

Trajectoires quantiques - Trajectoires de Newton

Première partie

(Boite quantique 1D stationnaire de profondeur infinie)

MICHEL LARINI

Professeur émérite

Aix-Marseille Université, email: m.larini@sfr.fr

RÉSUMÉ. Tout d'abord, avec une approche originale appliqué au cas de "la particule dans la boite 1D de profondeur infinie" on montre que même pour la solution stationnaire de l'équation de Schrödinger la particule a une trajectoire. Puis, à partir de considérations énergétiques classiques, on montre qu'il existe une force quantique $Fq(x)$ qui agit sur la particule. Enfin, on montre qu'une particule "classique" soumise à la force quantique $Fq(x)$ mais obéissant à la deuxième loi de Newton a exactement la même trajectoire que celle de notre particule "quantique" calculée dans la première partie du travail. Tout se passe comme si l'équation de Schrödinger induisait la force quantique $Fq(x)$ et qu'alors, la particule se déplaçait dans la boite en obéissant à la deuxième loi de Newton.

$$m \frac{d^2 X}{dx^2} = Fq(x)$$

Using an original approach, applied to the classical case of "the particle in the 1D quantum dot of infinite depth", it is shown that, even with the stationary solution of the Schrödinger equation, the particle has a trajectory. Then, using energetic considerations, we demonstrate the existence of a quantum force field $Fq(x)$ that acts on the particle at each point x of the box. Finally, we show that a "classical" particle subjected to the quantum force field $Fq(x)$ but obeying Newton's second law has exactly the same trajectory as that of our "quantum" particle calculated in the first part of the work. It is as if Schrödinger's equation induced a stationary quantum force field $Fq(x)$ and the particle moved in the box in accordance with Newton's second law.

$$m \frac{d^2 X}{dx^2} = Fq(x)$$

1 Introduction

"Et si Einstein et de Broglie avaient aussi raison" [1]. C'est dans ce contexte que se situe le présent travail. Pour cela, on revisite le cas classique de la particule dans la boîte 1D de profondeur infinie à partir de l'équation de Schrödinger stationnaire. A partir d'une approche originale on montre que, même dans le cas stationnaire, la particule a une trajectoire. On calcule, alors, sa vitesse et à partir de considérations énergétiques, son énergie potentielle. On en déduit l'existence d'un champ de force "quantique" $Fq(x)$. Enfin, on montre qu'une particule "classique" mais soumise au champ de force "quantique" $Fq(x)$ et obéissant à la deuxième loi de Newton a la même trajectoire que la particule "quantique", de la première partie, calculée à partir de la mécanique quantique. Ce dernier résultat invite à se poser des questions.

2 Les trajectoires de la particule "quantique"

2.1 Fonction d'onde

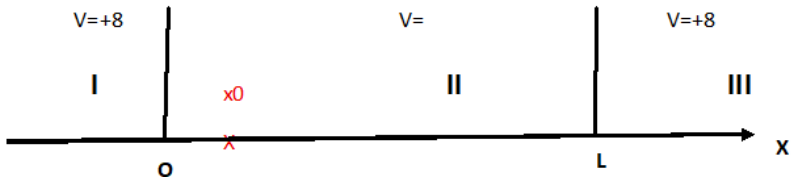


Figure 1: .

Le potentiel V est infini dans les zones I et III et il est nul dans la zone II. Ainsi la particule ne peut se déplacer qu'entre $X = 0$ et $X = L$. On associe à la particule la fonction d'onde stationnaire $\Psi(x)$ qui est solution de l'équation de Schrödinger Stationnaire Eq. (1).

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\Psi(x) = 0 \quad (1)$$

E est l'énergie totale de la particule.

$L = 10^{-5}m$ (longueur de la boîte)

$m = 9.1110^{-31}kg$ (masse de la particule/électron)

$h = 6.6210^{-34}$ (constante de Planck) et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$
 La solution générale de Eq. (1) est de la forme:

$$\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (2)$$

Le potentiel est infini en $x=0$ et $x=L$ et de ce fait $\Psi(0) = 0$ et $\Psi(L) = 0$. Pour que les deux conditions à la limite soient respectées on doit avoir $A + B = 0$ et $kL = n\pi$ où n est le nombre quantique de la particule.

La fonction d'onde s'écrit alors:

$$\Psi(x) = 2iA \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3)$$

Par ailleurs, pour que Eq. (1) et Eq. (2) et les conditions aux limites soient respectées on doit avoir:

$$E = E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad (4)$$

En est l'énergie totale de la particule de niveau quantique n . L'existence du nombre quantique, n , implique que la particule ne peut avoir que certaines énergies discrètes.

