

Sur l'électron comme onde solitaire

CLAUDE DAVIAU, JACQUES BERTRAND

Fondation Louis de Broglie
23 rue Marsoulan, F-75012 Paris, France
daviau.claude@orange.fr
bertrandjacques-m@orange.fr

RÉSUMÉ. Le dualisme onde-particule, introduit par Einstein pour la lumière, a été étendu à la matière par Louis de Broglie dans ses articles de 1923, dont nous célébrons le centenaire. L'association d'une onde au mouvement de toute particule est un phénomène de physique relativiste. de Broglie n'a pas étudié seulement l'onde-pilote ou la "double solution" d'une équation de Schrödinger, il a aussi étudié le dualisme onde-particule à partir de l'équation relativiste de l'électron, et des solitons des équations d'onde non linéaires. C'est l'électron comme soliton que nous présentons ici, à partir d'une amélioration à deux masses de l'équation de Dirac. Cette équation d'onde, invariante sous Cl_3^* , extension de l'invariance relativiste, peut être étendue à l'ensemble des particules et des interactions du modèle standard (théorie du tout). Tous les fermions peuvent donc être associés à des ondes solitaires, très localisées.

ABSTRACT. The wave-particle dualism, first introduced by Einstein for light, was next extended by Louis de Broglie in his articles (1923), whose we celebrate the centenary. The association of a wave to the movement of any particle being a phenomenon of relativistic physics, de Broglie did not only study the pilot wave nor his "double solution" of a Schrödinger equation; he also studied the wave-particle dualism from the relativistic wave equation of the electron (Dirac equation), and from nonlinear wave equations. It is the electron as a soliton that we present here, from our previous improvement of a nonlinear Dirac equation with two proper masses. That improved wave equation is invariant under the Cl_3^* group extending the relativistic invariance. It may also be extended to describe all particles and the four kinds of interaction of the Standard Model (Theory of Everything). All fermions may hence be associated to very localized solitary waves.

1 L'onde de matière et son invariance relativiste

En donnant, dès 1905, aux quanta d'impulsion-énergie imaginés par Planck, le caractère de réalité physique, Einstein introduisit le dualisme onde-particule [1] : la lumière est à la fois une onde électromagnétique **et** contient des paquets d'impulsion-énergie. 18 ans plus tard, Louis de Broglie, avec les articles dont nous célébrons le centenaire, étendit ce dualisme aux ondes de matière. Cette extension fut accueillie avec enthousiasme par Einstein et confirmée expérimentalement par la diffraction des électrons qu'elle prévoyait. Schrödinger, grand spécialiste de la relativité, trouva une équation pour l'onde de matière, mais elle n'était pas relativiste. L'onde, à valeur complexe, se caractérisait en tout point de l'espace par une phase, comme en avait besoin l'onde de de Broglie, et par un module, que Born interpréta, sur le modèle de la lumière, comme donnant la probabilité de présence de la particule-électron. La même année était découvert le spin de l'électron, Pauli en proposait une équation, là aussi non relativiste. Dans ce cadre non relativiste contraire à son intuition physique, de Broglie imagina une première approche, l'onde pilote. Puis, l'onde de probabilité manquant du caractère physique de l'onde, il conçut la "double solution", mais se trouva mis sur la défensive au congrès Solvay de 1927, où il ne présenta que l'onde pilote.

1.1 L'équation de Dirac (cas linéaire et des grandes vitesses)

Dès 1928 Dirac obtint [2] une équation d'onde pour l'électron compatible à la fois avec les contraintes de l'invariance relativiste et avec l'existence d'une densité de probabilité pour l'électron. Comme de Broglie était parti de l'idée d'une onde relativiste associée au mouvement de la particule, il étudia aussitôt cette équation d'onde de manière approfondie. Il publia deux livres sur l'équation de Dirac : *l'électron magnétique* en 1934 [3] et *la théorie des particules de spin 1/2 (électrons de Dirac)* en 1952 [4]. Ici on part de l'équation d'onde linéaire dans le cas des fortes vitesses, qui est aussi utilisée pour les interactions faibles, et l'équation de Dirac s'écrit :

$$0 = [\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi; \quad q := \frac{e}{\hbar c}; \quad \hbar := \frac{h}{2\pi}; \quad m := \frac{m_0 c}{\hbar}.$$

$$\psi := \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}; \quad \xi := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}; \quad \eta := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

e est la charge et m_0 est la masse propre de l'électron, A est le vecteur d'espace-temps potentiel électromagnétique extérieur. ξ désigne la partie

droite de l'onde de l'électron et η désigne la partie gauche. On se sert des matrices suivantes, et d'elles seules¹ :

$$\gamma_j := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^j = -\hat{\sigma}^j = \hat{\sigma}_j := -\sigma_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2)$$

$$\gamma_0 = \gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad I_2 = \sigma_0 = \sigma^0 = \hat{\sigma}^0 = \hat{\sigma}_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\gamma_5 := i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}; \quad \frac{1 + \gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix},$$

où les σ_j sont les matrices bien connues de Pauli. L'équation de Dirac de l'électron (1) est équivalente au système suivant :

$$0 = \sigma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu)\eta + im\xi, \quad (4)$$

$$0 = \hat{\sigma}^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu)\xi + im\eta. \quad (5)$$

