

**Sur la symétrie dans les phénomènes physiques,
symétrie d'un champ électrique
et d'un champ magnétique**

P. CURIE

Publié à l'origine dans le
Journal de Physique, 3^e série, t.III, 1894, p. 393

1. Introduction.

Je pense qu'il y aurait intérêt à introduire dans l'étude des phénomènes physiques les considérations sur la symétrie familière aux cristallographes.

Un corps isotrope, par exemple, peut être animé d'un mouvement rectiligne ou de rotation ; liquide, il peut être le siège de mouvements tourbillonnaires ; solide, il peut être comprimé ou tordu ; il peut se trouver dans un champ électrique ou magnétique ; il peut être traversé par un courant électrique ou calorifique ; il peut être parcouru par un rayon de lumière naturelle ou polarisée rectilignement, circulairement, elliptiquement, etc. Dans chaque cas, une certaine dissymétrie caractéristique est nécessaire en chaque point du corps. Les dissymétries seront encore plus complexes, si l'on suppose que plusieurs de ces phénomènes co-existent dans un même milieu ou si ces phénomènes se produisent dans un milieu cristallisé qui possède déjà, de par sa constitution, une certaine dissymétrie.

Les physiciens utilisent souvent les conditions données par la symétrie, mais négligent généralement de définir la symétrie dans un phénomène, parce que, assez souvent, les conditions de symétrie sont simples et presque évidentes *a priori*¹.

¹Les cristallographes qui ont à considérer des cas plus complexes ont établi la

Dans l'enseignement de la Physique, il vaudrait cependant mieux exposer franchement ces questions : dans l'étude de l'électricité, par exemple, énoncer presque au début la symétrie caractéristique du champ électrique et du champ magnétique ; on pourrait ensuite se servir de ces notions pour simplifier bien des démonstrations.

Au point de vue des idées générales, la notion de symétrie peut être rapprochée de la notion de *dimension* : ces deux notions fondamentales sont respectivement caractéristiques pour le *milieu* où se passe un phénomène et pour la *grandeur* qui sert à en évaluer l'intensité.

Deux milieux de même dissymétrie ont entre eux un lien particulier, dont on peut tirer des conséquences physiques. Une liaison du même genre existe entre deux grandeurs de même dimension. Enfin, lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. De même, dans la mise en équation d'un phénomène physique, il y a une liaison de cause à effet entre les grandeurs qui figurent dans les deux membres et ces deux membres ont même dimension.

2. Opérations de recouvrement et éléments de symétrie.

L'établissement des divers types de symétrie peut être divisé en deux grands Chapitres, suivant qu'il s'agit de définir la symétrie d'un système limité ou d'un système qui peut être regardé comme étant illimité. Nous ne nous occuperons ici que d'un système limité²

Considérons un système défini à l'aide de données analytiques et de trois axes coordonnés rectangulaires, par exemple. Le système possédera

théorie générale de la symétrie. Dans les traités de Cristallographie physique (qui sont en même temps de véritables traités de Physique), les questions de symétrie sont exposées avec le plus grand soin. Voir les traités de Mallard, de Liebsch, de Soret. *J. de Phys.*, 3^e série, t. III. (Septembre 1894.)

²La théorie de la constitution des corps cristallisés n'est autre chose que la théorie générale de la *symétrie dans un milieu illimité* ayant une constitution périodique. C'est une théorie admirable qui a été édifiée par Bravais (recherches cristallographiques), par Jordan (*Annali di Matematica*, p. 167, 1868 ; 1869, p. 322) et par de Fedorow (*Société minéralogique de Saint-Petersbourg*, 1879 à 1884, en langue russe ; *Zeitschrift für Kristallographie*, t. XX, p. 25, 1892). Récemment, Schoenflies a donné un excellent Traité didactique de cette théorie *Kristallsysteme und Kristallstruktur* ; Leipzig, 1891).

Les corps cristallisés peuvent être divisés en 32 groupes, si l'on considère seulement la symétrie de la forme extérieure ; mais la théorie prévoit, pour la structure interne de ces substances, 230 types de symétrie distincts. Si tous ces types se trouvent réalisés dans la nature, c'est pour les physiciens une véritable richesse, car ils ont alors à leur disposition 230 milieux doués de symétries différentes.

une certaine symétrie si, en se servant d'autres axes coordonnés rectangulaires, il se trouve encore défini avec les mêmes données analytiques.

Les éléments (points, droites, plans, etc.) définis avec les mêmes données analytiques et rapportés à ces divers groupes d'axes sont des éléments *homologues* ou *de même espèce*.

L'opération qui représente le passage d'un premier système à un second sera une *opération de recouvrement*³.

Il existe deux espèces d'axes coordonnés rectangulaires symétriques l'un de l'autre. On aura une *opération de recouvrement du premier genre* dans le système, quand l'opération représente le passage d'un système d'axe à un autre identique. L'opération est alors équivalente à un simple déplacement dans l'espace. Il y a *répétition* des mêmes éléments dans le système.

On aura une *opération de recouvrement du deuxième genre ou transformation symétrique proprement dite*, lorsque l'opération représente le passage d'un système d'axes à un autre symétrique du premier. Le système est alors identique à son image obtenue par mirage.

On démontre facilement que, pendant les opérations de recouvrement d'un système limité, un point au moins reste toujours fixe dans l'espace. Il en résulte qu'établir tous les types de symétrie possibles d'un système limité revient à établir tous les *types de symétrie autour d'un point* qui est le centre de figure du système.

Les opérations de recouvrement du premier genre peuvent toujours être obtenues par une simple rotation autour d'un *axe de répétition* (plus généralement appelé *axe de symétrie*), passant par le point. L'axe d'ordre q (q nombre entier) donnera le recouvrement du système pour des rotations d'angles $0, 1, 2, \dots, (q-1)$ fois $\frac{2\pi}{q}$.

Nous considérerons une *direction* et un *sens* à chaque axe du système, ce qui double le nombre des axes; car, dans un axe, nous en compterons deux dirigés en sens contraires l'un de l'autre. Si ces deux axes de sens contraires sont d'espèce différente au point de vue des répétitions (par exemple l'axe d'une pyramide régulière) et d'ordre q , nous les désignerons par $(L_q l_q)$.

Si ces deux axes de sens contraires sont de même espèce par répétition (exemple l'axe principal d'un prisme) et d'ordre q , nous les désignerons par $(2L_q)$. On a alors un *axe doublé*. Dans ce cas, il existe nécessairement

³*Deck Operation* des cristallographes allemands.

dans le système un axe de répétition d'ordre pair normal à l'axe doublé qui permet de renverser celui-ci sur lui-même par une rotation de 180° faisant partie des opérations de recouvrement du système.