On peut définir V_n la vitesse de la particule, en l'absence de tout potentiel, c'est-à-dire lorsque son énergie totale est égale à son énergie cinétique:

$$V_n = \frac{n \pi \hbar}{mL} \quad (5)$$

2.2 Densité de probabilité

$PN(x)$ la densité de probabilité de trouver la particule au point x joue un rôle très important dans ce travail. Elle permet, en particulier, d'exprimer la probabilité élémentaire, $dP(x)$, de trouver la particule au point x , à dx près:

$$dP = PN(x).dx \quad (6)$$

$PN(x)$ s'obtient directement à partir de la fonction d'onde [2]

$$PN(x) = \|\psi(x)\psi^*(x)\| = 4A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (7)$$

Il faut déterminer la constante A . Pour cela il faut normer la densité de probabilité. En effet, si l'on observe un parcours entre $x = 0$ et $x = L$,

la probabilité qu'a un observateur de trouver la particule entre X_0 et L est égale à 1 soit 6 [8]: que l'on observe entre $x = x_0$ et $x = L$ il faut que:

$$4A^2 \int_{X_0}^L \sin^2 \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx = 1 \quad (8)$$

Il vient $4A^2 = \frac{2}{L} B_{X_0}$

Avec:

$$B_{X_0} = \frac{1}{\frac{L-X_0}{L} + \frac{1}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi X_0}{L}\right)} \quad (9)$$

On peut vérifier que, pour un parcours entre 0 et L , $B_{X_0} = 1$.

Ainsi pour une particule placée au point X_0 à $t = 0$ et se déplaçant vers la droite il vient:

$$PN(x) = \frac{2B_{X_0}}{L} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad (10)$$

La densité de probabilité dépend du nombre quantique n et de la longueur du parcours observé par l'intermédiaire de la position initiale x_0 de la particule.

Sur la Figure 2 on a représenté la densité de probabilité pour trois valeurs de n avec $x_0 = 0$. On constate que les densités de probabilité oscillent n fois, elles s'annulent $n + 1$ fois et possèdent n maximums qui sont indépendants de n .

Sur la Figure 3 on a représenté la densité de probabilité pour trois valeurs de x_0 avec $n = 5$. Elle est définie uniquement entre x_0 et L . Les valeurs sont d'autant plus grandes que la longueur $(L - x_0)$ du parcours est courte. Cela n'est pas surprenant car plus le chemin à parcourir est court et plus on a de chance de trouver la particule dans un intervalle dx donné.

2.3 Trajectoires de la particule

Si l'on admet que la particule a une trajectoire (Figure 4), on peut donner une autre définition de la probabilité élémentaire Eq. (6). En effet si on observe à un instant donné une tranche d'espace dx autour de x et que la particule a un temps de séjour $dt(x)$ dans cette tranche, il est logique de dire que la probabilité d'observer la particule dans cette tranche, à un instant donné, est égale au rapport de $dt(x)$ sur la durée totale T du parcours observé soit :

$$dP = \frac{dt(x)}{T} \quad (11)$$

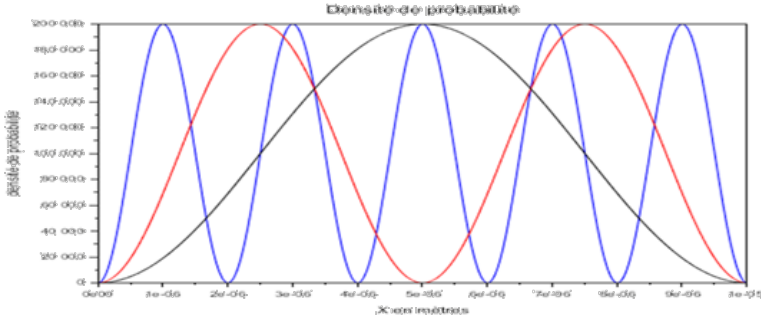


Figure 2: $(X_0 = 0)$ $n = 1$ (noir); $n = 2$ (rouge); $n = 5$ (bleu).

Ainsi il vient d'après Eq. (6) et Eq. (11) :

$$\frac{dt(x)}{T} = PN(x).dx \quad (12)$$

Soit compte tenu de Eq. (10):

$$\frac{dt(x)}{T} = \frac{2B_{X_0}}{L} \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (13)$$

Pour calculer les trajectoires il suffit d'intégrer l'équation (13).