1.2 Invariance relativiste et son extension

On met maintenant ces deux équations ensemble en posant (pour plus de détails, voir [5] [6]) :

$$\nabla\hat{\phi}i\sigma_3 = qA\hat{\phi} + m\phi, \quad (6)$$

$$\phi := \sqrt{2}(\xi \quad \hat{\eta}) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1 - \eta_2^* \\ \xi_2 \quad \eta_1^* \end{pmatrix}; \quad \hat{\phi} = \sqrt{2}(\eta \quad \hat{\xi}) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_1 - \xi_2^* \\ \eta_2 \quad \xi_1^* \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\nabla := \sigma^\mu\partial_\mu; \quad \hat{\nabla} := \hat{\sigma}^\mu\partial_\mu; \quad A := \sigma^\mu A_\mu; \quad \hat{A} := \hat{\sigma}^\mu A_\mu. \quad (8)$$

Avec les quatre nombres complexes de la fonction ψ on construit ainsi le ϕ à valeur dans Cl_3 , qui est aussi l'algèbre de Pauli. Pour obtenir l'invariance relativiste de l'équation de Dirac, il suffit de considérer le **dilatateur** M , élément fixe quelconque de Cl_3 , qui définit la transformation R par :

$$R : x \mapsto x' = R(x) := MxM^\dagger; \quad M \in Cl_3; \quad \xi' = M\xi; \quad \eta' = \widehat{M}\eta, \quad (9)$$

1. La transformation $M \mapsto \widehat{M}$ est l'automorphisme principal dans l'algèbre engendrée par les matrices de Pauli, que nous appelons Cl_3 . Le groupe multiplicatif de cette algèbre est noté Cl_3^* . On trouvera des explications plus détaillées dans le chapitre A de [6].

$$\mathbf{x} = x^\mu \sigma_\mu = x^0 + \vec{x} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}' = x'^\mu \sigma_\mu, \quad (10)$$

$$\widehat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} = x^0 - \vec{x}, \quad \det(M) = r e^{i\theta}, \quad r := |\det(M)| \quad (11)$$

$$||\mathbf{x}'||^2 = \det(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = (x^0)^2 - (\vec{x})^2. \quad (12)$$

$$\det(\mathbf{x}') = r^2 \det(\mathbf{x}); \quad R_0^0 > 0; \quad \det(R_\nu^\mu) = r^4; \quad \mathbf{x}'^\mu = R_\nu^\mu \mathbf{x}^\nu. \quad (13)$$

On remarquera qu'en (9) les ondes gauches et droites se distinguent par la manière dont elles se transforment. Et on remarquera aussi que (10) fait de l'espace-temps un sous-ensemble de Cl_3 , tandis que (12) implique que la transformation dite **parité** ($M \mapsto \widehat{M}$) fait partie de la pseudo-norme d'espace-temps. Et R est une **similitude**, produit d'une transformation de Lorentz propre et d'une homothétie de rapport r . De plus $f : M \mapsto R$ est un homomorphisme du groupe de Lie Cl_3^* composé des éléments inversibles de Cl_3 dans le groupe \mathcal{S} des similitudes, dont le noyau est le groupe chirale $U(1)$ des interactions faibles, qui est aussi le groupe de la jauge utilisée par Lochak pour sa théorie du monopôle magnétique [7]. L'équation de Dirac dans sa forme initiale ne connaît que la partie de ce groupe formée des M de déterminant 1, auquel cas la similitude est réduite à une transformation propre de Lorentz, et le noyau est réduit à $\{\pm 1\}$.

2 Densités, identités

L'onde de l'électron ne se limite pas à la seule fonction d'onde ψ , elle permet de définir des **densités tensorielles** :

$$\det(\phi) = S_0 := \phi \bar{\phi} = \bar{\phi} \phi = \Omega_1 + i\Omega_2 = \rho e^{i\beta}, \quad \bar{\phi} := \widehat{\phi}^\dagger, \quad (14)$$

Ω_1 , Ω_2 et ρ sont des invariants relativistes, β est l'angle d'Yvon-Takabayasi, et on a :

$$\begin{aligned} D_\mu &:= \phi \sigma_\mu \phi^\dagger; \quad 2D_\mu \cdot D_\nu = \delta_{\mu\nu} \rho^2; \quad D_0 = D_R + D_L, \\ D_R &:= \phi \frac{1 + \sigma_3}{2} \phi^\dagger; \quad D_L := \phi \frac{1 - \sigma_3}{2} \phi^\dagger, \quad D_3 = D_R - D_L. \end{aligned} \quad (15)$$

(D_0, D_1, D_2, D_3) est une base orthogonale mobile d'espace-temps. D_0 et D_3 sont des combinaisons linéaires des courants chiraux D_R et D_L . D_1

et D_2 ne sont pas invariants de jauge. Et on a :

$$S_\mu := \phi \sigma_\mu \bar{\phi}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3; \quad S_1 - iS_2 = 2S_L; \quad (16)$$

$$S_1 + iS_2 = 2S_R; \quad S_R = \phi(\sigma_1 + i\sigma_2)\bar{\phi}; \quad S_L = \phi(\sigma_1 - i\sigma_2)\bar{\phi},$$

$$\begin{aligned} D_0 \widehat{D}_0 = \widehat{D}_0 D_0 = \rho^2; \quad v := D_0/\rho; \quad 1 = v\widehat{v} = \widehat{v}v; \quad v^{-1} = \widehat{v}, \\ v\eta = e^{-i\beta}\xi; \quad \widehat{v}\xi = e^{i\beta}\eta; \quad v\widehat{\phi} = e^{-i\beta}\phi; \quad \widehat{v}\phi = e^{i\beta}\widehat{\phi}. \end{aligned} \quad (17)$$

Ces deux dernières identités sont nouvelles et vont être utilisées maintenant pour **décroiser** le système d'équations.