Les opérations de recouvrement du deuxième genre peuvent toujours être obtenues par un mirage accompagné d'une rotation autour d'un axe normal au plan de mirage. Plusieurs cas sont à considérer :

1°) La rotation est nulle ; on a un simple mirage et le système a un *plan de symétrie*, $-P$.

2°) La rotation est égale à 180° ; on a un *centre de symétrie*, $-C$.

3°) L'axe normal au plan est un axe de répétition d'ordre q et l'on a q transformations symétriques ; chacune de ces opérations consiste en un mirage suivi d'une des rotations :

$$0, \frac{2\pi}{q}, \dots, (q-1) \frac{2\pi}{q} ;$$

on a alors *un plan de symétrie directe d'ordre q* , nous le désignerons par P_q .

4°) L'axe normal au plan est un axe de répétition d'ordre q , et l'on a q transformations symétriques ; chacune de ces opérations consiste en un mirage suivi d'une des rotations :

$$\frac{1}{2} \frac{2\pi}{q}, \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{q}, \left(2 + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{q}, \dots, \left(q - 1 + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{q}$$

autour de l'axe. On a alors *un plan de symétrie alterne d'ordre q* : nous le désignerons par π_q .

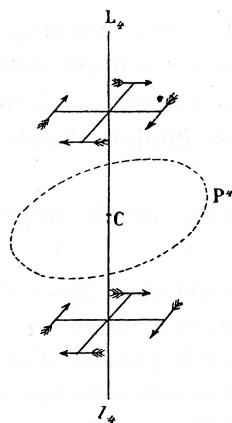


Figure 1

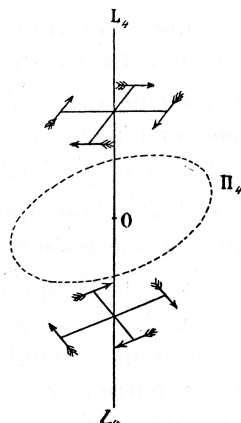


Figure 2

Le modèle représenté (*fig. 1*) a un axe d'ordre 4 avec un plan P_4 de symétrie directe d'ordre 4. Les quatre flèches inférieures sont obtenues par mirage direct des quatre flèches supérieures et réciproquement. On restitue le système par mirage simple ou accompagné d'une rotation dans certain nombre de fois 90° .

Le modèle (*fig. 2*) a un axe d'ordre 4 avec un plan π_4 de symétrie alterne d'ordre 4, normal à sa direction. Les quatre flèches inférieures alternent en position avec les images obtenues par mirage direct des quatre flèches supérieures. On restitue le système par un mirage suivi d'une rotation d'un nombre impair de fois 45° .

On peut remarquer que le modèle de la *fig. 2* est superposable à son image vue dans une glace, bien qu'il ne possède ni plan ni centre de symétrie. Il a seulement un plan de symétrie alterne⁴.

3. Les groupes d'opérations de recouvrement.

Toutes les opérations de recouvrement d'un système sont définies à l'aide des éléments de symétrie que nous venons d'énumérer.

Un *groupe* d'opérations de recouvrement sera une réunion d'opérations telles que deux quelconques des opérations effectuées succes-

⁴P. Curie, *Bulletin de la Soc. minéral. (Sur les questions d'ordre, t. VII, p. 89; 1884. – Sur la symétrie, t. VII, p. 418; 1884).*

sivement donneront le même résultat que celui qu'on obtient par une opération unique faisant partie du groupe.

Nous donnons ici le Tableau complet de tous les groupes d'opérations de recouvrement autour d'un point. Ces opérations sont complètement spécifiées par l'énumération des éléments de symétrie.

On voit que les groupes d'éléments de symétrie peuvent être partagés en *sept classes* cl se distinguant les unes des autres par la nature du groupe d'axes qu'elles contiennent. Chaque classe peut exister avec ou sans transformation symétrique proprement dite. Il y a généralement plusieurs manières de donner la symétrie proprement dite à un groupe qui ne contient que des axes. On obtient en tout *19 familles* f . Considérons, par exemple, la classe III et supposons $q = 3$, on aura le groupe d'axes $2L_3, (3L_2, 3L'_2)$, c'est-à-dire un axe principal doublé d'ordre 3, avec trois axes binaires et ceux de sens contraire d'une autre espèce $3(L_2, L'_2)$; ces trois axes sont normaux à l'axe principal et forment entre eux des angles de 120 deg. Ce système peut exister sans autre élément de symétrie [famille (8), forme cristalline du quartz], ou avec un plan de symétrie d'ordre 3 normal à l'axe principal (P_3) et trois plans de symétrie $3P$ passant par l'axe principal et par les axes binaires [famille (9) prisme triangulaire]. On peut encore avoir un système symétrique [famille (10), rhomboèdre] avec un plan de symétrie alterne π_3 normal à l'axe principal, 3 plans de symétrie passant par l'axe principal et normaux aux axes binaires et un centre de symétrie.

Chaque famille des classes II et III contient une infinité de groupes, q peut être un nombre entier quelconque. Les familles des autres classes ne contiennent chacune qu'un seul groupe.

Dans les familles (5) et (9) il y a un centre de symétrie quand q est d'ordre pair. Dans les familles (6) et (10), il y a un centre de symétrie quand q est d'ordre impair.

Dans la classe III, les axes L_2 et L'_2 se confondent, mais sont de sens contraire l'un de l'autre si q est impair. On a, au contraire, des axes binaires doublés de deux espèces différentes si q est pair.

Les valeurs N donnent l'ordre de chaque groupe. N est le nombre de points homologues entre eux dans le système, lorsque les points considérés ne sont situés sur aucun axe ni sur aucun plan de symétrie. N est encore le nombre de systèmes d'axes coordonnés rectangulaires pour lequel le système se présente sous un même aspect.