2.3.1 Trajectoire "aller"

La particule est déposée à l'instant $t=0$ au point d'abscisse $x = x_0$. On intègre alors l'équation (13) entre x_0 et x_p l'abscisse où se trouve la particule au temps $t(x_p)$ lors du parcours "aller".

$$\int_{x_0}^{x_p} \frac{dt(x)}{T} = \int_{x_0}^{x_p} \frac{2}{L} B_{X_0} \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (14)$$

Il vient:

$$\frac{t(x_p)}{T} = B_{X_0} \left[\frac{x_p - x_0}{L} - \frac{1}{2n\pi} \left(\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x_p\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x_0\right) \right) \right] \quad (15)$$

(15) est l'équation de la trajectoire aller de la particule de nombre quantique n déposée en $x = x_0$ à l'instant $t = 0$. Pour ce qui concerne le

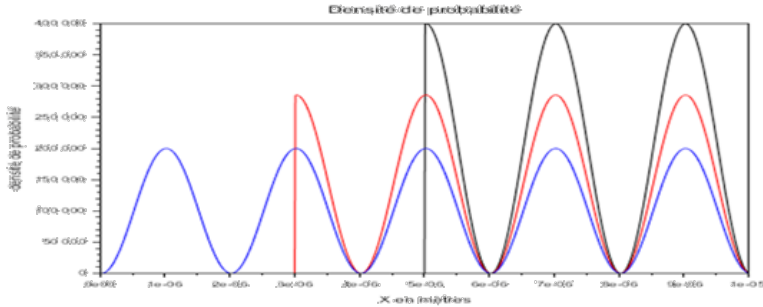


Figure 3: ($n = 5$) $x_0 = 0$ (bleu); $x_0 = 0.3L$ (rouge); $x_0 = 0.5L$ (noir).

temps de parcours du trajet "aller", $T = Ta$, sans justification pour l'instant, on choisit le temps total de parcours "aller", entre x_0 et L , d'une particule identique mais qui obéirait à la deuxième loi de Newton. C'est-à-dire une particule ayant la même masse m , la même énergie totale E_n (Eq. 4), et qui serait déposée en x_0 à $t = 0$. Cette particule, que l'on qualifie de "classique" conserve son énergie cinétique égale à E_n (Eq. (4)) et donc une vitesse constante V_n (Eq. 5) tout au long de son parcours.

$$T = Ta = \frac{L - X_0}{V_n} \quad (16)$$

Sur la figure 5 on a représenté des trajectoires "aller" de notre particule et de la particule "classique" pour quatre valeurs de la position initiale x_0 et avec un niveau quantique $n = 5$ de la particule.

On constate que, quel que soit x_0 , les trajectoires de la particule oscillent, avec une longueur d'onde $\lambda = L/5$, autour d'une droite reliant les points de contact de la particule avec les parois.

Pour les différentes valeurs de x_0 les trajectoires se déduisent l'une de l'autre par simple translation.

Pour $x_p = L$ les trajectoires ont une tangente verticale ce qui implique une vitesse infinie au contact de la paroi en L . On observe aussi des tangentes verticales, espacées de λ , à chacune des intersections de la trajectoire avec sa droite. Là encore cela implique des vitesses infinies en ces points.

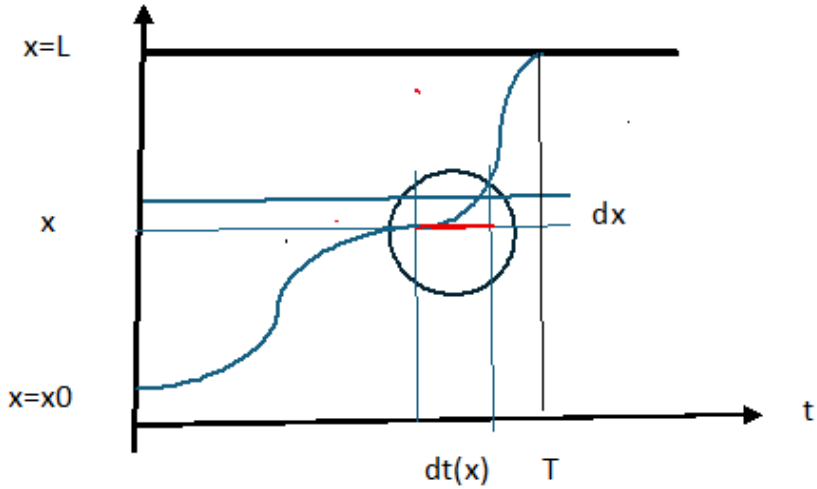


Figure 4: .