2.1 Système décroisé

Le système (5) prend la forme décroisée :

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\nabla + qA + me^{i\beta}v)\eta; \quad 0 = (-i\nabla + qA)\eta + m\xi, \\ 0 &= (-i\widehat{\nabla} + q\widehat{A} + me^{-i\beta}\widehat{v})\xi; \quad 0 = (-i\widehat{\nabla} + q\widehat{A})\xi + m\eta. \end{aligned} \quad (18)$$

Notons que sous la forme de gauche, pourtant équivalente à la forme de droite, les équations paraissent non linéaires, puisque β et v dépendent de ϕ . On peut dire que l'équation de Dirac est linéaire par accident, deux termes non linéaires se compensant exactement. Une autre densité tensorielle importante est la densité lagrangienne :

$$0 = \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(\bar{\psi}\gamma^\mu(-i\partial_\mu + qA_\mu)\psi) + (\bar{\psi}\gamma^\mu(-i\partial_\mu + qA_\mu)\psi)^\dagger \right] \quad (19)$$

$$+ m\bar{\psi}\psi; \quad \bar{\psi} := \psi^\dagger\gamma_0,$$

$$0 = \mathcal{L} = \Re[\bar{\phi}(\nabla\widehat{\phi})\sigma_{21} + \bar{\phi}qA\widehat{\phi}] + m\rho \cos(\beta).$$

On a précédemment étudié l'équation obtenue en simplifiant le système décroisé [5] [6] :

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\nabla + qA + mv)\eta, \\ 0 &= (-i\widehat{\nabla} + q\widehat{A} + m\widehat{v})\xi, \end{aligned} \quad (20)$$

dont la densité lagrangienne s'obtient, tout comme le système d'équation lui-même, en supprimant le terme contenant l'angle β dans la densité lagrangienne de l'équation de Dirac :

$$0 = \mathcal{L} = \Re[\bar{\phi}(\nabla\widehat{\phi})\sigma_{21} + \bar{\phi}qA\widehat{\phi}] + m\rho, \quad (21)$$

Et l'on peut établir que l'équation d'onde s'obtient bien grâce aux équations de Lagrange à partir de cette densité tensorielle. En outre la densité lagrangienne elle-même est simplement la partie réelle de l'équation d'onde, mise sous forme complètement invariante relativiste [5] [6].

3 Equation d'onde améliorée de l'électron

Notre équation d'onde améliorée se présente sous trois formes équivalentes : la forme complètement invariante :

$$0 = \bar{\phi}(\nabla\hat{\phi})\sigma_{21} + \bar{\phi}qA\hat{\phi} + \mathbf{m}\rho; \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

la forme usuelle :

$$0 = \nabla\hat{\phi}\sigma_{21} + qA\hat{\phi} + e^{-i\beta}\phi\mathbf{m}, \quad (23)$$

et la forme système d'équations, que l'on obtient à partir du précédent système décroisé (20) en remplaçant la masse unique m par la masse \mathbf{l} pour l'onde gauche et par la masse \mathbf{r} pour l'onde droite :

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\nabla + qA + \mathbf{l}v)\eta, \\ 0 &= (-i\hat{\nabla} + q\hat{A} + \mathbf{r}\hat{v})\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

On peut considérer que v se substitue à la *vitesse de guidage* de l'onde pilote ou de la double solution. Mais comme on part d'une équation d'onde relativiste, on a des différences importantes par rapport à l'équation d'onde non relativiste, où seule la densité de probabilité se calcule comme une des 36 densités tensorielles que l'on obtient à partir de l'onde ϕ (36 au lieu des 16 connues en 1934), de manière quadratique par rapport aux valeurs de l'onde, et sans dérivation partielle. Notons aussi que, puisque $v = D_0/\rho$, cette vitesse est commune aux deux parties de l'onde. Cette vitesse n'est pas un vecteur ordinaire \vec{v} de l'espace, v est un vecteur d'espace-temps unitaire c'est-à-dire de longueur : $1 = v\hat{v}$.

