. 424]. Il avait également déjà envisagé que ses idées pourraient s'appliquer à des particules massives (ibid., p. 427). Deux ans plus tard, il y a tout juste cent ans, S.N. Bose [2] substitua la statistique qui porte son nom à celle de Maxwell-Boltzmann, et obtint la loi de Planck que nous connaissons [3]. Peu après, Einstein étendit ces considérations aux particules massives pour obtenir la distribution de Bose-Einstein. Cependant, Planck lui-même et de nombreux auteurs après lui, en particulier Einstein, ont tenté de comprendre le mécanisme de l'établissement de l'équilibre par échange de rayonnement entre des oscillateurs idéaux, évitant autant que possible l'introduction de discontinuités, absentes de la théorie classique du rayonnement. Planck fut ainsi conduit à proposer de modifier sa loi par l'addition d'une « énergie du point zéro » (ÉPZ) [4] autrement dit, par l'hypothèse qu'un état d'un système dont la température – au sens de la Thermodynamique – serait nulle ne serait pas pour autant un état d'énergie nulle, ni même un « état fondamental » au sens de la mécanique ondulatoire. Ce concept semble rendu nécessaire par différents effets observés [5], et semble solidaire de l'élimination de la discontinuité dans ce contexte, comme le notaient déjà Einstein et Stern [6].

Depuis l'interprétation de Schrödinger de la Mécanique ondulatoire, l'élimination complète des discontinuités ne semble plus aussi désirable, dans la mesure où certains aspects de la « quantification » peuvent être représentés sans modification essentielle de la théorie de Broglie. Cependant, la compatibilité avec la Relativité restreinte reste désirable, tout particulièrement pour ce qui concerne la théorie du rayonnement. T. H. Boyer a proposé une dérivation de la loi de Planck fondée sur un modèle de l'établissement de l'équilibre par échange de rayonnement, sous une forme compatible avec la Relativité restreinte [7]. Elle évite les difficultés conceptuelles des dérivations antérieures et fournit également de manière naturelle une ÉPZ. Les dérivations d'Einstein et Hopf [8] d'une part, et celle d'Einstein et Stern [9] que prolonge Boyer d'autre part, sont mathématiquement incomplètes, parce l'équation différentielle que satisfait la distribution d'énergie y est traitée comme si elle était une équation de type Cauchy-Kovalevska, ce qu'elle n'est pas lorsqu'on l'intègre à partir de la fréquence zéro. La solution générale comporte une constante d'intégration qui ne fut pas prise en compte, alors qu'elle aurait fourni des solution physiquement admissibles. On donne ici une solution complète fondée sur la méthode de Réduction fuchsienne [10]. Elle fournit la distribution de Bose-Einstein avec un potentiel chimique quelconque ainsi qu'une ÉPZ ce qui, comme l'a récemment souligné Deeney [11], est désirable.

On montre dans un premier temps la comment compléter la dérivation d'Einstein et Hopf. On montre ensuite comment améliorer dans le même esprit celles d'Einstein et Stern et de Boyer. Dans les deux cas, les calculs sont complètement développés, et peuvent donc être suivis entièrement sans connaissance préalable de la réduction fuchsienne. Une brève conclusion clôt l'article.

2 Remarques mathématiques sur le travail d'Einstein et Hopf

Einstein et Hopf déterminent la densité d'énergie $\rho(\nu, T)d\nu$ – dont nous supprimerons souvent la dépendance par rapport à la température T, fixée dans tout ce qui suit [12] –, par la solution de l'équation suivante [8, p. 1114]

$$\frac{c^3 N}{24\pi R T \nu^2}\rho^2 = \rho - \frac{\nu}{3}\frac{d\rho}{d\nu} \tag{1}$$

Posant

$$a = 8\pi kT/c^3, \text{ avec } k = \frac{R}{N}. \tag{2}$$

l'équation (1) prend la forme plus simple

$$\nu\frac{d\rho}{d\nu} - 3\rho = -\frac{\rho^2}{a\nu^2}. \tag{3}$$

Einstein et Hopf affirment que cette équation s'intègre ("*welche integriert ergibt*") en

$$\rho = a\nu^2 \tag{4}$$

On reconnaît "la loi du rayonnement de Rayleigh, bien connue, qui est en contradiction avec l'expérience de la manière la plus flagrante qui soit" ("*Dies is das wohlbekannte Rayleighsche Strahlungsgesetz, welches mit des Erfahrung im grellsten Widerspruch steht*").