Les pentes des trajectoires à l'origine varient avec x_0 . Cette pente est verticale uniquement pour $x_0 = 0$. Ainsi la vitesse à l'origine, donc l'énergie cinétique de la particule dépendent de x_0 . Ce problème sera expliqué par la suite.

2.3.2 Trajectoire "retour"

Pour la trajectoire "retour" entre L et 0 on a:

$$B_{X0} = 1 \text{ et } T = Tr = L/Vn \quad (17)$$

On intègre l'équation (13) entre $x = L$ et x_p la position de la trajectoire pendant le retour.

$$\int_L^{x_p} \frac{dt(x)}{Tr} = - \int_L^{x_p} \frac{2}{L} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \quad (18)$$

Il vient:

$$\frac{t(x_p)}{Tr} = \frac{Ta}{Tr} - \frac{x_p - L}{L} - \frac{1}{2n\pi} \sin \left(\frac{2n\pi}{L} x_p \right) \quad (19)$$

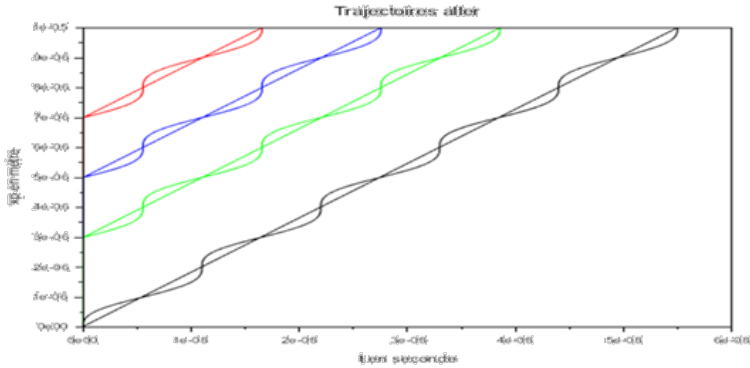
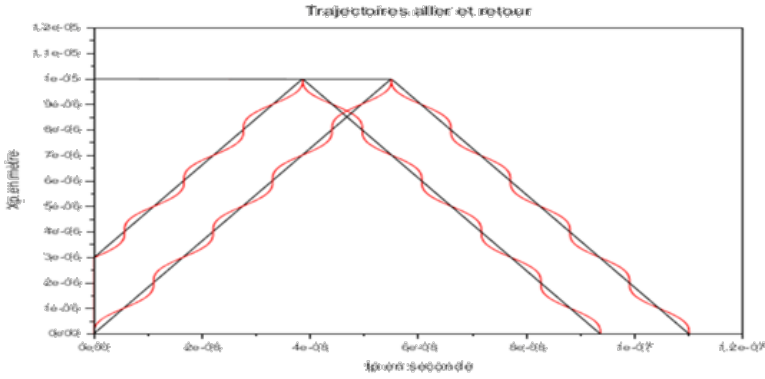


Figure 5: $n = 5$; $x_0 = 0$ (noir); $x_0 = 0.3L$ (vert); $x_0 = 0.5L$ (bleu); $x_0 = 0.7L$ (rouge) .

Eq. (19) est la trajectoire de la particule sur le retour après le premier rebond sur le mur. On pourrait poursuivre la trajectoire, toujours en intégrant l'équation (13) avec un deuxième puis un nième rebond. . . Sur la figure 6 on a représenté la trajectoire aller et la trajectoire retour, avec $n = 5$, pour deux positions initiales $x_0 = 0$ et $x_0 = 0.3L = 3.10^{(-6)}m$. Les mêmes remarques peuvent être faites pour le trajet retour que pour le trajet aller. Le trajet retour de la particule comporte toujours des oscillations, chacune de longueur d'onde $\lambda = L/n$. On observe des tangentes verticales en $xp = L$ mais aussi en $xp = 0$.

Sur la figure 7, on montre pour un trajet aller-retour l'influence du niveau quantique n avec $n = 3$ et $n = 5$ et $n = 10$ et pour $x_0 = 0$. On constate, que le nombre d'oscillations de la trajectoire autour de sa droite est égal à n . Si le niveau quantique n augmente la durée du trajet aller-retour diminue, mais aussi la trajectoire tend, à l'échelle d'observation, à se confondre avec la droite autour de laquelle elle oscille.

