

Electromagnétisme massif et 5D physique

RICHARD RUTILY

ORCID: 0009-0007-5803-2610

RÉSUMÉ. L'effet Aharonov-Bohm établit la réalité physique du potentiel électromagnétique A^μ , conformément à la position de Louis de Broglie, et rouvre l'hypothèse d'une masse propre non nulle du photon. En donnant un statut physique nouveau à une structure introduite dans ma thèse de 1976, j'examine ici un modèle dans lequel l'univers observable est interprété comme l'hypersurface d'une sphère 5D en expansion, dont le rayon géométrique satisfait $x^4 = ct$. Cette hypothèse conduit à $m_0(t) = \hbar/(c^2 t)$ et remplace la cylindricité de Kaluza-Klein par $k(t)x^4(t) = 1$. On obtient ainsi une équation de Proca à masse variable et une phase primordiale de photon massif.

ABSTRACT. The Aharonov-Bohm effect supports the physical reality of the electromagnetic potential A^μ , in agreement with de Broglie's viewpoint, and thus reopens the possibility of a nonzero photon rest mass. By giving a new physical interpretation to a structure introduced in my 1976 thesis, I examine here a model in which the observable universe is interpreted as the hypersurface of an expanding 5-dimensional sphere, whose geometric radius satisfies $x^4 = ct$. This assumption yields $m_0(t) = \hbar/(c^2 t)$ and replaces Kaluza-Klein cylindricity by $k(t)x^4(t) = 1$. The resulting framework leads to a variable-mass Proca equation and to an initial massive-photon phase.

Notations et conventions

Dans tout ce travail, les indices latins $i, j, k, \dots$ désignent les composantes quadridimensionnelles et varient de 0 à 3 :

$$i, j, k, \dots = 0, 1, 2, 3.$$

Les indices grecs $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ désignent les composantes pentadimensionnelles et varient sur

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots = 0, 1, 2, 3, 4.$$

On note

$$x^0 = ct, \quad x^\alpha = (x^i, x^4).$$

La coordonnée supplémentaire est donc notée x^4 .

Préambule

La démarche que nous présentons aujourd'hui s'inscrit dans le prolongement direct de notre thèse de 1976, dans laquelle une extension à cinq dimensions permettait d'obtenir une forme générale et covariante du potentiel 4D massif satisfaisant les équations de Proca [3]. Elle prolonge aussi l'article ultérieur rédigé avec James Pavageau dans les *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, où plusieurs aspects de cette structure avaient déjà été discutés [4].

Le point de départ conceptuel demeure l'idée, d'inspiration broglienne, selon laquelle le potentiel électromagnétique possède une réalité physique propre [1, p. 248], [2, pp. 114–117]. Nous avons montré qu'une telle hypothèse rend naturel l'introduction dans l'action d'un terme quadratique en A^i , ce qui conduit aux équations de Proca et donc à une masse propre non nulle du photon. Dans ce premier cadre, la cinquième dimension n'avait encore qu'un rôle instrumental : elle servait d'artifice de calcul pour construire une expression générale et covariante du potentiel 4D massif.

L'hypothèse fondamentale du présent travail va plus loin. Elle consiste à attribuer une réalité physique non seulement au potentiel, mais aussi à la cinquième dimension elle-même. On postule que cette dimension supplémentaire possède un statut géométrique propre et qu'elle est en expansion.

L'hypothèse géométrique centrale est alors que l'univers 4D sensible constitue l'hypersurface d'une sphère 5D en expansion, dont le rayon géométrique satisfait

$$x^4(t) = ct.$$

La cinquième dimension joue ainsi le rôle de rayon d'expansion du cadre 5D global, tandis que la physique observable est celle de l'hypersurface 4D correspondante.

Dans cette perspective, ce n'est plus seulement la réalité du potentiel qui implique la masse propre du photon ; c'est la réalité géométrique de la cinquième dimension qui confère au potentiel son statut physique et conduit, après réduction à quatre dimensions, à une dynamique de type Proca.

Le choix du potentiel 5D n'est pas arbitraire. On reprend la forme qui avait déjà conduit au succès dans notre travail de 1976,

$$A^i(x^\mu) = A^i(x^j) e^{-ik(t)x^4},$$

car c'est elle qui permet de construire un potentiel 4D général et covariant satisfaisant les équations de Proca.