Or, cette solution n'est pas la plus générale.

Théorème 1 *La solution générale de l'équation* (1) *est donnée par*

$$\rho(\nu) = \frac{a\nu^3}{\nu + \nu_0} \tag{5}$$

où ν_0 est une constante d'intégration. On retrouve la solution (5) *pour $\nu_0 = 0$. Cette solution n'a aucune singularité pour $\nu \geq 0$ dès que $\nu_0 > 0$.*

Démonstration. L'équation (1) est fuchsienne en $\nu = 0$: le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas car le coefficient de la dérivée $d\rho/d\nu$ s'annule. La méthode de réduction fuchsienne permet de transformer systématiquement de telles équations en une suite d'autres du même type, par des changements d'inconnue et de variables prescrits par la méthode de réduction, de telle sorte que la dernière équation ainsi obtenue soit justiciable de l'un des théorèmes d'existence pour des équations fuchsiennes non linéaires [10]. On développe ici l'argument de manière élémentaire et autonome, de sorte qu'il soit possible de suivre tous les calculs sans connaissance préalable de la méthode générale qui motive les divers changements de variables de cette preuve.

Posons $D = \nu(d/d\nu)$. L'équation (3) s'écrit

$$(D-3)\rho + \frac{\rho^2}{a\nu^2} = 0. \tag{6}$$

De manière générale, pour toute constante m, $(D-m)\rho = \nu^m D(\rho\nu^{-m})$. En particulier,

$$\nu^3 D\left[\nu^{-3}\rho\right] = (D-3)\rho = -\frac{\rho^2}{a\nu^2}, \tag{7}$$

Posant

$$\sigma = \nu^3/\rho, \tag{8}$$

il vient

$$D(\sigma^{-1}) = D(\nu^{-3}\rho) = -\rho^2/(a\nu^5) = -(\nu/a)\left(\frac{\rho}{\nu^3}\right)^2 = -\frac{\nu}{a}\sigma^{-2}.$$

Comme $D(\sigma^{-1}) = -\sigma^{-2}\nu\frac{d}{d\nu}\sigma$, il s'ensuit que

$$\frac{d}{d\nu}\sigma = 1/a \tag{9}$$

qui est constante. Par suite, $\sigma(\nu) = (\nu+\nu_0)/a$, où ν_0 est une constante d'intégration arbitraire. Ainsi, $\rho(\nu) = \nu^3\sigma^{-1} = a\nu^3/(\nu+\nu_0)$, CQFD.

3 Remarques mathématiques sur le travail d'Einstein et Stern

L'équation à laquelle aboutissent Einstein et Stern est la suivante [14]

$$3kT\left(\rho - \frac{\nu}{3}\frac{d\rho}{d\nu}\right) = h\nu\rho + \frac{c^3}{8\pi\nu^2}\rho^2, \tag{10}$$

équation pour laquelle ils obtiennent comme solution la loi de Planck

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \tag{11}$$

Ici encore, ce n'est pas la solution la plus générale.

Théorème 2 *La solution la plus générale de l'équation* (1) *est donnée par*

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu-\mu}{kT}\right) - 1}. \tag{12}$$

où μ est une constante d'intégration.

On retrouve la solution (11) pour $\mu = 0$. On obtient ainsi une distribution de Bose-Einstein avec potentiel chimique, sans singularité si $\mu < 0$.