Figure 6: $n = 5$.

2.3.3 Justification du choix des temps de parcours

Lors des trajets "aller", pour n grand, l'équation de la trajectoire aller (Eq. (15)) nous indique que :

$$\frac{t(xp)}{Ta} = B_{X0} \frac{xp - x0}{L} \quad (20)$$

avec:

$$B_{X0} = \frac{L}{L - X0} \quad (21)$$

Ainsi compte tenu de Eq. (16) il vient : $xp = Vn.t(xp) + x0$

On retrouve l'équation de la trajectoire "aller" qu'aurait la particule en mécanique classique, c'est-à-dire une trajectoire rectiligne avec vitesse constante égale à Vn .

Pour le trajet "retour", pour n grand, de la même façon, on obtient compte tenu de (19) de Eq. (9) et de Eq. (17) : $xp = -Vn.t(xp) + Vn.Ta + Vn.Tr$

Là encore, on retrouve l'équation de la trajectoire "retour" qu'aurait la particule en mécanique classique.

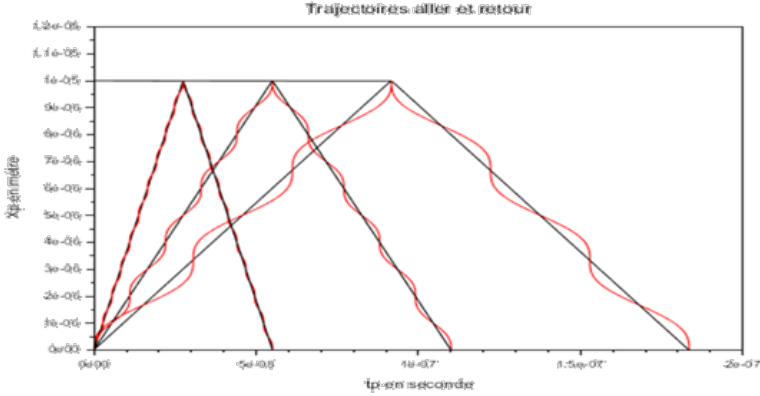


Figure 7: .

Nous venons de constater que si n est grand, pour l'aller et le retour, la droite autour de laquelle les trajectoires oscillent ne sont rien d'autre que les trajectoires qu'aurait une particule identique mais avec un comportement classique. Ce résultat est conforme à ce qui est communément admis, à savoir que "si n grand le mouvement de la particule quantique doit être approximativement identique à celui qui découle de la mécanique classique" [1]. C'est aussi ce que précisent les calculs dans la références [7] où le nombre quantique est très élevé. Dans notre cas cela a été rendu possible si et seulement si Ta et Tr ont été prises égales aux durées des trajets A/R de la particule classique.

Cela valide, à postériori notre choix pour l'expression des temps caractéristiques, Ta et Tr , des trajets observés.

3 Approche énergétique

3.1 Vitesse de la particule

Pour alléger l'exposé, on s'intéresse uniquement au parcours "aller". Il est facile d'extrapoler le comportement pour le trajet "retour". A partir des équations (13) et (16) on peut écrire:

$$Vp(xp) = \frac{dxp}{dt(xp)} = \frac{L.Vn}{2(L - X0) B_{X0} \sin^2(\frac{n\pi}{L}xp)} \quad (22)$$

C'est le rapport de la distance parcourue $d xp$ par la particule pendant la durée $dt(xp)$. C'est donc la vitesse $Vp(xp)$ de la particule lorsqu'elle se trouve au point xp .