Toutefois, lorsque la cinquième dimension est prise comme réellement physique, des termes supplémentaires apparaissent a priori dans les dérivées. La difficulté est levée si l'on montre que, dans le régime primordial où toutes les dimensions sont compactes et où la masse du photon est quantifiée, la branche fondamentale impose

$$k(t)x^4(t) = 1.$$

Cette condition remplace alors la condition de cylindricité de Kaluza-Klein : au lieu d'imposer l'indépendance par rapport à x^4 , on impose une cohérence dynamique entre k et x^4 . On obtient ainsi

$$k(t) = \frac{1}{ct}, \quad m_0(t) = \frac{\hbar}{c^2 t}.$$

Le but du présent article est d'exposer cette construction dans le seul secteur électromagnétique, avant d'en examiner séparément les conséquences gravitationnelles et cosmologiques.

1 Origine 4D : réalité du potentiel et équations de Proca

Le point de départ de la démarche est strictement quadridimensionnel. Il consiste à attribuer une réalité physique au potentiel électromagnétique A^i , dans l'esprit de Louis de Broglie. Cette hypothèse modifie la structure de l'action admissible : elle autorise l'introduction d'un terme quadratique en A^i , et conduit naturellement à une dynamique de type Proca.

L'action la plus générale compatible avec la covariance 4D et la réalité physique du potentiel s'écrit

$$S = -\frac{1}{4} \int F_{ij} F^{ij} d^4x + \frac{\kappa}{2} \int A_i A^i d^4x + \int j^i A_i d^4x, \quad (1)$$

avec

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i. \quad (2)$$

Le premier terme est le terme usuel de Maxwell. Le second n'est admissible que si le potentiel A^i possède une signification physique directe. Le troisième représente le couplage au courant conservé j^i .

La variation de l'action par rapport à A_i donne

$$\partial_j F^{ij} + \kappa A^i = j^i. \quad (3)$$

Cette équation est exactement la forme covariante des équations de Proca, à condition d'identifier

$$\kappa = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}. \quad (4)$$

Ainsi, la masse propre du photon n'est plus introduite comme une hypothèse extérieure : elle apparaît comme la conséquence directe de la réalité physique du potentiel. Le champ électromagnétique se comporte alors comme un champ vectoriel massif.

1.1 La condition de Lorenz comme conséquence dynamique

Dans la théorie de Maxwell, la condition de Lorenz est généralement introduite comme condition de jauge. Dans la théorie de Proca, au contraire, elle découle des équations du mouvement dès lors que la masse propre n'est pas nulle.

En prenant la divergence de l'équation (3), on obtient

$$\partial_i \partial_j F^{ij} + \kappa \partial_i A^i = \partial_i j^i. \quad (5)$$

Or l'antisymétrie du tenseur F^{ij} implique

$$\partial_i \partial_j F^{ij} = 0, \quad (6)$$

et la conservation du courant impose

$$\partial_i j^i = 0. \quad (7)$$

Il vient donc

$$\kappa \partial_i A^i = 0. \quad (8)$$

Pour $m_0 \neq 0$, donc $\kappa \neq 0$, on obtient nécessairement

$$\partial_i A^i = 0. \quad (9)$$

La condition de Lorenz n'est donc plus ici un choix de jauge, mais une propriété dynamique intrinsèque du champ vectoriel massif.

1.2 Portée physique du résultat 4D

L'équation (3), accompagnée de la condition (9), décrit dans le vide un champ de portée finie, de type Yukawa, gouverné par la masse propre m_0 .

Ce point n'est pas seulement d'ordre classique. Dans le cadre d'une quantification canonique covariante, le champ strictement sans masse se heurte à une difficulté formelle. En effet, les relations de commutation entre les composantes du potentiel et celles du champ électrique conduisent à une relation du type

$$[A_i(\mathbf{r}'), \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r})] = -\frac{\hbar c}{2\pi i} \partial_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

ou à une expression équivalente suivant les conventions de normalisation. Or, dans le vide, l'électromagnétisme strictement sans masse impose

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Le membre de gauche devrait alors s'annuler, tandis que le membre de droite reste non nul. Il en résulte une incompatibilité formelle entre les contraintes du champ et les relations de commutation. Cette difficulté avait déjà été signalée par Louis de Broglie dans *Une nouvelle théorie de la lumière : la mécanique ondulatoire du photon* [1, p. 248], [2, pp. 114–117], et nous l'avons reprise explicitement dans notre thèse [3].