Cl.	Axes de répétition	f.	Transform. sym.	N.	Exemples
I.	(Pas d'axe)	1	O	1	parallélépipède
		2	P	2	
		3	C	2	
II.	$L_q l_q$ (un axe et son inverse)	4	O	q	$q = 2$ acide tartrique
		5	P_q	$2q$	$q = 2$ $q = 6$ $q = \infty$ gypse apatite champ magnétique
		6	π_q	$2q$	$q = \infty$ $q = 3$ champ magnétique diopase
		7	q^P	$2q$	$q = 3$ $q = \infty$ tourmaline champ électrique, tronc de cône
III.	$2L_q, qL_2, ql'_2$ (un axe principal doublé)	8	O	$2q$	$q = 3$ $q = \infty$ quartz fil tordu
		9	P_q, qP	$4q$	$q = 3$ $q = \infty$ prisme triangulaire régulier cylindre circulaire droit
		10	π_q, qP	$4q$	$q = \infty$ $q = 3$ $q = 2$ cylindre circulaire droit rhomboèdre, spath sphénoèdre
IV.	$4(L_3 l_3), 6L_2$ (axes du tétraèdre régulier)	11	O	12	chlorate de soude
		12	$4\pi_3, 3P_2, C$	24	pyrite
		13	$3\pi_2, 6P$	24	tétraèdre régulier, blende
V.	$6L_4, 8L_3, 12L_2$ (axes du cube)	14	O	24	cuprite
		15	$3P_4, 4\pi_3, 6P_2, C$	48	cube, octaèdre régulier
VI.	$12L_5, 20L_3, 30L_2$ (axes de l'icosaèdre régulier)	16	O	60	icosaèdre, dodécaèdre régulier
		17	$6\pi_5, 10\pi_3, 15P_2, C$	120	
VII.	∞L_∞ (axes de la sphère)	18	O	∞	sphère remplie de liquide doué de pouvoir rotatoire sphère
		19	$\infty P_\infty, C$	∞	

Dans ce tableau,
 (L_q, l_q) désignent un axe d'ordre q et celui de sens contraire d'une autre espèce,
 $(2L_q)$ un axe d'ordre q doublé,
 C un centre de symétrie,
 P un plan de symétrie,
 P_q un plan de symétrie directe d'ordre q ,
 π_q un plan de symétrie alterne d'ordre q .

Les systèmes ayant la symétrie des familles 1, 4, 8, 11, 14, 16, 18 qui ne contiennent que des axes ne sont pas superposables à leur image obtenue par mirage, ils possèdent la *dissymétrie énantiomorphe*⁵.

Une notion très importante au point de vue qui nous occupe est celle des *intergroupes*. Un groupe d'éléments de symétrie est un intergroupe d'un groupe de symétrie plus élevée lorsque toutes les opérations de recouvrement du premier groupe font partie des opérations de recouvrement du second.

C'est ainsi, par exemple, que le groupe (13) à symétrie tétraédrique est un intergroupe du groupe (15) à symétrie cubique. Le groupe (L_6l_6), $6P$ de la famille (7) (symétrie d'une pyramide hexagonale régulière) est un intergroupe du groupe $\frac{2L_6}{P_6}, \frac{6L_2, 6L'_2}{6P_2} C$ de la famille (9) (prisme hexagonal régulier). Un groupe de (4) est un intergroupe des groupes (5), (6), (7), (8), (9), (10) pour une même valeur de q , etc.

4. Dissymétrie caractéristique des phénomènes physiques.

Considérons maintenant un point quelconque d'un milieu dans un état physique quelconque. La symétrie en ce point sera nécessairement caractérisée par un des groupes du Tableau qui précède⁶.

Nous énoncerons les propositions suivantes :

La symétrie caractéristique d'un phénomène est la symétrie maxima compatible avec l'existence du phénomène.

Un phénomène peut exister dans un milieu qui possède sa symétrie caractéristique ou celle d'un des intergroupes de sa symétrie caractéristique.

Autrement dit, certains éléments de symétrie peuvent coexister avec certains phénomènes, mais ils ne sont pas nécessaires. Ce qui est

⁵Pour détails plus complets, voir les traités de cristallographie. Voir aussi Bravais, *Recherches cristallographiques*; Jordan, *Sur les groupes de mouvements (Annali di Matematica, 1888)*; P. Curie, *loc. cit.*

⁶Certains esprits peuvent hésiter à transporter à un milieu dans un état physique quelconque une classification qui a été établie d'abord au point de vue de la géométrie pure. Nous ferons remarquer que l'on peut ramener tous les raisonnements qui servent à l'établissement des groupes à la forme suivante : soient A, B, C trois systèmes d'axes coordonnés rectangulaires pour lesquels un système se présente sous un même aspect, soit D un quatrième système d'axes coordonnés rectangulaires qui est placé par rapport à C de la même façon que B par rapport à A ; D sera encore un système d'axes coordonnés pour lequel le système se présentera sous le même aspect que pour A, B, C. Le mode de raisonnement ne préjuge rien sur la nature du système.

nécessaire, c'est que certains éléments de symétrie n'existent pas. *C'est la dissymétrie qui crée le phénomène.*

Il serait beaucoup plus logique d'appeler plan de dissymétrie tout plan qui ne serait pas un plan de symétrie ; axe de dissymétrie tout axe qui ne serait pas un axe de symétrie, etc., et, d'une manière générale, de donner la liste des opérations qui ne sont pas des opérations de recouvrement dans ce système. Ce sont ces opérations-là qui indiquent une dissymétrie et, par conséquent, une propriété possible dans le système. Mais, dans les groupes que nous avons considérés, il y a un nombre infini d'opérations n'amenant pas le recouvrement et généralement un nombre fini d'opérations de recouvrement : il est donc beaucoup plus simple de donner la liste de ces dernières opérations.

On peut encore voir que quand plusieurs phénomènes de natures différentes se superposent dans un même système, les dissymétries s'ajoutent. Il ne reste plus alors comme éléments de symétrie dans le système que ceux qui sont communs à chaque phénomène pris séparément.

Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

Lorsque certains effets révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance.

La réciproque de ces deux propositions n'est pas vraie, au moins pratiquement, c'est-à-dire que les effets produits peuvent être plus symétriques que les causes. Certaines causes de dissymétrie peuvent ne pas avoir d'action sur certains phénomènes ou du moins avoir une action trop faible pour être appréciée, ce qui revient pratiquement au même que si l'action n'existait pas.