DÉMONSTRATION. L'équation (10) s'écrit, en tenant compte de la définition (2),

$$(D-3)\rho + \frac{\rho^2}{a\nu^2} + \frac{h\nu}{kT}\rho = 0, \tag{13}$$

qui est le pendant de l'équation (6). On obtient maintenant

$$\nu^3 D\left[\nu^{-3}\rho\right] = (D-3)\rho = -\frac{\rho^2}{a\nu^2} - \frac{h\nu}{kT}\rho \tag{14}$$

Posant à nouveau $\sigma = \nu^3/\rho$, on obtient une équation linéaire à coefficients constants pour σ :

$$d\sigma/d\nu = 1/a + (h/kT)\sigma. \tag{15}$$

Comme elle admet la solution particulière (constante) $-\frac{kT}{ah}$, il s'ensuit que

$$\sigma = \frac{kT}{ah}\left[\gamma \exp(h\nu/kT) - 1\right],$$

où $\gamma = \gamma(T)$ est une constante d'intégration. Comme $ah/kT = 8\pi h/c^3$, il vient

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\gamma \exp(h\nu/kT) - 1}. \tag{16}$$

La solution n'a pas de singularité pour $\nu > 0$ lorsque $\gamma \geq 1$. Posant dans ce cas

$$\gamma = e^{-\mu/kT}$$

avec $\mu \leq 0$, on obtient

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu-\mu}{kT}\right) - 1}. \tag{17}$$

CQFD.On retrouve la solution d'Einstein et Hopf pour $\gamma = 1$ ou, de manière équivalente, $\mu = 0$. L'argument fournit également la solution la plus générale ; lorsque $\gamma < 1$ il faut sans doute poser une troncature pour les fréquences inférieures à μ.

4 La dérivation de la distribution de Bose-Einstein

Boyer [7] considère une densité $\rho(\nu, T)d\nu = \bar{\rho}(\omega, T)d\omega$ avec $\omega = 2\pi\nu$. Il obtient la distribution d'énergie [7, éq. (36)]

$$\bar{\rho}(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \left(\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} + \frac{1}{2}\hbar\omega \right) \tag{18}$$

par intégration de l'équation [7, éq. (35)]

$$\frac{1}{3} \frac{\pi^2 c^3}{kT\omega^2} [\bar{\rho}^2(\omega, T) - \bar{\rho}_0^2(\omega)] = \bar{\rho}(\omega; T) - \frac{1}{3}\omega \frac{d}{d\omega}\bar{\rho}(\omega, T), \tag{19}$$

où

$$\bar{\rho}_0(\omega) = \hbar\omega^3/(2\pi^2 c^3).$$

Pour permettre la comparaison avec les travaux d'Einstein, revenons à la variable ν. Comme $\rho(\nu) = 2\pi\bar{\rho}(\omega)$, posons

$$\rho_0 := 2\pi\bar{\rho}_0 = \nu^3/b,$$

où

$$b = c^3/4\pi h.$$

En termes de ν, l'équation (19) s'écrit

$$(D - 3)\rho + \frac{1}{a\nu^2} \left[\rho^2 - \rho_0^2\right] = 0 \tag{20}$$

où, rappelons-le, $D\rho = \nu(d\rho/d\nu)$. La solution (18) prend la forme

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \left[\frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} + \frac{1}{2}h\nu \right]. \tag{21}$$

Dans la suite, on supprime à nouveau la dépendance de ρ par rapport à T.

Posant comme avant $\sigma = \nu^3/\rho$, il vient maintenant

$$\frac{d\sigma}{d\nu} = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{\sigma^2}{b^2}\right]. \tag{22}$$

On ne considère que les solutions positives, et l'on écarte la solution constante $\sigma = b$ qui conduirait à $\rho = \rho_0$. Comme cette équation du premier ordre n'a plus de singularité pour $\nu = 0$, ses autres solutions ne peuvent prendre la valeur b sans être constantes. Les solutions non-constantes vérifient alors soit $\sigma > b$ partout, soit $0 \le \sigma < b$.

Les solutions pour lesquelles $0 \le \sigma < b$ s'obtiennent en posant $\sigma = b\,\mathrm{th}\,\tau(\nu)$. Il vient alors $d\tau/d\nu = 1/(ab) = h/2kT$ d'où $\tau(\nu) = (h\nu - \mu)/2kT$, μ étant une constante d'intégration et donc,

$$\sigma(\nu) = b\,\mathrm{th}\,[(h\nu - \mu)/2kT],$$

d'où

$$\rho(\nu) = \frac{\nu^3}{b}\coth\tau = \frac{2\nu^3}{b}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(2\tau) - 1}\right).$$

Comme $2\nu^3/b = 8\pi h\nu^3/c^3$, on obtient

$$\rho(\nu, T) = \frac{\nu^3}{\sigma} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\left[\frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu-\mu}{kT}\right) - 1} + \frac{1}{2}h\nu\right], \tag{23}$$

qui se réduit à (21) lorsque $\mu = 0$. On reconnaît la loi de Planck avec ÉPZ et potentiel chimique. La constante d'intégration μ s'interprète donc comme un potentiel chimique.