Elle disparaît dans le cas d'un champ de Proca : dès qu'une masse propre, même infinitésimale, est introduite, l'équation de Gauss est modifiée, la condition de Lorenz découle des équations du mouvement, et la structure de commutation redevient cohérente. La masse propre du photon ne constitue donc pas seulement une possibilité dynamique : elle joue aussi un rôle régularisateur dans la structure quantique du champ.

Le changement conceptuel du présent travail consiste alors à donner un statut physique à cette cinquième dimension. Dès lors, la structure 5D du potentiel n'est plus un simple artifice analytique : elle devient l'origine géométrique de la masse propre du photon.

2 Extension 5D du potentiel et sélection de la branche fondamentale

La forme du potentiel étendu à la cinquième dimension n'est pas introduite ici ad hoc. Elle reprend la structure qui nous avait déjà permis, dans notre travail de 1976, de construire un potentiel 4D massif général et covariant satisfaisant les équations de Proca. La différence essentielle est qu'ici la coordonnée x^4 est regardée comme physiquement réelle.

On considère donc un potentiel de la forme

$$A^i(x^\mu) = A^i(x^j) e^{-ik(t)x^4}. \quad (10)$$

Pour comprendre l'origine de la loi de masse, il faut remonter au régime primordial, où la cinquième dimension est encore compacte. Dans cette phase, le potentiel 5D admet une décomposition de Kaluza-Klein et le spectre des masses propres photoniques est quantifié :

$$m_n = \frac{n\hbar}{cR_4}, \quad (11)$$

où R_4 est le rayon de la cinquième dimension compacte.

Le problème physique consiste alors à déterminer quelle branche de ce spectre peut effectivement survivre et se prolonger dans le régime décompactifié.

2.1 Exclusion du mode $n=0$

En apparence, le mode $n = 0$ pourrait sembler privilégié puisqu'il correspondrait à une masse propre nulle. Toutefois, à temps cosmique fini, une masse rigoureusement nulle n'est pas compatible avec l'idée d'un mode physique effectivement individualisé dans une durée donnée.

La relation d'incertitude

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$$

conduit, en identifiant $\Delta E \sim m_0 c^2$ et $\Delta t \sim t$, à

$$m_0(t) \gtrsim \frac{\hbar}{c^2 t}. \quad (12)$$

Cette estimation montre qu'un état strictement sans masse ne peut être maintenu à temps fini. Le mode $n = 0$ doit donc être considéré comme physiquement exclu.

2.2 Non-maintien des modes $n > 1$

Les modes excités $n > 1$ correspondent, dans le régime compact, à des masses plus élevées,

$$m_n = n m_1.$$

Ils sont donc pénalisés par leur coût énergétique. Dans un milieu primordial très chaud, leur population thermique décroît selon un facteur de type Boltzmann,

$$N_n \propto \exp\left(-\frac{m_n c^2}{k_B T}\right). \quad (13)$$

Dès que l'expansion commence, cette suppression s'accroît rapidement et les modes excités cessent de jouer un rôle dynamique durable. Ils ne se maintiennent donc pas dans l'évolution cosmique effective.

Il ne reste alors qu'une seule branche physiquement admissible :

$$n = 1. \quad (14)$$

2.3 Branche fondamentale et relation dynamique de cylindricité

Pour la branche fondamentale, la quantification de Kaluza-Klein donne

$$m = \frac{\hbar}{c R_4}. \quad (15)$$

D'autre part, la structure de Proca relie la masse propre et le nombre d'onde par

$$k = \frac{mc}{\hbar}. \quad (16)$$

En combinant (15) et (16), on obtient

$$k = \frac{1}{R_4}. \quad (17)$$

Lorsque l'univers quitte le régime primordial compact, la cinquième dimension cesse d'être compactifiée mais reste physique. Son extension effective devient alors

$$R_4(t) = x^4(t) = ct. \quad (18)$$

La relation (17) devient aussitôt

$$k(t)x^4(t) = 1. \quad (19)$$

Cette condition remplace la condition de cylindricité de Kaluza-Klein. Au lieu d'imposer l'indépendance par rapport à x^4 , on impose la cohérence dynamique de la phase du potentiel 5D le long de l'évolution physique.