Il y a intérêt, au point de vue des phénomènes physiques, à considérer à part les *groupes contenant un axe d'isotropie*. Ces groupes sont au nombre de cinq ; nous les désignerons par *(a)*, *(b)*, *(c)*, *(d)*, *(e)*.

$$\begin{array}{l}
 \frac{2L_\infty}{P_\infty}, \frac{\infty L_2}{\infty P_2}, C \\
 (a) \quad \text{Ex. Cylindre,} \\
 \quad \text{corps comprimé} \\
 \quad \text{dans un sens}
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 (b) \quad 2L_\infty, \infty L_2 \\
 \quad \text{Cylindre tordu.} \\
 (c) \quad (L_\infty l_\infty), \infty P_1 \\
 \quad \text{Tronc de cône.} \\
 \quad \text{Champ électrique.} \\
 (d) \quad \frac{(L_\infty l_\infty)}{P_\infty}, C \\
 \quad \text{Cylindre tournant.} \\
 \quad \text{Champ magnétique.}
 \end{array}
 \right\}
 (e) \quad (L_\infty l_\infty)$$

Le groupe cylindrique (a), le plus symétrique, possède les éléments de symétrie du cylindre circulaire droit : c'est-à-dire un axe d'isotropie doublé $2L_\infty$ avec une infinité d'axes binaires doublés ∞L_2 normaux à l'axe principal et passant par le centre de figure, un plan de symétrie directe P_∞ d'ordre ∞ normal à l'axe principal, une infinité de plans de symétrie directe ∞P_2 , d'ordre 2, passant par l'axe principal, un centre de symétrie C .

Lorsque l'on comprime dans un sens un corps isotrope, il devient anisotrope et possède la symétrie du groupe cylindrique (a). On sait qu'un corps ainsi comprimé a les propriétés optiques des cristaux à un axe optique ; la symétrie (a) est précisément la symétrie maxima compatible avec l'existence de ce phénomène. Les corps cristallisés à un axe optique ont des symétries qui sont des intergroupes de la symétrie (a).

Les autres groupes (b), (c), (d), (e), à axe d'isotropie, sont des intergroupes du groupe cylindrique (a).

Le groupe (b) possède toujours l'axe d'isotropie doublé et les axes binaires ; mais il ne possède plus ni centre ni plan de symétrie. Le groupe (b) est l'intergroupe holoaxe du groupe (a). Le groupe (b) a la symétrie d'un cylindre ou d'un fil que l'on a tordu autour de son axe. C'est la symétrie du centre de figure d'un système formé de deux cylindres identiques ayant leurs axes dans le prolongement l'un de l'autre et tournant chacun autour de cet axe avec des vitesses angulaires égales et de signes contraires. La *symétrie de torsion* (b) ne contenant que des axes de répétition, possède la dissymétrie non superposable (énantiomorphie)

qui est nécessaire pour le phénomène de la polarisation rotatoire ordinaire des corps actifs. On peut encore dire que la symétrie (b) est réalisée lorsque l'on remplit un cylindre d'un liquide doué de la polarisation rotatoire. La forme cristalline du quartz $2L_3, 3(L_3L'_2)$ a la symétrie d'un intergroupe de (b) .

Le groupe (c) possède un axe d'isotropie et celui de sens contraire d'une autre espèce $(L_\infty l_\infty)$; cet axe n'est donc plus doublé, (autrement dit, l'axe ne se présente plus de la même façon par les deux bouts). Le groupe (c) a encore une infinité de plans de symétrie passant par l'axe d'isotropie; mais il ne possède plus ni le plan de symétrie normal à l'axe, ni le centre de symétrie, ni les axes binaires du groupe cylindrique. C'est la symétrie en un point quelconque de l'axe d'un tronc de cône circulaire droit. C'est la symétrie d'une force, d'une vitesse, d'un champ où s'exerce l'attraction universelle; c'est encore la *symétrie du champ électrique*. Tous ces phénomènes sont très convenablement représentés par une flèche au point de vue spécial de la symétrie.

Considérons, par exemple, le champ de l'attraction universelle; une sphère matérielle M , dont le centre est en un point O , agit en un point extérieur A , de manière à y créer un champ où peut s'exercer l'action de l'attraction newtonienne. Si nous supposons que la matière M n'apporte par elle-même aucune dissymétrie, nous voyons que la ligne OA est un axe d'isotropie, que tout plan passant par OA est un plan de symétrie, et ce sont là les seuls éléments de symétrie passant par le point A . C'est la symétrie du groupe (c) . Donc le champ de l'attraction newtonienne pourra se rencontrer dans un milieu possédant la symétrie de (c) ou d'un de ses intergroupes; du reste, on ne peut imaginer que la symétrie puisse être supérieure à (c) , car elle devrait être dans ce cas la symétrie du groupe cylindrique (a) ou celle du groupe sphérique (19) et le champ n'aurait pas de *sens* et il en serait de même des forces et des vitesses. Si nous plaçons en A une sphère matérielle, on aura une force agissant sur cette matière. Le corps pourra se mettre en mouvement dans la direction AO et prendre une certaine vitesse et rien là dedans ne troublera la symétrie du système; donc (c) représente en même temps la symétrie d'une force agissant sur la matière pondérable et la symétrie de la matière animée d'une certaine vitesse.

Pour établir la symétrie du champ électrique, supposons que ce champ soit produit par deux plateaux circulaires de zinc et de cuivre placés en face l'un de l'autre, comme les armatures d'un condensateur à air. Considérons entre les deux plateaux un point de l'axe commun, nous

voyons que cet axe est un axe d'isotropie et que tout plan passant par cet axe est un plan de symétrie. Les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits ; donc le champ électrique est compatible avec la symétrie de (c) et de ses intergroupes.

Le groupe (a) à symétrie cylindrique et le groupe (19) à symétrie sphérique sont les seuls ayant pour intergroupe (c) . Il n'est donc pas vraisemblable que le champ électrique puisse avoir une symétrie supérieure à (c) . Ce dernier point peut du reste être démontré rigoureusement si l'on admet, comme nous l'avons vu plus haut, que la force agissant sur un corps pondérable a elle-même pour symétrie caractéristique le groupe (c) . Supposons, en effet, qu'une sphère conductrice chargée d'électricité soit isolée dans l'espace, puis que l'on fasse naître un champ électrique par une cause quelconque. Une force agira sur la sphère dans la direction du champ. La dissymétrie des effets doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance ; la force ne possédant pas d'axe de symétrie normal à sa direction, le système de la sphère chargée et du champ ne doit pas non plus posséder cet élément de symétrie. Mais la sphère chargée, considérée isolément, possède des axes d'isotropie dans toutes les directions ; la dissymétrie en question provient donc du champ électrique qui ne doit pas posséder d'axe de symétrie normal à sa direction. Le champ électrique ne peut donc pas avoir la symétrie cylindrique ou sphérique, et sa symétrie caractéristique est celle du groupe (c) . La symétrie du courant électrique et celle de la polarisation diélectrique est nécessairement la même que celle du champ qui donne naissance à ces phénomènes.