3.1 Densité lagrangienne, impulsion-énergie, normalisation

En utilisant la longueur de Planck $l_P = \sqrt{G\hbar/c^3}$ la densité lagrangienne s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= k\frac{\mathcal{L}}{m} = \frac{\mathcal{L}_L}{\mathbf{l}} + \frac{\mathcal{L}_R}{\mathbf{r}}; \quad \mathcal{L}_L = \Re[\eta^\dagger(-i\nabla + qA + \mathbf{l}v)\eta], \quad (25) \\ l_P^3 &= k\hbar c; \quad \mathcal{L}_R = \Re[\xi^\dagger(-i\hat{\nabla} + q\hat{A} + \mathbf{r}\hat{v})\xi], \end{aligned}$$

ce qui signifie que la densité lagrangienne est moyenne harmonique pondérée de la densité de l'onde gauche et de celle de l'onde droite. Et donc

l'électron, avec l'onde de de Broglie, admet non pas une mais **deux** densités d'impulsion-énergie : le tenseur T de Tétrode et le tenseur V de Costa de Beauregard [8] :

$$T_{\nu}^{\mu} := T_{R\nu}^{\mu} + T_{L\nu}^{\mu}; \quad T_{L\nu}^{\mu} := \Re \left[-i \left(\frac{m}{k\mathbf{l}} \eta^{\dagger} \sigma^{\mu} d_{\nu}^L \eta \right) \right] \quad (26)$$

$$V_{\nu}^{\mu} := T_{R\nu}^{\mu} - T_{L\nu}^{\mu}; \quad T_{R\nu}^{\mu} := \Re \left[-i \left(\frac{m}{k\mathbf{r}} \xi^{\dagger} \hat{\sigma}^{\mu} d_{\nu}^R \xi \right) \right], \quad (27)$$

$$d_{\mu}^L := -i\partial_{\mu} + qA_{\mu} + \mathbf{l}v_{\mu}; \quad d_{\mu}^R := -i\partial_{\mu} + qA_{\mu} + \mathbf{r}v_{\mu}.$$

On peut donc dire aussi de la densité d'énergie de l'onde qu'elle est moyenne harmonique pondérée de la densité d'énergie de l'onde droite et de celle de l'onde gauche. La nécessité de normaliser l'onde de l'électron découle en fait du principe d'équivalence, car l'énergie globale de l'onde, figurant dans la masse-énergie $m_0 = m\hbar c$, doit être égale à la somme sur tout l'espace de l'énergie locale de l'onde quantique :

$$\mathbf{J} := \frac{m}{k\mathbf{l}} D_L + \frac{m}{k\mathbf{r}} D_R; \quad (28)$$

$$\iiint dv \frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} = 1 \iff E = \iiint dv T_0^0. \quad (29)$$

4 L'onde solitaire de l'électron

Pour résoudre l'équation d'onde améliorée et obtenir une solution de type soliton, même en l'absence de potentiel extérieur, nous allons suivre la méthode de séparation des variables de H. Krüger [9] [10], posant (voir aussi [5] [6] Chapitre C) :

$$x^1 := r \sin \theta \cos \varphi; \quad x^2 := r \sin \theta \sin \varphi; \quad x^3 := r \cos \theta. \quad (30)$$

On utilise les notations suivantes :

$$i_1 := \sigma_{23} = i\sigma_1; \quad i_2 := \sigma_{31} = i\sigma_2; \quad i_3 := \sigma_{12} = i\sigma_3, \quad (31)$$

$$S := \exp \left(-\frac{\varphi}{2} i_3 \right) \exp \left(-\frac{\theta}{2} i_2 \right); \quad \Omega = \widehat{\Omega} := r^{-1} (\sin \theta)^{-\frac{1}{2}} S, \quad (32)$$

$$\vec{\partial}' := \sigma_3 \partial_r + \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \sigma_2 \partial_{\varphi}.$$

H. Krüger a obtenu l'identité [9] :

$$\vec{\partial} = \Omega \vec{\partial}' \Omega^{-1}, \quad (33)$$

Cette relation, remarquable, utilise les propriétés de l'algèbre Cl_3 . On cherche à résoudre ici l'équation d'onde de l'électron dans sa forme améliorée, avec deux masses et dans le cas d'un potentiel extérieur nul. On a donc à résoudre :

$$0 = \nabla \widehat{\phi} \sigma_{21} + qA \widehat{\phi} + e^{-i\beta} \phi \mathbf{m}, \quad (34)$$

$$(\partial_0 - \vec{\partial}) \widehat{\phi} i_3 = qA \widehat{\phi} + e^{-i\beta} \phi \mathbf{m}. \quad (35)$$

On sait séparer, en une seule fois, les variables t et φ des variables r et θ avec :

$$\phi =: \Omega X e^{(\lambda\varphi - Ex^0)i_3}; \quad \widehat{\phi} = \Omega \widehat{X} e^{(\lambda\varphi - Ex^0)i_3}, \quad (36)$$

$$X := \begin{pmatrix} AU - B^*V \\ CV \ D^*U \end{pmatrix}; \quad \widehat{X} = \begin{pmatrix} DU - C^*V \\ BV \ A^*U \end{pmatrix},$$

où A, B, C et D sont des fonctions, à valeur dans \mathbb{C} , de la variable radiale r , U et V étant des fonctions à valeur réelle de la variable angulaire θ . $\hbar c E$ est l'énergie de l'électron. λ est une constante réelle qui est le nombre quantique magnétique dans le cas de l'électron d'un atome d'hydrogène. On a :

$$\rho e^{i\beta} = \eta^\dagger \xi = \phi \bar{\phi} = \det(\phi) = \frac{\det(X)}{r^2 \sin \theta}, \quad (37)$$

$$\rho_X e^{i\beta} := \det(X) = AD^*U^2 + CB^*V^2. \quad (38)$$

L'équation d'onde (34) utilise :