On en déduit

$$k(t) = \frac{1}{ct}, \quad (20)$$

et donc, par la relation de Proca,

$$m_0(t) = \frac{\hbar}{c^2 t}. \quad (21)$$

La loi de masse propre variable du photon apparaît ainsi comme le prolongement continu, dans une cinquième dimension réelle en expansion, de la branche fondamentale de Kaluza-Klein sélectionnée dans le régime primordial.

2.4 Modes longitudinaux et transition vers le régime de Maxwell

Dans le régime primordial, où la masse propre du photon est non nulle, le champ électromagnétique relève d'une dynamique de type Proca et admet donc, outre les deux polarisations transverses, une composante longitudinale.

Lorsque l'expansion cosmique se poursuit, la loi

$$m_0(t) = \frac{\hbar}{c^2 t}$$

entraîne une diminution continue de la masse propre. Le mode longitudinal perd alors progressivement sa pertinence dynamique, et le champ tend vers le régime de Maxwell aujourd'hui observé, caractérisé par deux polarisations transverses.

La phase massive initiale ne fournit donc pas seulement une origine à la loi de masse $m_0(t)$; elle assure aussi une transition continue entre un régime primordial de type Proca et le régime électromagnétique effectivement observé à basse énergie. Le photon actuel peut ainsi être interprété, dans ce cadre, comme la limite tardive d'un champ initialement massif dont la masse propre est progressivement effacée par l'expansion cosmique.

Remarque

La sélection de la branche fondamentale $n = 1$ peut être appuyée par un mini-modèle quantique 5D, présenté en annexe, dans lequel la dynamique de mini-superspace reproduit à la fois l'expansion coasting $a(t) \propto t$ et la continuité entre la tour compacte de Kaluza-Klein et la branche effective de type Yukawa. Ce mini-modèle ne constitue pas ici le point de départ de la démonstration, mais une validation conceptuelle de sa cohérence.

Conclusion

Le cadre proposé fait apparaître une chaîne de cohérence simple. La réalité physique de la cinquième dimension impose une forme 5D du potentiel électromagnétique ; cette forme conduit, après réduction à quatre dimensions, à une dynamique de type Proca ; la sélection de la branche fondamentale dans le régime primordial compact conduit alors à la relation

$$k(t)x^4(t) = 1.$$

Cette condition remplace la cylindricité de Kaluza-Klein. Elle impose que l'extension physique de la cinquième dimension soit prise sous la forme

$$x^4(t) = ct,$$

ce qui élimine les termes parasites et conduit immédiatement à la loi de masse propre variable

$$m_0(t) = \frac{\hbar}{c^2 t}.$$

Le résultat essentiel du présent travail est donc qu'une seule hypothèse physique nouvelle, l'existence réelle d'une dimension supplémentaire en expansion, suffit à donner une origine géométrique à la masse propre du photon et à relier de manière cohérente la structure de Proca, la forme 5D du potentiel et la limite de Maxwell aujourd'hui observée.

Le passage à une cinquième dimension pour obtenir un électromagnétisme massif apparaît naturel, mais il se heurte immédiatement à une difficulté : des termes parasites apparaissent, dans l'univers à quatre dimensions où s'effectuent les mesures, du fait des dérivées du potentiel qui servent à calculer le champ.

Dans le schéma de Kaluza-Klein, cette difficulté est évitée en supposant la cinquième dimension compactifiée et en imposant l'indépendance

du potentiel par rapport à cette coordonnée. Cette hypothèse s'exprime par la condition de cylindricité.

Dans le cadre présent, au contraire, on pose

$$x^4 = ct.$$

La dérivée temporelle n'est donc plus nulle. Toutefois, la relation

$$kx^4 = 1$$

introduit une constante dont la dérivée s'annule. Elle supprime ainsi les termes parasites de la même manière fonctionnelle que la condition de cylindricité dans le schéma de Kaluza-Klein.

Du point de vue électromagnétique, cette construction est donc satisfaisante. Il reste cependant à vérifier que le modèle ainsi obtenu n'entre pas en contradiction avec les observations, lesquelles sont habituellement interprétées dans le cadre du modèle standard. C'est pourquoi nous nous proposons d'examiner, dans les travaux suivants, les conséquences gravitationnelles et cosmologiques de cette même construction.

