PHYSIQUE. — *Les quanta, la théorie cinétique des gaz et le principe de Fermat.* Note de M. **Louis de Broglie.**

I. Planck et Nernst ont montré que l'idée de quantum devait être introduite dans la théorie cinétique des gaz, en vue de calculer les constantes d'entropie et les constantes chimiques dont l'importance est si grande en thermodynamique. Dans ce but, Planck a été amené à choisir un élément d'extension en phase égal

$$\frac{1}{h^3}\,dx\,dy\,dz\,dp\,dq\,dr = \frac{4\pi}{h^3}\,m_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{2w}\,dw\,dx\,dy\,dz,$$

où x, y, z, p, q, r sont les coordonnées et les quantités de mouvement de l'atome, m_0 sa masse propre, w son énergie cinétique, h la constante d'action. Nous sommes aujourd'hui en mesure de justifier cette hypothèse.

Chaque atome de vitesse βc peut être considéré comme lié à un groupe d'ondes dont les vitesses de phase sont $V = \frac{c}{\beta}$, les fréquences $\frac{1}{h}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, et la vitesse de groupe $U = \beta c$. L'état du gaz ne pourra donc être stable que si les ondes correspondant à tous les atomes forment un système d'ondes stationnaires; suivant une méthode connue donnée par Jeans, on trouve pour le nombre des ondes stationnaires contenues dans l'unité de volume et dont les fréquences sont comprises entre ν et $\nu + d\nu$:

$$n_\nu\,d\nu = \frac{4\pi}{UV^2}\,\nu^2\,d\nu = \frac{4\pi}{c^3}\,\beta\nu^2\,d\nu.$$

Les quantités ν et w sont reliées par la relation

$$h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = w + m_0 c^2 = m_0 c^2(1+\alpha) \qquad \left(\alpha = \frac{w}{m_0 c^2}\right),$$

d'où

$$n_\nu\,d\nu = \frac{4\pi}{h^3}\,m_0^2\,c(1+\alpha)\sqrt{\alpha(\alpha+2)}\,dw.$$

Chaque onde peut transporter zéro, un, deux ou plusieurs atomes, de telle sorte que, d'après la loi de distribution canonique, le nombre des atomes d'énergie totale $h\nu$ dans l'élément de volume est

$$\text{const.}\,\frac{4\pi}{h^3}\,m_0^2\,c(1+\alpha)\sqrt{\alpha(\alpha+2)}\,dw\,dx\,dy\,dz\,\frac{\sum_1^\infty n\,e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_0^\infty e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}.$$

Considérons d'abord un gaz matériel dont les atomes ont une masse relativement grande et, par suite, des vitesses relativement petites. Nous pouvons négliger tous les termes de la série, excepté le premier, et poser

$$1+\alpha=1.$$

Le nombre d'atomes d'énergie cinétique w est donc

$$\text{const.}\,\frac{4\pi}{h^3}\,m_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{2w}\,dw\,dx\,dy\,dz\,e^{-\frac{w}{kT}},$$

résultat qui justifie la méthode de Planck et conduit à la forme usuelle de la loi de Maxwell.

Dans le cas d'un gaz formé d'atomes de lumière, α est toujours grand et nous devons employer toute la série. En raison de la symétrie binaire interne imposée par l'analogie ondulatoire, nous devons introduire un facteur 2 et la méthode esquissée dans notre article du *Journal de Physique* de novembre 1922 conduit à la loi de Planck pour la densité d'énergie :

$$\rho_\nu\,d\nu=\frac{8\pi h}{c^3}\,\nu^3\sum_1^\infty e^{-n\frac{h\nu}{kT}}\,d\nu=\frac{8\pi h}{c^3}\,\nu^3\,\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\,d\nu.$$

II. Cherchons à préciser les idées exposées dans nos Notes précédentes. Si, dans un certain milieu, un corps décrit une trajectoire courbe, nous disons qu'il y existe un champ de force et en chaque point le principe de l'énergie permet de déduire la vitesse du corps de la valeur constante de son énergie totale. Pour assurer l'accord de phase entre l'onde et le mobile, on est conduit à supposer que l'onde de phase d'un mobile d'énergie totale donnée a en chaque point une fréquence et une vitesse fixée par la valeur qu'aurait la vitesse du corps s'il se trouvait en ce point. Sans doute, une théorie électromagnétique élargie nous donnera le mécanisme de cette propagation complexe. Il semble que nous connaissions par avance sa conclusion principale : « Les rayons des ondes de phase coïncident avec les trajectoires dynamiquement possibles. » En effet, les rayons se calculeront comme dans un milieu de dispersion variable par le principe de Fermat, qui s'écrit ici

$$\delta \int \frac{\nu \, ds}{V} = \delta \int \frac{m_0 \beta c}{h\sqrt{1-\beta^2}} ds = 0,$$

alors que le principe de moindre action sous la forme Maupertuisienne détermine les trajectoires par l'équation

$$\delta \int m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \sqrt{1-\beta^2} \right) dt = \delta \int \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} ds = 0.$$

Le lien fondamental qui unit les deux grands principes de l'Optique géométrique et de la Dynamique est mis ainsi en pleine lumière. Parmi les trajectoires dynamiquement possibles, certaines jouiront de la propriété particulière d'être en résonance avec l'onde de phase; ce sont les trajectoires stables de Bohr pour lesquelles $\int \frac{\nu ds}{V}$ est un nombre entier.

Remarquons que l'intégrale de Fermat fait intervenir le produit d'une fréquence par un temps et l'action ne s'introduit que par suite de la proportionnalité de l'énergie et de la fréquence. Cette proportionnalité reste un postulat dont le sens physique n'est pas éclairci; elle constitue sans doute un des aspects de la liaison de l'espace et du temps et, comme notre expérience usuelle nous a habitué à dissocier ces deux notions, elle garde un caractère très peu intuitif.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 177, p. 630, séance du 8 octobre 1923.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
71360-23 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.