Les phénomènes pyroélectriques et piézoélectriques viennent apporter un nouvel appui aux conclusions qui précèdent sur la symétrie caractéristique du champ électrique. Un cristal de tourmaline, par exemple, se polarise électriquement dans la direction de son axe ternaire lorsque l'on chauffe le cristal ou lorsqu'on le comprime dans la direction de l'axe. Or l'échauffement ou cette compression ne modifient en rien la symétrie du cristal qui est $(L_3, l_3) 3P$, un axe ternaire (avec l'axe de sens contraire d'une autre espèce) par lequel passent trois plans de symétrie ; c'est là un intergroupe de (c) $(L_\infty l_\infty) \infty P$, la symétrie est par conséquent compatible avec l'existence d'une polarisation *diélectrique suivant l'axe*.

Enfin, nous remarquerons que le champ électrique détermine dans les liquides les mêmes phénomènes optiques que ceux donnés par compression de solides (phénomènes de Kerr). La symétrie caractéristique de ces phénomènes est la symétrie cylindrique (a) dont le groupe (c) est un intergroupe ; on voit donc qu'une partie seulement de la dissymétrie ca-

ractéristique du champ électrique est relevée par le phénomène de Kerr. Les phénomènes de dilatations électriques (phénomène Duter) ne révèle de même que la dissymétrie du groupe (a) .

Le groupe (d) possède un axe d'isotropie et l'axe de sens contraire d'une autre espèce $(L_\infty l_\infty)$: cet axe n'est donc pas doublé par répétition ; mais le système possède un centre de symétrie et un plan de symétrie d'ordre ∞ normal à l'axe. Les axes L_∞ et l_∞ de sens contraires sont donc symétriques l'un de l'autre, et l'on peut dire que l'axe d'isotropie est doublé par symétrie. Le groupe ne possède ni les axes binaires, ni les plans de symétrie passant par l'axe principal du groupe cylindrique (a) . Le groupe (d) donne la symétrie ou centre de figure d'un cylindre circulaire droit qui tourne autour de son axe avec une certaine vitesse. C'est encore à cette symétrie qu'il faut rapporter un couple, une vitesse angulaire, *un champ magnétique*.

Etablissons, par exemple, la symétrie caractéristique du champ magnétique. Considérons pour cela le champ magnétique qui existe au centre d'une circonférence parcourue par un courant électrique ; le champ est dirigé normalement au plan de la circonférence. Cherchons la symétrie des causes, c'est-à-dire la symétrie au centre de la circonférence parcourue par le courant. On aura d'abord un axe d'isotropie normal au plan du courant. Le courant électrique est compatible avec l'existence de plans de symétrie passant par la direction du courant ; le plan de la circonférence sera donc un plan de symétrie. Le courant électrique n'admet ni axe de répétition, ni plan de symétrie normal à sa direction. Il n'y a donc pas d'axe dans le plan du cercle ni de plans de symétrie passant par l'axe d'isotropie. La symétrie des causes est donc le groupe $(d) \frac{(L_\infty l_\infty)}{P_\infty} C$. Ces éléments de symétrie sont compatibles avec l'existence d'un champ magnétique passant par l'axe d'isotropie ; puisque les éléments de symétrie des causes se retrouvent dans les effets produits.

On voit qu'un champ magnétique peut posséder un plan de symétrie normal à sa direction. Le champ magnétique est, au contraire, incompatible avec la présence d'un axe binaire normal à sa direction. Pour le prouver, nous allons nous servir des phénomènes d'induction. Considérons, par exemple, un fil rectiligne animé par une certaine vitesse normale à sa direction. Un pareil système possède un axe binaire dans le sens de la vitesse. Supposons maintenant qu'un champ magnétique existe dans la direction normale au fil et à la vitesse de déplacement ; une force électromotrice d'induction naîtra dans le fil. Ce phénomène est

incompatible avec la présence d'un axe binaire dirigé dans le sens du déplacement, c'est-à-dire normal au fil. La dissymétrie des effets doit se retrouver dans les causes; la disparition nécessaire de l'axe binaire dont nous avons parlé ne peut provenir que de la présence du champ magnétique; celui-ci ne peut donc pas avoir d'axe binaire normal à sa direction. (La même démonstration pourra se faire en considérant un circuit circulaire normal à un champ magnétique. On supposerait que ce circuit se dilate sans changer de forme en donnant naissance à un courant d'induction.)

Les groupes cylindriques (a) et sphériques (19) ont pour intergroupe (d), mais l'existence des axes normaux entre eux dans ces groupes montre qu'ils ne peuvent convenir pour représenter la symétrie du champ magnétique. Le champ magnétique est donc seulement compatible avec le groupe (d) et ses intergroupes ⁷

Le phénomène de la polarisation rotatoire magnétique vient encore confirmer cette conclusion ⁸.

Un corps polarisé magnétiquement possède la même symétrie que le champ magnétique.

Les phénomènes de dilatation magnétique du fer révèlent seulement la dissymétrie du groupe cylindrique (a) dont (d) est un intergroupe.

Un grand nombre de cristaux sont caractérisés par des groupes de symétrie qui sont des intergroupes de la symétrie magnétique, tels que ceux d'apatite $\frac{L_6l_6}{P_6}C$, de gypse, de chlorure de fer, d'amphibole $\frac{L_2l_2}{P_2}C$. Il pourrait se faire que ces cristaux fussent aimantés naturellement de par leur constitution; j'ai cherché sans succès à constater cette polarité par expérience.

On a coutume de représenter un champ magnétique par une flèche; cette représentation, qui n'offre souvent aucun inconvénient, est défec-tueuse au point de vue spécial de la symétrie, puisque le champ

⁷P. Curie, *loc. cit.*, 1884, et *Archives des Sc. phys. et nat.*, t. XXIX; 1893.

Lord Kelvin a été amené à supposer que l'aimantation est due à une déformation d'un milieu particulier. Cette déformation est simplement une rotation, qui, dans ce milieu tout spécial, provoque la naissance d'un couple élastique antagoniste. Voir *Traduction des Conférences de Sir Thomson*, Note de M. Brillouin. Cette conception est en complet accord avec la symétrie qui précède.