Annexe A : Mini-modèle quantique 5D et validation conceptuelle

Cette annexe n'a pas pour objet de fonder à elle seule le modèle classique développé dans le texte principal. Son rôle est plus limité : il s'agit de vérifier qu'une quantification réduite de la géométrie 5D est compatible avec les trois propriétés centrales du modèle, à savoir :

1. l'expansion coasting $a(t) \propto t$;
2. la sélection de la branche fondamentale $n = 1$;
3. la continuité entre le régime compact de Kaluza-Klein et le régime décompactifié satisfaisant $k(t)x^4(t) = 1$.

Il s'agit donc d'un contrôle de cohérence conceptuel, et non d'une théorie quantique complète de la géométrie 5D.

A.1. Mini-superespace 5D

On considère une réduction homogène de la géométrie 5D, dans laquelle les degrés de liberté pertinents sont le facteur d'échelle 4D $a(t)$ et

le rayon $R_4(t)$ de la cinquième dimension compacte. L'élément de ligne est pris sous la forme

$$ds^2 = N(t)^2 dt^2 - a(t)^2 d\vec{x}^2 - R_4(t)^2 dy^2,$$

où y est une coordonnée sans dimension sur la cinquième dimension compacte, et $N(t)$ le laps.

Dans le régime primordial, la décomposition de Kaluza-Klein conduit au spectre

$$m_n(t) = \frac{n\hbar}{c R_4(t)}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (22)$$

Lorsque la dimension supplémentaire quitte le régime compact et s'ouvre à l'échelle cosmique, on identifiera son extension physique à

$$x^4(t) = ct. \quad (23)$$

A.2. Hamiltonien effectif et contrainte

Dans l'approximation de mini-superspace, la dynamique gravitationnelle effective peut être représentée par une action réduite de la forme

$$S = \int dt \left[-\frac{a\dot{a}^2}{N} - N\sigma a \right],$$

où $\sigma > 0$ résume la contribution géométrique effective liée au secteur 5D.

L'impulsion canonique conjuguée à a est

$$p_a = -\frac{2a\dot{a}}{N},$$

et le Hamiltonien prend la forme

$$H = N \left(-\frac{p_a^2}{4a} + \sigma a \right).$$

La contrainte hamiltonienne est donc

$$-\frac{p_a^2}{4a} + \sigma a = 0. \quad (24)$$

En jauge cosmique $N = 1$, on a

$$p_a = -2a\dot{a},$$

de sorte que (24) donne

$$4a^2\dot{a}^2 = 4\sigma a^2,$$

puis

$$\dot{a}^2 = \sigma.$$

On retrouve donc immédiatement une loi de type

$$a(t) = a_0 + \sqrt{\sigma} t, \quad (25)$$

c'est-à-dire le régime coasting

$$a(t) \propto t.$$

Ainsi, dans ce mini-modèle, l'expansion linéaire n'est pas en contradiction avec la contrainte quantifiée : elle en constitue au contraire la branche semiclassique naturelle.

A.3. Quantification et équation de Wheeler-DeWitt

La quantification canonique consiste à remplacer

$$p_a \longrightarrow -i\hbar \frac{d}{da}.$$

La contrainte (24) devient alors

$$\left[\frac{\hbar^2}{4a} \frac{d^2}{da^2} + \sigma a \right] \Psi(a) = 0.$$

Après multiplication par $4a/\hbar^2$, on obtient

$$\left[\frac{d^2}{da^2} + \lambda a^2 \right] \Psi(a) = 0, \quad \lambda = \frac{4\sigma}{\hbar^2}. \quad (26)$$

Cette équation est de type oscillateur harmonique à énergie nulle. Sa solution semiclassique WKB conduit à une fonction d'action $S(a)$ telle que

$$\left(\frac{dS}{da} \right)^2 = \hbar^2 \lambda a^2.$$

On en déduit

$$\frac{dS}{da} = \pm \hbar \sqrt{\lambda} a.$$

En identifiant cette quantité à l'impulsion semiclassique

$$p_a = \frac{dS}{da} = -2a\dot{a},$$

on obtient

$$\dot{a} = \mp \frac{\hbar\sqrt{\lambda}}{2},$$

soit encore

$$\dot{a}^2 = \sigma.$$

La dynamique semiclassique associée à l'équation de Wheeler-DeWitt retrouve donc la loi coasting (25).