$$\begin{aligned} & \vec{\partial}' (\widehat{X} e^{\lambda\varphi i_3}) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_r & \frac{1}{r}(\partial_\theta - \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi) \\ \frac{1}{r}(\partial_\theta + \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi) & -\partial_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} DU e^{i\lambda\varphi} - C^*V e^{-i\lambda\varphi} \\ BV e^{i\lambda\varphi} \ A^*U e^{-i\lambda\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D'U + \frac{B}{r}(V' + \frac{\lambda V}{\sin \theta}) - C'^* + \frac{A^*}{r}(U' - \frac{\lambda U}{\sin \theta}) \\ \frac{A}{r}(U' - \frac{\lambda U}{\sin \theta}) - B'V - \frac{C^*}{r}(V' + \frac{\lambda V}{\sin \theta}) - A'^*U \end{pmatrix} e^{\lambda\varphi i_3}. \end{aligned} \quad (39)$$

Si U et V sont solutions du système d'équations :

$$U' - \frac{\lambda U}{\sin \theta} = -\kappa V; \quad V' + \frac{\lambda V}{\sin \theta} = \kappa U, \quad (40)$$

on a :

$$\vec{\partial}'(\widehat{X}e^{\lambda\varphi i_3}) = \begin{pmatrix} (D' + \frac{\kappa}{r}B)U (-C'^* - \frac{\kappa}{r}A^*)V \\ (-B' - \frac{\kappa}{r}D)V (-A'^* - \frac{\kappa}{r}C^*)U \end{pmatrix} e^{\lambda\varphi i_3}. \quad (41)$$

L'équation (34) donne, dans le cas d'un potentiel en $qA = -u/r$:

$$0 = (E + \frac{u}{r})\widehat{X}e^{\lambda\varphi i_3} - \vec{\partial}'(\widehat{X}e^{\lambda\varphi i_3})i_3 - e^{-i\beta}X\mathbf{m}e^{\lambda\varphi i_3}. \quad (42)$$

On obtient alors le système :

$$0 = [(E + \frac{u}{r})D - i(D' + \frac{\kappa}{r}B) - e^{-i\beta}\mathbf{1}A]U, \quad (43)$$

$$0 = [(E + \frac{u}{r})B + i(B' + \frac{\kappa}{r}D) - e^{-i\beta}\mathbf{1}C]V, \quad (44)$$

$$0 = [(E + \frac{u}{r})C^* + i(C'^* + \frac{\kappa}{r}A^*) - e^{-i\beta}\mathbf{r}B^*]V, \quad (45)$$

$$0 = [(E + \frac{u}{r})A^* - i(A'^* + \frac{\kappa}{r}C^*) - e^{-i\beta}\mathbf{r}D^*]U. \quad (46)$$

Cette séparation des variables, empruntée à l'équation de Dirac linéaire, n'est effective que si l'angle β ne dépend que de la variable radiale r . Or on a vu avec (38) que ce n'est généralement pas exact. Et on a :

$$\rho_X e^{i\beta} = AD^*U^2 + CB^*V^2 \quad (47)$$

$$= (AD^* + CB^*)\frac{U^2 + V^2}{2} + (AD^* - CB^*)\frac{U^2 - V^2}{2} \quad (48)$$

Donc l'angle β dépend de θ sauf si :

$$AD^* - CB^* = 0 \quad \text{ou} \quad U^2 - V^2 = 0, \quad (49)$$

Des systèmes similaires ont été résolus au chapitre C de [5] et [6]. On peut donc utiliser la même méthode de résolution. La constante κ est un nombre entier non nul vérifiant $|\kappa| = j + 1/2$ où j est le moment cinétique de l'électron. Dans le cas où $\kappa = 1$ et $\lambda = 1/2$ on a :

$$U = -\sqrt{\sin\theta} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right); \quad V = -\sqrt{\sin\theta} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (50)$$

$$U^2 + V^2 = \sin\theta; \quad U^2 - V^2 = \sin\theta \cos\theta; \quad 2UV = \sin^2\theta. \quad (51)$$

De même pour $\kappa = 1$ et $\lambda = -1/2$, on obtient :

$$U = -\sqrt{\sin\theta} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right); \quad V = \sqrt{\sin\theta} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (52)$$

$$U^2 + V^2 = \sin\theta; \quad U^2 - V^2 = -\sin\theta \cos\theta; \quad 2UV = -\sin^2\theta. \quad (53)$$

On peut établir que, dans tous les cas, $U^2 - V^2$ contient en facteur $\cos \theta$ et s'annule dans le plan équatorial $\theta = \pi/2$. Le système radial de l'équation améliorée reste donc proche de celui de l'équation linéaire.