L'équation (22) indique que la vitesse de la particule tend vers l'infini lorsque le sinus au dénominateur est égal à 0. Ainsi entre 0 et L il y a $n+1$ asymptotes verticales. L'équation (22) indique aussi que la vitesse de la particule n'est jamais nulle. Par exemple si $x0 = 0$ sa valeur minimale est $Vp(min) = Vn/2$. Ce résultat est important car il contredit certaines affirmations, selon lesquelles, la vitesse serait nulle presque partout dans le cas de la solution stationnaire [1]. C'est cet argument qui avait amené Einstein à douter de son point de vue "déterministe". Pour réduire au maximum les problèmes de tracé, posés par les $n + 1$ asymptotes, sur la Figure 8, nous avons fait le choix de représenter la vitesse, uniquement pour le cas $n = 1$. On présente le profil des vitesse pour trois valeurs de $X0$, mais on a limité le tracé à des portions de parcours allant de $X0$ jusqu'à $Xpa = 0,7L$ pour plus de lisibilité. . Le graphique montre que les valeurs minimales de la vitesse se situent toujours au milieu de la boîte et surtout il confirme que les vitesses ne sont jamais nulles avec des valeurs minimales qui dépendent de $X0$. Enfin, lorsque la particule est déposée à $t = 0$ en $x0 \neq 0$ la vitesse en ce point est finie. Pour éviter les effets dus aux asymptotes, dans la suite du travail, comme dans le cas de la Figure 8, on ne présentera plus que des résultats pour $n = 1$ et on limitera le domaine du tracé chaque fois que nécessaire. Mais dans tous les cas il est facile d'imaginer le passage à $n > 1$ avec le même type de comportement que pour le cas $n = 1$ mais entre deux des $n + 1$ asymptotes.

3.2 Energie cinétique-Energie potentielle

Ayant calculé sa vitesse nous pouvons connaître l'énergie cinétique de la particule en chaque point xp du parcours:

$$Ec(xp) = \frac{1}{2}mVp^2(xp) \quad (23)$$

Si la particule a un niveau quantique n elle a une énergie totale (Eq. (4)):

$$En = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \quad (24)$$

Si elle avait un comportement "classique" elle aurait une énergie cinétique constante égale à En et donc une vitesse constante égale à $Vn =$

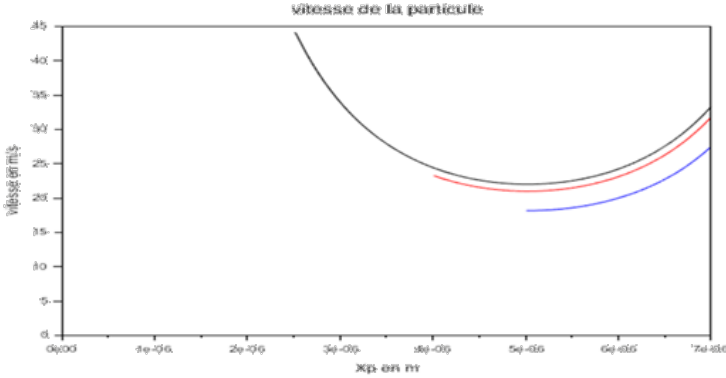


Figure 8: ($n = 1$) $x_0 = 0.25L$ (noir); $x_0 = 0.4L$ (rouge); $x_0 = 0.5L$ (bleu).

$\frac{n \pi \hbar}{mL}$ Dans notre cas la vitesse est loin d'être constante et il en va de même pour son énergie cinétique.

Si de façon classique on écrit que l'énergie totale est égale à la somme de l'énergie cinétique et d'une énergie potentielle on est amené à admettre que la particule possède une énergie potentielle Ep , d'origine quantique, telle que :

$$Ep(xp) = En - Ec(xp) \quad (25)$$

Sur la figure 9 on a représenté l'énergie potentielle dans les mêmes condition que pour la vitesse sur la figure 8. Les profils dépendent de x_0 et les valeurs maximales sont obtenues en $L/2$. L'énergie potentielle est positive uniquement dans la partie centrale de la boîte quand $En > Ec(xp)$ (voir Eq. (25)).

3.3 La force quantique

Si l'on adopte un raisonnement "classique", puisque la particule a une énergie cinétique et une énergie potentielle qui varient tout au long de la trajectoire, on peut imaginer que la particule est soumise, en chaque point xp à une force $Fq(xp)$ d'origine quantique contenue dans l'équation de Schrödinger. Dans ce cas le théorème de l'énergie cinétique nous dit que "lors d'un déplacement dxp le long de sa trajectoire la variation

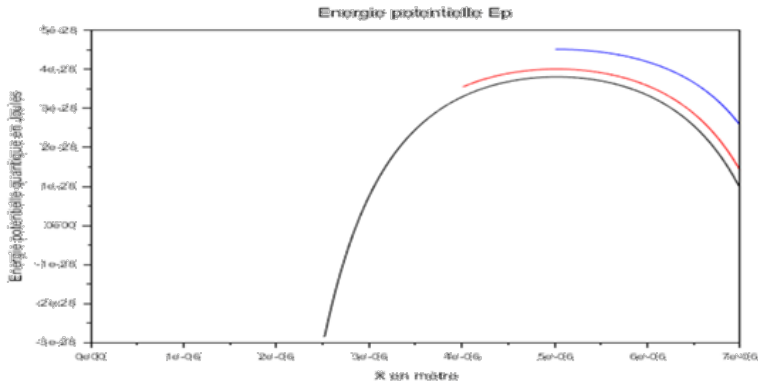


Figure 9: ($n = 1$) $X_0 = 0.25L$ (noir); $X_0 = 0.4L$ (rouge); $X_0 = 0.5L$ (bleu).