Les solutions pour lesquelles $\sigma > b$ s'obtiennent en posant $\sigma = b\coth\tau(\nu)$. Il vient alors $d\tau/d\nu = 1/(ab) = h/2kT$ d'où $\tau(\nu) = (h\nu - \mu)/2kT$, μ étant une constante d'intégration et donc,

$$\sigma(\nu) = b\coth[(h\nu - \mu)/2kT],$$

Comme $\mathrm{th}\,\tau = 2\left[\frac{1}{2} - 1/(\exp(2\tau) + 1)\right]$, on obtient maintenant l'expression

$$\rho(\nu, T) = \frac{\nu^3}{\sigma} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\left[\frac{1}{2}h\nu - \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu-\mu}{kT}\right) + 1}\right]. \tag{24}$$

Cette distribution est strictement positive si $h\nu > \mu$.

5 Conclusion

Nous avons obtenu ce qui semble être la première dérivation de la distribution de Bose-Einstein avec potentiel chimique non nul et ÉPZ, fondée sur un mécanisme d'établissement de l'équilibre par échange de rayonnements électromagnétiques compatible avec la Relativité restreinte, par une modification d'un argument de Boyer pour le cas des photons. Cet argument était lui-même une modification des dérivations de Broglie de la loi de Wien et d'Einstein et Stern de la loi de Planck. L'élément nouveau est que les solutions antérieures de l'équation dont la solution fournit la distribution désirée étaient mathématiquement incomplètes. Nous avons obtenu une solution complète à l'aide de la méthode de Réduction fuchsienne, qui fait apparaître le potentiel chimique comme une constante d'intégration.

References

[1] Louis de Broglie, « Rayonnement noir et quanta de lumière », *Journal de Physique*, série VI, t. III, 422-428.

[2] « Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothse » (A. Einstein, tr.), *Zeitschrift für Physik*, **26** (1924), 178-181. Einstein a modifié sur un point le texte de Bose : celui-ci ne justifie pas le facteur 8π – plutôt que 4π – en invoquant l'existence de deux états de polarisation, ce qui reviendrait à invoquer un élément de la théorie ondulatoire alors qu'il se fonde précisément sur l'hypothèse corpusculaire. En réalité, Bose avait proposé que le quantum de lumière avait deux états de spin, ce qui fut établi peu après par C.V. Raman et S. Bhagavantham (*Indian J. Phys.*, **6** (1931), 353-366). Ce travail, ainsi que les deux articles de Meghnad Saha et R.K. Sur consacrés à l'entropie du rayonnement (*Phil. Mag.*, sér. VII, **1** (1926), 279 et 890) rappellent le travail de Bose et reproduisent à cette occasion l'argument de la version originale malheureusement perdue. Einstein a également traduit et fait publier le travail de Bose sur l'interaction matière-rayonnement (S.N.. Bose, « Wärmegleichgewicht im Strahlungsfeld bei Anwesenheit von Materie », *Z. f. Phys.*, **27** (1924), 384-393). Pour un examen approfondi de ses deux travaux de 1924, nous renvoyons à l'étude de Partha Ghose (« Bose Statistics : A historical perspective », in *S N Bose : The Man and His Work. Part I : Collected Scientific Papers*, édité par C.K. Majumdar, Partha Ghose, Enakshi Chatterjee, Samik Bandyopadhy et Santimay Chatterjee (Principal Editor), S N Bose National Centre for Basic Sciences, Calcutta, 1994, pp. 35-71 ; ce volume contient également les versions allemande et anglaise des deux papiers de 1924). M. Ghose montre également que le commentaire négatif d'Einstein sur le second papier a été infirmé sur l'essentiel par la suite, dans la me-

sure où l'émission spontanée n'est pas une propriété d'un système isolé mais d'un système atome-'vide' (Ghose, p. 66, citant Haroche et Kleppner ; nous traduisons). Il est à noter qu'Einstein traduisit et fit publier un travail avec lequel il était pourtant partiellement en désaccord. Nous remercions vivement M. J. Robert d'avoir attiré notre attention sur les différents points évoqués dans cette note.