4.1 Résolution du système radial

En conjuguant les deux dernières équations, le système radial devient :

$$0 = \left(E + \frac{u}{r}\right)D - i\left(D' + \frac{\kappa}{r}B\right) - e^{-i\beta}\mathbf{1}A, \quad (54)$$

$$0 = \left(E + \frac{u}{r}\right)B + i\left(B' + \frac{\kappa}{r}D\right) - e^{-i\beta}\mathbf{1}C, \quad (55)$$

$$0 = \left(E + \frac{u}{r}\right)C - i\left(C' + \frac{\kappa}{r}A\right) - e^{i\beta}\mathbf{r}B, \quad (56)$$

$$0 = \left(E + \frac{u}{r}\right)A + i\left(A' + \frac{\kappa}{r}C\right) - e^{i\beta}\mathbf{r}D. \quad (57)$$

On suppose que la masse-énergie est la moyenne harmonique m , et que $\kappa = 1$. On pose maintenant :

$$A = ar^s e^{-\Lambda mr}; \quad B = br^s e^{-\Lambda mr}; \quad C = cr^s e^{-\Lambda mr}; \quad D = dr^s e^{-\Lambda mr}. \quad (58)$$

où Λ est une constante réelle positive et a, b, c et d sont des constantes complexes. Le système radial devient, après simplification par $re^{-\Lambda mr}$:

$$0 = \left(m + \frac{u}{r}\right)d - i\left(\frac{s}{r} - \Lambda m\right)d - i\frac{\kappa}{r}b - e^{-i\beta}\mathbf{1}a, \quad (59)$$

$$0 = \left(m + \frac{u}{r}\right)b + i\left(\frac{s}{r} - \Lambda m\right)b + i\frac{\kappa}{r}d - e^{-i\beta}\mathbf{1}c, \quad (60)$$

$$0 = \left(m + \frac{u}{r}\right)c - i\left(\frac{s}{r} - \Lambda m\right)c - i\frac{\kappa}{r}a - e^{i\beta}\mathbf{r}b, \quad (61)$$

$$0 = \left(m + \frac{u}{r}\right)a + i\left(\frac{s}{r} - \Lambda m\right)a + i\frac{\kappa}{r}c - e^{i\beta}\mathbf{r}d. \quad (62)$$

Ce système équivaut à :

$$0 = m(1 + i\Lambda)d - e^{-i\beta}\mathbf{1}a; \quad 0 = (u - is)d - ikb, \quad (63)$$

$$0 = m(1 - i\Lambda)a - e^{i\beta}\mathbf{r}d; \quad 0 = (u + is)b + ikd, \quad (64)$$

$$0 = m(1 - i\Lambda)b - e^{-i\beta}\mathbf{1}c; \quad 0 = (u - is)c - ika, \quad (65)$$

$$0 = m(1 + i\Lambda)c - e^{i\beta}\mathbf{r}b; \quad 0 = (u + is)a + ikc. \quad (66)$$

Il n'y a de solution non nulle que si le déterminant de chacun des quatre systèmes précédents est nul. Or nous n'avons en fait que deux conditions :

$$0 = 1 + \Lambda^2 - \frac{\mathbf{lr}}{m^2}, \quad (67)$$

$$0 = u^2 + s^2 - \kappa^2. \quad (68)$$

On pose :

$$1 + i\Lambda =: \sqrt{1 + \Lambda^2} e^{i\delta}; \quad s + iu =: e^{i\gamma} \kappa. \quad (69)$$

Comme la masse-énergie m est supposée être, non pas la moyenne géométrique $m_g = \sqrt{\mathbf{lr}}$, mais la moyenne harmonique m telle que :

$$\frac{2}{m} = \frac{1}{\mathbf{l}} + \frac{1}{\mathbf{r}}, \quad (70)$$

Alors on peut avoir :

$$\Lambda^2 = \frac{\mathbf{lr}}{m^2} - 1 = \frac{m_g^2}{m^2} - 1; \quad \Lambda = \sqrt{\frac{\mathbf{lr}}{m^2} - 1}. \quad (71)$$

Et on a de plus :

$$1 + i\Lambda = \sqrt{1 + \Lambda^2} e^{i\delta} = \frac{m_g}{m} e^{i\delta}, \quad (72)$$

$$s - iu = e^{-i\gamma}; \quad 1 - i\Lambda = \frac{m_g}{m} e^{-i\delta} \quad (73)$$

Avec ces conditions, le système d'équations radiales (59) – (62) est équivalent aux quatre relations indépendantes :

$$d = \sqrt{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} e^{-i(\delta+\beta)} a; \quad b = \sqrt{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} e^{i(\delta-\beta)} c, \quad (74)$$

$$b = -e^{i\gamma} d; \quad c = -e^{-i\gamma} a. \quad (75)$$

Or ces relations impliquent :

$$b = -e^{i\gamma} d = -e^{i\gamma} \sqrt{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} e^{-i(\delta+\beta)} a = -\sqrt{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} e^{i(-\delta-\beta+\gamma)} a, \quad (76)$$

$$b = \sqrt{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} e^{i(\delta-\beta)} c = \sqrt{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} e^{i(\delta-\beta)} (-e^{-i\gamma} a) = -\sqrt{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} e^{i(\delta-\beta-\gamma)} a. \quad (77)$$

On doit donc avoir :

$$\begin{aligned} -\delta - \beta + \gamma &= \delta - \beta - \gamma \pmod{2\pi}; \gamma = \delta \pmod{\pi}, \\ e^{i\gamma} &= \pm e^{i\delta} \end{aligned} \quad (78)$$