⁸Pour traiter convenablement la question de la polarisation rotatoire au point de vue de la symétrie, il faut faire intervenir les éléments de symétrie propres aux milieux illimités dont nous n'avons pas parlé. Un corps parcouru par un rayon de lumière polarisé circulairement possède par exemple un axe hélicoïdal d'isotropie.

magnétique n'est pas modifié par un mirage par rapport à un plan normal à sa direction et qu'il est changé de sens par un mirage par rapport à un plan passant par sa direction. C'est précisément le contraire qui se passe pour la flèche représentative.

Le groupe (e) possède seulement un axe d'isotropie $(L_\infty l_\infty)$ non doublé. Le groupe (e) est un intergroupe commun aux quatre groupes (a) , (b) , (c) , (d) ; il possède les dissymétries réunies de ces quatre groupes. Il est, par conséquent, compatible avec l'existence des phénomènes qui ont pour symétrie caractéristique l'un quelconque des quatre autres groupes. Le groupe (e) possède la dissymétrie énantiomorphe.

Les cinq groupes (a) , (b) , (c) , (d) , (e) sont reliés entre eux à la manière des types de symétrie d'un même système cristallin. Si nous empruntons le langage de cristallographes, nous dirons que le groupe (a) donne la symétrie complète ou holoédrique du système cylindrique. Le groupe (b) correspond à hémiedrie holoaxe (hémiedrie plagièdre ou hémiedrie énantiomorphe). Le groupe (c) , à l'hémiedrie hémimorphe (hémiedrie à faces inclinées). Le groupe (d) , à la parahémiedrie (hémiedrie à faces parallèles); enfin, le groupe (e) correspond à la tétartoédrie.

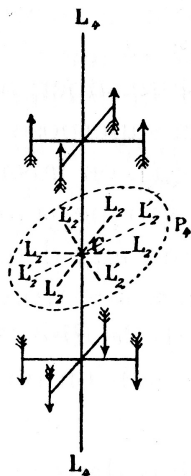
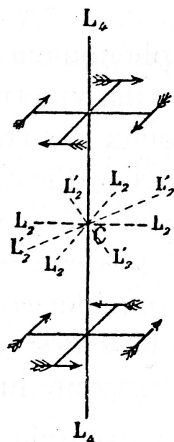
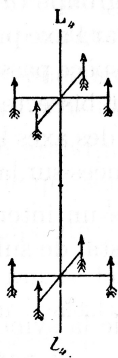
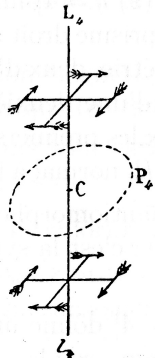
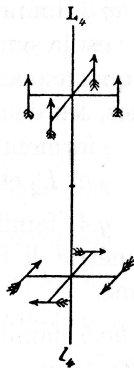
Bien que chaque groupe contienne un nombre infini de transformations de recouvrement, on peut cependant dire que les groupes (b) , (c) et (d) ne renferment que la moitié et le groupe (e) que le quart des opérations de recouvrement du groupe (a) .

Le modèle représenté dans les *fig. 3,4,5,6,7* donne pour diverses orientations des flèches les divers intergroupes à axe principal d'ordre 4 des groupes (a) , (b) , (c) , (d) , (e) .

La *fig.3* donne [famille (9) $q = 4$] l'intergroupe du groupe (a) cylindrique; c'est la symétrie du prisme droit à base carrée. Par l'axe principal passent quatre plans de symétrie, deux d'une première espèce passent par les flèches, les deux autres d'une deuxième espèce sont bissecteurs des angles que forment entre eux les premiers. Les positions des axes binaires doublés L_2 et L'_2 et du plan P_4 normal à l'axe sont indiquées sur la figure.

La *fig.4* [famille (8) énantiomorphe, $q = 4$] donne un intergroupe de la symétrie de torsion (b) ; c'est la symétrie d'un cristal de sulfate de strychnine.

La *fig.5* [famille (7) $q = 4$] donne un intergroupe de la symétrie du champ électrique (c) , il y a quatre plans de symétrie passant par l'axe: c'est précisément le type de symétrie d'un cristal de calamine qui est à la fois piézoélectrique et pyroélectrique.

Figure 3 . $\frac{2L_4}{P_4}, \frac{4L_2}{2P_2}, \frac{4L'_2}{2P'_2} C$ Figure 4. $2L_4, 4L_2, 4L'_2$ Figure 5 $L_4l_4, 2P, 2P'$ Figure 6. $\frac{L_4l_4}{P_4} C$ Figure 7. L_4l_4

La *fig.6* [famille (5) $q = 4$] donne un intergroupe de la symétrie magnétique (d); c'est la symétrie des cristaux de schéelite et d'érythrite.

Enfin la *fig.7* [famille (4) énantiomorphe, $q = 4$] donne un intergroupe du groupe (e), à axe d'isotropie (cristal de penta-érythrite). Dans la *fig.7*, les flèches du bas entraînent la dissymétrie du champ magnétique, les flèches du haut celle du champ électrique. La réunion de ces flèches

entraîne l'idée d'une dissymétrie de torsion, car un mobile qui tournerait autour de l'axe dans le sens des flèches inférieures, tout en avançant parallèlement à l'axe dans le sens des flèches supérieures, décrirait une hélice.

5. Superposition des causes de dissymétrie dans un même milieu.

Lorsque deux phénomènes de nature différente se superposent dans un même milieu, les dissymétries s'ajoutent. Si l'on superpose les causes de dissymétrie de deux des trois groupes (*b*), (*c*), (*d*), en faisant cependant coïncider les axes d'isotropie, on obtient le groupe (*e*), car l'axe d'isotropie sera le seul élément de symétrie commun aux deux groupes superposés. Or (*e*) possède les dissymétries réunies des trois groupes. Donc, en faisant coïncider, comme nous venons de le dire, les causes de dissymétrie de deux des trois groupes (*b*), (*c*), (*d*), on obtiendra la dissymétrie caractéristique du troisième groupe.

Supposons, par exemple, que nous superposions dans un corps *un champ électrique (c) et un champ magnétique (d) de même direction*, l'axe d'isotropie subsistera seul; la présence du champ électrique est incompatible avec l'existence d'un centre et d'un plan de symétrie normal à l'axe, et la présence du champ magnétique nécessite la disparition des plans de symétrie passant par l'axe. La symétrie est donc celle de (*e*) qui est un intergroupe de (*b*) : on aura donc la dissymétrie de torsion dans le corps. Prenons, par exemple, un fil de fer, aimantons-le dans le sens de sa longueur; puis faisons-le parcourir par un courant, le fil se tord (expérience de Wiedemann).