d'énergie cinétique de la particule est égale au travail de la force appliquée pendant ce déplacement" soit :

$$dEc = dW = Fq(xp).dxp \quad (26)$$

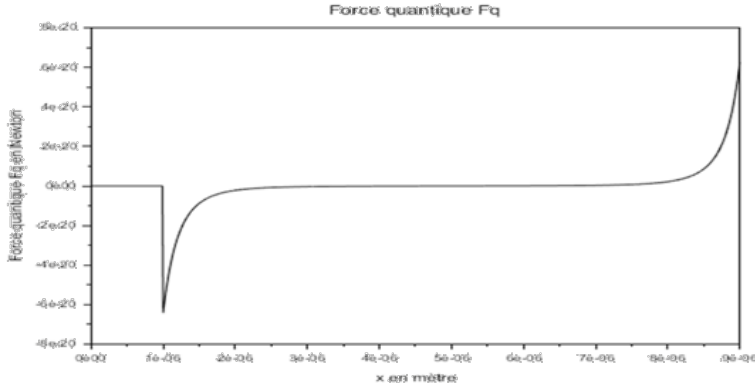
A partir des expressions (22), (23), (26)

$$Fq(xp) = \frac{dEc}{dxp} = -\frac{n\pi mLVn^2}{2((L-x_0)Bx_0^2)} x \frac{\cos(\frac{n\pi}{L}xp)}{\sin^5(\frac{n\pi}{L}xp)} \quad (27)$$

$Fq(xp)$ présente $n + 1$ asymptotes entre 0 et L . $Fq(xp)$ croît avec n , mais diminue avec L . On peut vérifier également, que si m augmente, l'effet quantique diminue.

Sur la figure 10 nous avons représenté la force $Fq(xp)$ lors d'un trajet aller avec $n = 1$ et $X_0 = 0$. Comme précédemment, pour plus de lisibilité, pour éviter l'effet des asymptotes, en 0 et L , nous avons limité le tracé entre $0.1L$ et $0.9L$.

Il est facile d'imaginer qu'il y a deux asymptotes en 0 et en L . On constate que la force est négative entre $x = 0$ et $x = 0.5L$, qu'elle est positive entre $x = 0.5L$ et $x = L$ et qu'à l'échelle de la représentation elle évolue peu, mais évolue, dans la partie centrale de la boîte.

Figure 10: ($n = 1$).

4 Trajectoire classique de newton

Nous venons de montrer qu'il existe un champ de force $Fq(x)$ à l'intérieur de la boîte quantique 1D de profondeur infinie. Cette force a été mise en évidence avec une démarche partant de l'équation de Schrödinger stationnaire Eq.(1) et de l'équation Eq. (12). Au passage nous avons montré que dans la même situation une particule avait des trajectoires que l'on qualifiera de "quantiques". A présent on se pose la question suivante:

"Quelle serait la trajectoire $XN(t)$ de notre particule si elle obéissait à la deuxième loi de Newton dans le champs de force quantique $Fq(x)$?" Dans ce cas la trajectoire $XN(t)$ serait solution de l'équation:

$$m \frac{d^2 XN(t)}{dt^2} = Fq(XN) \quad (28)$$

L'équation Eq. (28) est résolue très simplement après avoir discrétisé la dérivée seconde avec un schéma explicite:

$$XN(t + dt) = Fq(XN(t)) \frac{dt^2}{m} + 2XN(t) - XN(t - dt) \quad (29)$$

Avec les deux conditions: $XN(0) = x_0$ et $XN(dt) = x_0 + Vp(x_0) * dt$ $Vp(x_0)$ est donné par l'équation Eq. (22). Avec ces deux conditions

la particule est placée à $t = 0$ dans la même situation que pour les trajectoires "quantiques" du paragraphe 2-2. Ainsi les deux trajectoires $Xp(tp)$ et $XN(t)$ peuvent être comparées.