A.4. Sélection de la branche fondamentale

Le spectre de Kaluza-Klein (22) montre que chaque mode n introduit une échelle de masse

$$m_n = n m_1.$$

Dans le mini-modèle quantique, cela revient à associer aux modes excités des contributions effectives plus coûteuses que celle de la branche fondamentale. Le mode de plus basse énergie est donc naturellement le mode de plus petit n physiquement admissible.

Le mode $n = 0$ correspondrait à une masse rigoureusement nulle. Comme dans le texte principal, un argument d'ordre de grandeur fondé sur la relation d'incertitude

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$$

conduit, avec $\Delta E \sim m_0 c^2$ et $\Delta t \sim t$, à

$$m_0(t) \gtrsim \frac{\hbar}{c^2 t}.$$

Une masse strictement nulle n'est donc pas compatible avec un temps cosmique fini. Le mode $n = 0$ est ainsi physiquement exclu.

Les modes $n > 1$, plus massifs, sont défavorisés à la fois par leur coût énergétique et par leur suppression thermique dans le régime primordial. La seule branche physiquement retenue est donc

$$n = 1. \tag{27}$$

Le mini-modèle quantique est donc cohérent avec la sélection de la branche fondamentale utilisée dans le texte principal.

A.5. Continuité entre le régime compact et le régime ouvert

Dans la phase compacte, la branche fondamentale satisfait

$$m = \frac{\hbar}{cR_4}.$$

La relation de Proca

$$k = \frac{mc}{\hbar}$$

donne alors

$$k = \frac{1}{R_4}.$$

Lorsque la cinquième dimension cesse d'être compacte et acquiert une extension physique macroscopique, on identifie

$$R_4(t) = x^4(t) = ct.$$

Il vient alors

$$k(t)x^4(t) = 1. \quad (28)$$

Cette relation n'est donc pas introduite arbitrairement : elle constitue le prolongement continu, dans le régime décompactifié, de la branche fondamentale du spectre de Kaluza-Klein.

On en déduit immédiatement

$$k(t) = \frac{1}{ct}, \quad m_0(t) = \frac{\hbar}{c^2t}.$$

A.6. Portée du mini-modèle

Ce mini-modèle quantique 5D n'a pas vocation à remplacer la démonstration classique exposée dans le texte principal. Il montre cependant qu'une quantification réduite de la géométrie 5D reste compatible avec les trois traits fondamentaux du modèle :

1. l'expansion coasting $a(t) \propto t$;
2. la sélection de la branche fondamentale $n = 1$;
3. l'émergence de la relation $k(t)x^4(t) = 1$.

Il fournit ainsi une validation conceptuelle de la cohérence du schéma retenu, sans introduire de rupture entre la phase compacte primordiale et le régime 5D ouvert utilisé dans le corps du travail.

Références

- [1] L. de Broglie, *Une nouvelle theorie de la lumiere : la mecanique ondulatoire du photon*, tome I, Hermann, Paris, 1940.
- [2] L. de Broglie, *Une nouvelle theorie de la lumiere : la mecanique ondulatoire du photon*, tome II, Hermann, Paris, 1940.
- [3] R. Rutily, *Rayonnement de Photons doués de Masse Propre*, Thesis, Université Claude Bernard Lyon I (1976).
- [4] J. Pavageau and R. Rutily, *Sur le rayonnement de photons doués de masse propre*, Ann. Fondation Louis de Broglie **2**, 33 (1977).
- [5] A. Proca, *Sur la theorie ondulatoire des electrons positifs et negatifs*, Journal de Physique et le Radium, **7** (1936), 347–353.
- [6] T. Kaluza, *Zum Unitatsproblem der Physik*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1921, 966–972.
- [7] O. Klein, *Quantentheorie und funfdimensionale Relativitatstheorie*, Zeitschrift fur Physik, **37** (1926), 895–906.
- [8] Y. Aharonov et D. Bohm, *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, Physical Review, **115** (1959), 485–491.

(Manuscrit reçu le 24 août 2025, révisé le 18 mai 2026)