L'intégrabilité de la fonction d'onde oblige à avoir $s > 0$. On doit donc prendre, pour $\kappa = 1$:

$$\begin{aligned} \gamma &= \delta + \pi; \quad s + iu = e^{i\delta} = \frac{1 + i\Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2}} \\ s &= \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda^2}} = \frac{m}{m_g}; \quad u = \frac{\Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2}}, \end{aligned} \quad (79)$$

$$b = -\sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} e^{-i\beta} a; \quad c = -e^{-i\delta} a; \quad d = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} e^{-i(\delta+\beta)} a. \quad (80)$$

Si le rapport gyromagnétique anomal vient de cette différence entre les deux moyennes (voir [5] [6] 1.5.7) on a :

$$\frac{m_g}{m} = \frac{m_a}{m_g} = \frac{g}{2} = 1,00115965218091(26); \quad \Lambda = \sqrt{\frac{g^2 - 4}{4}} \approx 0,048 \quad (81)$$

En posant :

$$\begin{aligned} a_1 &:= |a|; \quad a := a_1 e^{ia_2}; \quad \zeta := \ln(\mathbf{1}) - \ln(\mathbf{r}), \\ f_\delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} a & e^{i\delta} b \\ e^{i\delta} c & d \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (82)$$

l'onde s'écrit :

$$\widehat{\phi} = -a_1 r^{s-1} e^{\frac{\zeta}{4} - \Lambda m r} e^{i(-\frac{\delta}{2} - \frac{\beta}{2})} e^{-\frac{\zeta}{2} i_3} e^{-\frac{\theta}{2} i_2} f_\delta(e^{\frac{\theta}{2} i_2}) e^{(a_2 - i\frac{\zeta}{4} - \frac{\delta}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\varphi}{2} - E x^0) i_3}. \quad (83)$$

Comme $s < 1$, l'origine est une singularité de l'onde, qui apparait donc comme un objet à la fois ponctuel et étendu à tout l'espace. On a en

autre :

$$e^{-\frac{\delta}{2}i_3} e^{-\frac{\beta}{2}i_2} f_{\delta}(e^{\frac{\beta}{2}i_2}) e^{\frac{\delta}{2}i_3} = \frac{1 + e^{i\delta}}{2} + \frac{1 - e^{i\delta}}{2} \frac{\vec{\mathbf{x}}}{r} \sigma_3, \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\phi} &= -a_1 r^{s-1} e^{\frac{\zeta}{4} - \Lambda m r} e^{i(-\frac{\delta}{2} - \frac{\beta}{2})} \\ &\times \left[\frac{1 + e^{i\delta}}{2} + \frac{1 - e^{i\delta}}{2} \frac{\vec{\mathbf{x}}}{r} \sigma_3 \right] e^{(a_2 - i\frac{\zeta}{4} - \frac{\delta}{2} - \frac{\beta}{2} - E x^0) i_3}, \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \phi &= -a_1 r^{s-1} e^{\frac{\zeta}{4} - \Lambda m r} e^{i(\frac{\delta}{2} + \frac{\beta}{2})} \\ &\times \left[\frac{1 + e^{-i\delta}}{2} + \frac{1 - e^{-i\delta}}{2} \frac{\vec{\mathbf{x}}}{r} \sigma_3 \right] e^{(a_2 + i\frac{\zeta}{4} - \frac{\delta}{2} - \frac{\beta}{2} - E x^0) i_3}. \end{aligned} \quad (86)$$

4.2 Normalisation

Cette normalisation de l'onde est une conséquence de l'égalité entre énergie gravitationnelle (proportionnelle à la fréquence) et énergie inertielle (voir [5] [6] 1.5.5), c'est-à-dire $E = \iiint dv T_0^0$. Cette égalité équivaut en effet, pour toute solution stationnaire de l'onde, à :

$$\iiint dv \frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} = 1 : \mathbf{J} := \frac{m}{k\mathbf{l}} \mathbf{D}_L + \frac{m}{k\mathbf{r}} \mathbf{D}_R. \quad (87)$$

On a :

$$\mathbf{J} = \frac{m}{k} \left(\frac{\mathbf{D}_L}{\mathbf{l}} + \frac{\mathbf{D}_R}{\mathbf{r}} \right) = \frac{a_1^2}{k} \frac{2\mathbf{l}}{\mathbf{l} + \mathbf{r}} r^{2s-2} e^{-2\Lambda m r} \left[1 + \frac{\sin \delta}{r} (\sigma_3 \times \vec{\mathbf{x}}) \right], \quad (88)$$

$$\mathbf{J}^0 = \frac{a_1^2}{k} \frac{2\mathbf{l}}{\mathbf{l} + \mathbf{r}} r^{2s-2} e^{-2\Lambda m r}. \quad (89)$$

Dans le repère propre de l'électron, la densité de probabilité est bien à symétrie sphérique. Mais cette densité n'est pas statique, elle tourne autour de la direction no 3, c'est ce qui fait de l'électron une particule à spin, et lui permet d'être un aimant [3]. La normalisation de l'onde signifie :

$$1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi, \quad (90)$$

$$a_1 = \frac{l_P^{3/2} \sqrt{\mathbf{r} + \mathbf{l}} (2\Lambda m)^{s+1/2}}{\sqrt{8\pi\Gamma(2s+1)}}. \quad (91)$$