Il est peut-être possible de créer un milieu capable de donner la polarisation rotatoire des corps actifs en superposant dans un corps symétrique un champ électrique et un champ magnétique. Du moins, ceci ne serait pas en contradiction avec les conditions de symétrie. Dans le sens de l'axe, on pourrait avoir superposition d'un phénomène de polarisation rotatoire magnétique (c'est-à-dire changeant de sens avec le sens de la propagation de la lumière) et d'un phénomène de polarisation rotatoire ordinaire. Normalement à l'axe, on pourrait avoir un pur phénomène de polarisation rotatoire ordinaire. Un pareil milieu à symétrie énantiomorphe permettrait peut-être encore de réaliser certaines réactions chimiques dissymétriques, ou de séparer les corps droits et gauches dans une combinaison racémique, ou encore de faire déposer d'une solution sous une forme unique, les corps à molécules symétriques, comme le chlorate de

soude, qui se déposent ordinairement en cristaux dissymétriques droits et gauches mélangés.

Au contraire, un champ électrique ou un champ magnétique ne sauraient isolément provoquer une réaction dissymétrique, puisque ces phénomènes sont compatibles avec l'existence d'un plan de symétrie.

Supposons maintenant que nous superposions *une dissymétrie de torsion* (*b*) et *une dissymétrie magnétique* (*d*), on obtiendra encore la symétrie (*e*) qui est un intergroupe de la symétrie du champ électrique (*c*).

Prenons un fil de fer, aimantons-le et tordons-le. Au moment où la torsion se produit, une force électromotrice prend naissance dans le fil qui est parcouru par un courant s'il est placé dans un circuit fermé (expérience de Wiedemann).

Les conditions de symétrie nous montrent qu'il pourrait se faire qu'un corps à molécules dissymétriques (doué de pouvoir rotatoire ordinaire) se polarisât diélectriquement lorsqu'on le place dans un champ magnétique.

Enfin, supposons que nous superposions *une dissymétrie de torsion* (*b*) et *un champ électrique* (*c*), on aura de même la symétrie de (*e*) qui est un intergroupe de la symétrie magnétique. Un fil de fer parcouru par un courant s'aimante dans le sens de sa longueur quand on le tord (expérience de Wiedemann).

Les conditions de symétrie nous permettent d'imaginer qu'un corps à molécule dissymétrique se polarise peut-être magnétiquement lorsqu'on le place dans un champ électrique.

Phénomène de Hall

Superposons encore un champ électrique (*c*) et un champ magnétique (*d*) dans un même milieu, mais en orientant à angle droit l'un de l'autre la direction des deux champs. Dans ces conditions, le seul élément de symétrie commun aux deux champs est un plan de symétrie passant par la direction du champ électrique et normal au champ magnétique. On aura donc pour toute symétrie un plan *P* [groupe 4].

De part et d'autre du plan, les phénomènes devront être symétriques, mais, dans le plan, la symétrie n'indique plus aucune condition. Considérons, par exemple, trois axes rectangulaires et une lame métallique rectangulaire normale à un axe *Ox* qui passe par son centre de figure, ses côtés étant parallèles aux autres axes *Oy* et *Oz*. Si un courant parcourt la lame suivant l'axe des *z*, il ne saurait y avoir une force électromotrice

suivant l'axe des y , puisque le plan zOx est un plan de symétrie pour le courant et pour la lame. Si l'on n'a pas de courant, mais si l'on a, suivant l'axe des x , normalement à la lame, un champ magnétique, il ne peut pas non plus y avoir de courant suivant l'axe des y , puisque l'axe des x est un axe binaire pour le champ et pour la lame et, de plus, il y a un centre de symétrie. Si, maintenant, on a à la fois le champ magnétique suivant l'axe des x et le courant suivant l'axe des z , l'axe, le centre, le plan de symétrie disparaissent et rien ne s'oppose plus, au point de vue de la symétrie, à ce qu'une force électromotrice se montre suivant l'axe des y .

La théorie de la propagation de la chaleur et de l'électricité dans les corps cristallisés (Stokes, Thomson, Minnigerode, Boussinesq) montre que, pour certains cristaux, il y a lieu de tenir compte de certains coefficients dits *rotationnels*. Les cristaux en question sont ceux des familles (5) $\frac{L_q l_q}{P_q}$ et (6) $\frac{L_q l_q}{\pi_q}$ et de leurs intergroupes (1), (2), (3), (4). Ces cristaux possèdent au maximum un axe d'ordre q normal à un plan de symétrie direct ou alterne d'ordre q , q étant un nombre entier quelconque. Un corps polarisé magnétiquement possède la symétrie (d) $\frac{L_\infty l_\infty}{P_\infty}$, qui est un cas limite des groupes (5) et (6) pour $q = \infty$. Tous les cristaux qui, d'après la théorie, peuvent avoir des coefficients rotationnels ont pour type de symétrie un des intergroupes de la symétrie magnétique.

La théorie édifiée pour les corps cristallisés s'applique admirablement à la symétrie magnétique, et l'existence des coefficients rotationnels explique toutes les particularités du phénomène de Hall, sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir autre chose que la symétrie du champ dans la théorie de la conductibilité.

Si l'on fait arriver l'électricité par le centre d'un disque métallique placé normalement au champ magnétique et si cette électricité est recueillie uniformément sur les bords du disque, les lignes décrites par le flux électrique doivent être des spirales (Boltzmann)⁹.

⁹Ce qui est fort curieux, c'est que les cristaux pour lesquels la théorie de Stokes avait été faite se montrent réfractaires, et M. Soret a, sans succès, recherché les effets des coefficients rotationnels dans le gypse pour la conductibilité calorifique. Le phénomène de Hall a été seulement constaté avec des métaux et le gypse est un diélectrique. Les coefficients rotationnels se feraient peut-être sentir avec un corps métallique cristallisé présentant la dissymétrie nécessaire; mais je ne crois pas que l'on possède actuellement une substance convenable pour tenter l'expérience.

Pour la théorie de la conductibilité calorifique dans les cristaux, voir le récent

Phénomènes pyroélectriques et piézoélectriques.