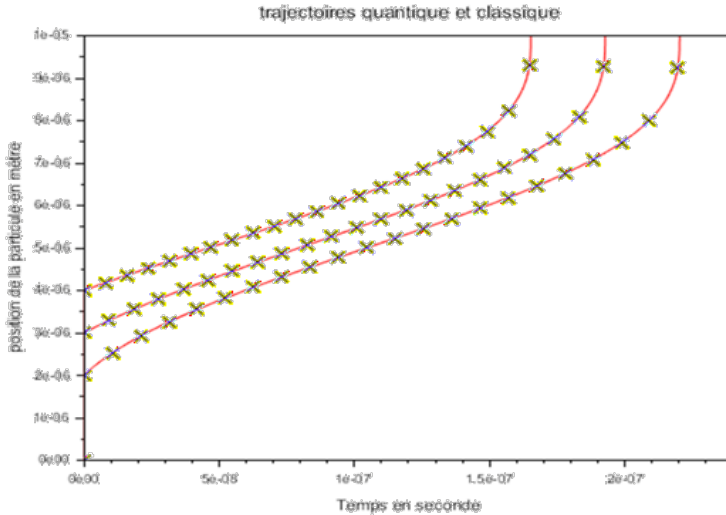


Figure 11: Trajectoires quantiques (rouge)- Trajectoires classiques (x).

Sur la Figure 11 sont représentées les trajectoires aller, "quantique" et "classique", pour $n = 1$ et trois positions initiales x_0 . Le seul commentaire à faire est que les trajectoires "quantiques" et les trajectoires "classiques" sont confondues et ce résultat nous questionne:

Que vient faire la deuxième loi de Newton dans cette situation? Peut-on dire que l'équation de Schrödinger génère un potentiel qui crée une force agissant sur la particule puis que c'est la loi de Newton qui pilote le mouvement de la particule comme en mécanique classique? C'est une façon de voir les choses. Mais alors pourquoi dans l'approche purement quantique n'a-t-on pas besoin de la loi de Newton?

5 Conclusion

Dans la première partie on a montré, à l'aide d'une démarche originale, que même dans le cas de la solution stationnaire il existait des trajectoires

dans la boîte 1D. Ces trajectoires obtenues que l'on qualifie de "quantiques" sont cohérentes. En poursuivant cette démarche on montre que dans ces conditions il existe un champ de force quantique stationnaire $Fq(x)$ qui agit sur la particule. Par la suite on a imaginé la situation suivante:

Dans notre boîte 1D de profondeur infinie la particule "classique" est soumise au champ de force "quantique" $Fq(x)$ précédent mais elle obéit à la deuxième loi de Newton. Si l'on place la particule "classique" dans les mêmes conditions initiales que la particule "quantique", de la première partie, force est de constater que les trajectoires "quantiques" et les trajectoires "classiques" obtenues avec la loi de Newton sont identiques.

Ce dernier résultat qui établit un lien entre l'approche quantique pure et une approche classique (ou semi classique) invite à se poser des questions sur l'interprétation de la mécanique quantique. Tout se passe comme si l'équation de Schrödinger induisait un champ de force quantique stationnaire $Fq(x)$ dans la boîte et que la particule se déplaçait dans la boîte en obéissant à la deuxième loi de Newton.

Perspectives

Tout d'abord, il faut appliquer notre démarche dans d'autres situations stationnaires simples (franchissement d'un seuil, effet tunnel,...) dans le but de vérifier si les résultats obtenus dans le présent travail sont confirmés. Par la suite il faudra aborder des cas avec l'équation de Schrödinger instationnaire.

Références

- [1] Gondran M. and Gondran A., *Mécanique quantique*, Editions Matériologique, (2014).
- [2] Born M., *Zur Quantenmechanic der stossvorgänge*, Vol 37(12), pp.863-867, (1926).
- [3] Gondran M., Hoblos R., *Trajectoires de de Broglie pour la particule dans la boîte*, Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol 30(3-4), (2005).
- [4] Einstein A., *In scientific papers presented to M. Norn*, pp.33-40, Edinburgh:(Olivier and Boyd), (1953).
- [5] Bohm D., *Physical Review*, Vol 85, pp. 166-193 (1952).
- [6] Basdevant J.L., *Introduction à la physique quantique*, chez Deboeck, (2017).
- [7] Born M., *Continuity, determinism, and reality*, Dan. Mat. Fys., Medd.30, Vol 2, pp. 1-26 (1955).

- [8] Borel L., *Thermodynamique et énergétique*, Presses Polytechniques Romandes, (1987).

(Manuscrit reçu le 8 janvier 2026)