5 Conclusion

Il est tout à fait remarquable que l'électron isolé est toujours stationnaire dans son repère propre. L'onde $\phi' = M\phi$ vue par tout observateur en mouvement par rapport à l'électron est une onde progressive, par suite de la transformation $R : x \mapsto x' = MxM^\dagger$ qui agit sur le temps, donc sur la phase de l'onde, qui se propage. La particule comme petite horloge vue par de Broglie, et accompagnée par une onde progressive dans son mouvement, peut donc bien être ce **soliton** de l'équation d'onde quantique, qui fut recherché par de nombreux physiciens. On pourrait même faire remonter cette quête aux tourbillons de Descartes, l'onde solitaire de l'électron, normalisée en conséquence du principe d'équivalence, est en effet dotée d'un moment cinétique propre de valeur $\hbar/2$ (voir [5][6] 2.5). La nécessité du formalisme lagrangien fait aussi partie des propriétés de l'onde (voir [5][6] 2.3.4), ce qui détermine les tenseurs d'impulsion-énergie et de moment cinétique. On peut aussi remarquer la disparition des difficultés liées au caractère ponctuel de la charge de l'électron dans le premier modèle de Lorentz, car au centre de l'électron le champ ϕ a certes une valeur infinie mais la somme de la densité d'énergie est finie. De plus le champ électromagnétique créé par l'électron résulte de son tenseur d'impulsion-énergie (voir [5][6] 1.10)

L'onde de l'électron, telle que calculée précédemment, ne peut être obtenue sans une différence non nulle entre les masses propres des ondes droite et gauche (sinon le terme exponentiel disparaît de la partie radiale). Ceci explique pourquoi ce calcul n'a pas été fait plus tôt, il fallait d'abord en effet :

1. sortir du cadre non relativiste de l'équation de Schrödinger (ce que n'a pas su faire la théorie quantique des champs, qui utilise la phase unique de l'onde non relativiste),
2. découvrir l'importance de la chiralité pour l'onde quantique (à partir de 1956),
3. obtenir la bonne équation d'onde non linéaire, à partir de l'équation d'onde de l'électron et du monopôle magnétique de Lochak [7],
4. comprendre l'intérêt du cadre mathématique Cl_3 , où la chiralité et l'invariance relativiste s'expriment beaucoup plus simplement,
5. observer des traces de monopôles magnétiques pour **voir** l'effet de deux masses différentes pour une même onde fermionique : la physique est d'abord une science expérimentale,

6. transposer cela à l'équation d'onde de l'électron, et vérifier que la physique de l'électron tolérerait ces deux masses.
7. Il fallait enfin comprendre comment les solutions ci-dessus peuvent s'obtenir, donc ne pas réduire le potentiel au cas extérieur.

L'onde solitaire obtenue pour l'électron se transpose aisément aux autres fermions (positrons, muons, quarks, neutrinos...), ce que nous avons déjà décrit en [5] et [6]. On peut donc considérer résolue la difficile question du dualisme onde-particule pour les fermions : un fermion est un soliton, une bosse du champ fermionique, suivant une équation aux dérivées partielles parfaitement déterministe, mais également contraint d'ajuster sa masse-énergie interne, celle de la petite horloge imaginée par de Broglie, à la masse-énergie présente en tout point de son onde, ce qui est une condition complètement non locale.

Bien entendu, cette bosse de champ fermionique étant capable d'émettre et de recevoir des photons, la mécanique des ondes de matière chère à de Broglie reste très largement à bâtir, un siècle après son début. Il reste à comprendre en détail, par exemple, comment l'onde de matière accueille les différents électrons d'un cortège électronique, tout en pouvant former les paires d'électrons des supraconducteurs.

Références

- [1] A. Einstein, *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*, *Annalen der Physik*, **17**, 6, 132–148, 1905.
- [2] P.A.M. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proc. R. Soc. Lond.*, 117 :610–624, 1928. part ii. 118 :351–361, 1928.
- [3] Louis de Broglie. L'électron magnétique. *Hermann*, Paris, 1934.
- [4] L. de Broglie. *La Théorie des particules de spin 1/2 (électrons de Dirac)*. Gauthier-Villars, Paris, 1952.
- [5] C. Daviau, J. Bertrand, T. Socroun, D. Girardot, (2022) Developing the Theory of Everything, *Ann. Fond. Louis de Broglie, Mémos*
<https://fondationlouisdebroglie.org/MEMOS/ToE2Eng.pdf>
- [6] C. Daviau, J. Bertrand, T. Socroun, D. Girardot, (2023) Vers une unification de toutes les interactions (La Théorie du Tout), *Mémos*
<https://fondationlouisdebroglie.org/MEMOS/ToE2Fran.pdf>
- [7] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, **8** (4), 1983.
(partie 2). *Ann. Fond. Louis de Broglie*, **9** (1), 1984.
G. Lochak. Wave equation for a magnetic monopole. *Int. J. of Th. Phys.*, **24** :1019–1050, 1985.

- [8] O. Costa de Beauregard. Sur un tenseur encore ininterprété en théorie de Dirac. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 14-3 :335–342, 1989.
- [9] H. Krüger, *New solutions of the Dirac equation for central fields*, in *The Electron*, D. Hestenes and A. Weingartshofer eds., Kluwer, Dordrecht, 1991
- [10] C. Daviau. *Equation de Dirac non linéaire*. PhD thesis, Université de Nantes, 1993.

(Manuscrit reçu le 15 septembre 2023)