Les cristaux pyroélectriques ont nécessairement la symétrie d'un intergroupe du champ électrique, puisque l'échauffement supposé uniforme n'amène par lui-même aucune dissymétrie. Les cristaux piézoélectriques sont plus nombreux que les cristaux pyroélectriques. Ils comprennent, en effet, tous ceux-ci, puis ils renferment des cristaux qui prennent seulement, sous l'influence des efforts mécaniques, une symétrie inférieure à celle d'un champ électrique. La blende par exemple (cristal tétraédrique) et le quartz ont des symétries qui ne sont pas des intergroupes du champ électrique. Le quartz a la symétrie $2L_3, 3(L_2L'_2)$, un axe principal ternaire doublé et trois axes binaires non doublés normaux à cet axe. En comprimant suivant un axe binaire par exemple, on ajoute la dissymétrie cylindrique (a) à celle du quartz; il ne reste plus comme éléments que (L_2, L'_2) , un axe binaire non doublé qui peut devenir une direction de polarité électrique.

On peut montrer de même qu'en comprimant dans la direction normale à la fois à un axe binaire et à un axe ternaire, on fera naître encore une polarité suivant l'axe binaire et que les coefficients qui interviennent pour caractériser ces deux modes de développement de la polarité sont égaux et de signes contraires. On peut ainsi prévoir certaines particularités du phénomène; mais ces conditions de symétrie ne sont pas les seules qui interviennent dans la théorie générale ¹⁰.

6. Liaisons entre symétries caractéristiques des divers milieux.

Nous avons supposé que la matière non cristallisée et non douée de pouvoir rotatoire n'apportait par elle-même aucune dissymétrie dans un système; nous avons fait implicitement la même supposition pour le milieu qui remplit les espaces vides de matière. Cette supposition bien naturelle, mais toute gratuite, est indispensable; elle montre bien que nous ne pouvons avoir notion de la symétrie absolue; nous devons choisir arbitrairement une symétrie pour un certain milieu et en déduire la symétrie des autres milieux. Cette symétrie relative est, du reste, la seule

article de M. Soret dans le *Journal de Physique*, 1893; t. II, 2^e sér., p. 241. Lord Kelvin a été le premier à remarquer que le phénomène de Hall donnait une démonstration de l'existence des termes rotationnels (W. Thomson, *Mathem. and Phys. Papers*, t. I, p. 281).

¹⁰La théorie générale complète des propriétés piézoélectriques des cristaux a été établie par Voigt (*All. Ges. der Wiss.*, Göttingen, 1890. — *Wied. Ann.*, t. XLV, p. 523; 1892).

qui nous intéresse. Si, par exemple, tout un système est animé d'une certaine vitesse et que nous considérons un certain corps A dans le système, il nous sera utile de connaître en général la symétrie du corps A par rapport au système, sans tenir compte de la dissymétrie commune créée par l'état de mouvement de tout le système.

Supposons que nous connaissions seulement en électricité les phénomènes généraux de l'électricité statique, de l'électricité dynamique, du magnétisme, de l'électromagnétisme et de l'induction, rien ne nous indiquerait exactement le type de symétrie qu'il convient d'attribuer au champ électrique et au champ magnétique. Nous pourrions, par exemple, choisir pour le champ magnétique la symétrie (*c*) (que nous avons attribuée plus haut au champ électrique) et, en raisonnant comme nous l'avons fait, nous serions conduits alors nécessairement à prendre pour symétrie du champ électrique le groupe (*d*) (que nous avons attribué plus haut au champ magnétique). Il n'y aurait aucune absurdité à un pareil système, ni aucune contradiction avec notre hypothèse initiale sur la symétrie complète de la matière.

Les phénomènes généraux de l'électricité et du magnétisme nous indiquent donc seulement *une liaison entre les symétries* du champ électrique et du champ magnétique, de telle sorte que, si l'on adopte (*c*) pour la symétrie de l'un, il faut admettre (*d*) pour la symétrie de l'autre, et réciproquement. Pour lever cette indétermination, il faut faire intervenir d'autres phénomènes, les phénomènes électrochimiques ou d'électricité de contact, les phénomènes pyro et piézoélectriques, ou encore le phénomène de Hall, ou celui de la polarisation rotatoire magnétique.

Les *dimensions* des grandeurs électriques et magnétiques nous présentent un exemple d'indétermination tout à fait comparable à celui que nous venons de citer pour la *symétrie* des milieux électriques et magnétiques. Les phénomènes généraux de l'électricité et du magnétisme sont de même incapables de lever cette indétermination : il faudrait, pour y parvenir, faire intervenir d'autres phénomènes, les phénomènes électrochimiques, par exemple ¹¹.

7. En résumé.

Les symétries caractéristiques des phénomènes ont un intérêt général incontestable. Au point de vue des applications, nous voyons que les

¹¹M. Abraham a déjà fait une tentative dans ce sens (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXVI, p. 1123 ; 1893).

conclusions que nous pouvons tirer des considérations relatives à la symétrie sont de deux sortes :

Les premières sont des conclusions fermes mais négatives, elles répondent à la proposition incontestablement vraie : *Il n'est pas d'effet sans causes*. Les effets, ce sont les phénomènes qui nécessitent toujours, pour se produire, une certaine dissymétrie. Si cette dissymétrie n'existe pas, le phénomène est impossible. Ceci nous empêche souvent de nous égarer à la recherche de phénomènes irréalisables.

Les considérations sur la symétrie nous permettent encore d'énoncer une deuxième sorte de conclusions, celles-ci de nature positive, mais qui n'offrent pas la même certitude dans les résultats que celles de nature négative. Elles répondent à la proposition : *Il n'est pas de cause sans effets*. Les effets, ce sont les phénomènes qui peuvent naître dans un milieu possédant une certaine dissymétrie ; on a là des indications précieuses pour la découverte de nouveaux phénomènes ; mais les prévisions ne sont pas des prévisions précises comme celles de la Thermodynamique. On n'a aucune idée de l'ordre de grandeur des phénomènes prévus : on n'a même qu'une idée imparfaite de leur nature exacte. Cette dernière remarque montre qu'il faut se garder de tirer une conclusion absolue d'une expérience négative.

Considérons, par exemple, un cristal de tourmaline qui possède une symétrie qui est un intergroupe de la symétrie du champ électrique. On en conclut que le cristal est peut-être polarisé électriquement. Plaçons le cristal dans un champ électrique, l'axe orienté à 90deg du champ ; la polarisation ne se montre en aucune sorte, on n'a pas de couple appréciable agissant sur le cristal, et l'on serait porté à penser que le cristal n'est pas polarisé ou que, si la polarisation existe, elle est plus petite que celle que l'on pourrait évaluer. Cependant la polarisation existe et, pour la faire apparaître, il faut modifier l'expérience, échauffer le cristal uniformément, par exemple, ce qui ne change cependant rien à sa symétrie.