[3] Bose montre également que la statistique de Maxwell-Boltzmann conduit à la loi de Wien mais ce résultat avait déjà été démontré par de Broglie (1922, *op. cit*). Voir à ce sujet la *Notice sur les travaux scientifiques* (Hermann, Paris, 1931) où Louis de Broglie fait remarquer que l'idée de « molécules de lumière » qu'il avait introduite la même année (« Sur les interférences et la théorie des quanta de lumière », *C. R.*, **175** (1922), p. 811) allait dans le même sens que la statistique de Bose, dans la mesure où les photons d'une même « molécule » seraient impossibles à distinguer.

[4] Jagdish Mehra et Jelmut Rechenberg, « Planck's Half-Quanta : A History of the Concept of Zero-Point Energy », *Foundations of Physics*, **29**(1) (1999) 91-131.

[5] Les principaux sont rappelés par Mehra et Rechenberg, *op. cit.*

[6] A. Einstein, O. Stern, « Einige Argumente für die Annahme einer molekularen Agitation beim absolutem Nullpunkt », *Annalen der Physik*, **33** (1910), 551-560. Cela ne signifie pas pour Einstein et Stern qu'il faille éliminer les quanta de l'ensemble de la Mécanique ondulatoire. Le résumé p. 560 précise en effet que « Die Annahme der Nullpunktsenergie eröffnet einen Weg, die Plancksche Strahlungsformel ohne Zuhilfenahme irgendwelcher Diskontinuitäten abzuleiten. Es erscheint jedoch zweifelhaft, ob auch die anderen Schwierigkeiten sich ohne Annahme von Quanten werden bewältigenlasse » (« L'hypothèse d'une énergie du point zéro ouvre la voie à une dérivation de la formule de rayonnement de Planck sans recourir à des discontinuités quelles qu'elles soient. Il semble cependant douteux que les autres difficultés puissent également être surmontées sans l'hypothèse des quanta. ») L'hypothèse de la discontinuité de la lumière par Einstein dès 1905 reposait sur un faisceau d'arguments, et non sur une simple intuition (Léna Soler, « Les quanta de lumière d'Einstein en 1905, comme point focal d'un réseau argumentatif complexe », *Philosophia Scientiæ*, **3**(3) (1998-1999), 107-144).

[7] Timothy H. Boyer, « Derivation of the Blackbody Radiation Spectrum without Quantum Assumptions », *Phys. Rev.*, **182**(5) (25 June 1969), 1374-1383.

[8] A. Einstein, L. Hopf, « Statistische Untersuchung der Bewegung eines Resonators in einem Strahlungsfeld », *Annalen der Physik*, **33** (1910), 1105-1115.

[9] Op. cit. [6].

[10] S. Kichenassamy, *Fuchsian Reduction, Applications to Geometry, Cosmology and Mathematical Physics*, Birkhäuser, Boston, 2007.

[11] F.A. Deeney, « On the issue of zero point energy in Bose-Einstein condensates », *Physics Letters*, **A 383** (2019) 589-592.
[12] Ici, T est la température absolue, R est la constante des gaz parfaits, N le nombre d'Avogadro, $k = R/N$ la constante de Boltzmann, c la vitesse de la lumière, h la constante de Planck, et $\hbar = h/2\pi$. Einstein et Hopf notent la température absolue Θ.
[13] R. Baierlein, « The elusive chemical potential », *Amer. J. Phys.* **69**(4) (April 2001) 423-434
[14] Voir p. 559 de leur article. Il faut multiplier les deux termes du second membre par ν pour retrouver la solution qu'ils obtiennent. Cela est également nécessaire pour la cohérence dimensionnelle de l'équation.

(Manuscrit reçu le 26 septembre 2023, modifié le 30 avril 2024)