SUR LE PARALLÉLISME
ENTRE
LA DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL
ET L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

PAR

M. L. DE BROGLIE

EXTRAIT DE
« LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM »
JANVIER 1926, SÉRIE VI, T. VII, N° 1, pp. 1-6

SUR LE PARALLÉLISME ENTRE LA DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL ET L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

par M. L. DE BROGLIE.

Sommaire. — En associant au mouvement d'un point matériel la propagation d'une onde, on peut relier l'énergie et la quantité de mouvement du point à la fréquence et à la vitesse de phase de l'onde de telle façon que les équations usuelles de la dynamique dérivent d'une formule de dispersion.

La théorie corpusculaire de la lumière se heurte à des difficultés quand elle étudie la propagation dans les milieux réfringents; l'une de ces difficultés, dont l'importance historique est grande, a trait à une prétendue contradiction entre le principe de moindre action et la loi de Fermat. En faisant découler la dynamique de la théorie des ondes, on peut envisager la question sous un aspect nouveau et écarter certaines objections.

I. Notions classiques. — Le but de cet exposé est de montrer comment les idées que j'ai développées récemment sur les quanta permettent de préciser le parallélisme depuis si longtemps signalé entre la dynamique du point matériel et l'optique géométrique.

Commençons par rappeler quelques grandes lois de la théorie des ondes *sans supposer qu'il s'agisse spécialement d'ondes lumineuses*.

Je donnerai d'abord la définition générale suivante : On dit qu'un phénomène physique se propage par ondes sinusoïdales simples si, dans sa définition mathématique, intervient une fonction sinusoïdale de coordonnées d'espace et de temps dite la phase et jouissant des deux propriétés suivantes : 1° En un point de l'espace, elle possède une période T et une fréquence $\nu = \frac{1}{T}$. 2° Les différentes valeurs de la phase se déplacent dans l'espace le long de certaines lignes dites « rayons de l'onde » avec une vitesse V qui, en général, est fonction des coordonnées d'espace et de temps ainsi que de la fréquence ; cette vitesse V peut aussi dépendre de la direction du rayon que l'on envisage en un point donné.

Pour simplifier, dans tout ce qui suit, je supposerai le milieu isotrope et dans un état permanent. Dans ce cas, les rayons de l'onde auront une forme invariable et la vitesse V de la phase sera seulement fonction des coordonnées d'espace et de la fréquence. Nous exprimerons cette relation par l'équation :

$$n = \frac{c}{V} = \varphi\,(x, y, z, \nu),$$

c étant la constante classique des équations de Maxwell. Cette équation définit l'indice de réfraction n.

A côté de la vitesse V, nous introduirons une grandeur dite « vitesse de groupe ». Elle se définit en supposant que l'on a affaire non pas à une onde sinusoïdale simple, mais à un groupe d'ondes sinusoïdales simples de fréquences très voisines comprises dans un petit intervalle $\nu - \delta\nu$, $\nu + \delta\nu$. En raison de la variation de l'indice avec la fréquence, les points où les diverses ondes simples sont en concordance de phase se déplacent avec une vitesse U généralement différente de V et un raisonnement connu donne :

$$U = \frac{\partial \nu}{\partial\left(\frac{\nu}{V}\right)} = c\,\frac{\partial \nu}{\partial (n\nu)}.$$

L'étude des ondes électromagnétiques faite en suivant les conceptions classiques montre que l'énergie transportée par une de ces ondes se déplace en général avec la vitesse du groupe toujours inférieure ou au plus égale à la constante c.

La connaissance de la fréquence et de la fonction qui détermine les valeurs de l'indice suffit pour calculer les déplacements de l'onde. Un principe qui, en optique, porte le nom du grand physicien et mathématicien français Fermat, nous apprend, en effet, que si un rayon passe par deux points donnés A et B, le temps mis par la phase pour aller de A à B est minimum, autrement dit ; si la phase suivait un chemin légèrement différent du rayon réel, elle mettrait plus de temps pour aller de A en B. Nous devons donc écrire :

$$\delta \int_A^B \frac{dl}{V} = \frac{1}{c}\, \delta \int_A^B n\, dl = 0$$

et, n étant connu en fonction de x, y, z, le chemin suivi par l'onde est ainsi déterminé.

Avant d'en arriver à mes idées personnelles, examinons deux problèmes de propagation d'ondes qui jouent un grand rôle en optique géométrique.

a) passage d'une onde d'un milieu d'indice uniforme n_1, à un milieu d'indice uniforme n_2.

La solution est bien connue. Le rayon qui va du point A du premier milieu au point B du second se compose de deux lignes droites se raccordant en un point M de la surface de séparation tel que l'on ait (loi de Descartes)

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$

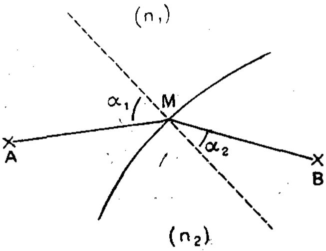

Fig. 1.

b) Forme des rayons dans une sphère réfringente dont l'indice est seulement fonction de la distance au centre et de la fréquence.

En optique, ce problème est appelé « problème de la réfraction astronomique ». La forme des rayons est donnée par une équation, due à Bouguer, qui se déduit du principe du

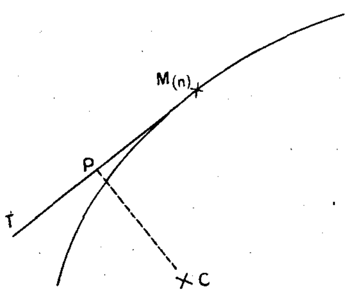

Fig. 2.

temps minimun. Si M est un point quelconque situé sur le rayon cherché et si MT est la tangente au rayon en ce point, le produit de l'indice au point M par la distance du centre de la sphère à la tangente MT a une valeur constante tout le long du rayon :

$$np = C^{te}.$$

2. **Hypothèses nouvelles.** — Jusqu'ici je me suis borné à des considérations d'un ordre classique sur les ondes et sur leurs rayons. Je vais maintenant introduire une hypothèse qui caractérise mon interprétation des quanta. Je supposerai qu'il y a lieu d'admettre, dans une onde, l'existence de points de concentration de l'énergie, de corpuscules de très petites dimensions dont le mouvement est si intimement lié au déplacement de l'onde que la connaissance des lois régissant l'un de ces déplacements est équivalente à celle des lois régissant l'autre.

Inversement, je supposerai qu'au mouvement de tous les genres de corpuscules dont l'expérience nous a révélé l'existence, il y a lieu d'associer une propagation d'ondes.

Je me placerai du reste aujourd'hui à un point de vue un peu différent de ceux que j'ai développés jusqu'ici, *car je prendrai comme bases les lois de la propagation des ondes et je chercherai à en déduire, comme conséquences valables seulement dans certains cas, les lois de la dynamique du point matériel.*

J'admets donc le principe du temps minimum, conséquence directe des conceptions ondulatoires, et je suppose connue la relation qui donne, en chaque point et pour chaque fréquence, la valeur de l'indice n. Le mouvement de l'onde étant ainsi déterminé, pour en déduire celui d'un corpuscule associé, il suffit de connaître les expressions qui donnent en chaque point son énergie W et sa quantité de mouvement $\vec{g}$ en fonction de n et de ν. Pour des raisons exposées dans ma thèse, il y une hypothèse qui s'impose absolument, c'est de poser :

$$W = h\nu, \qquad g = \frac{h\nu}{V} = \frac{h}{c}(n\nu),$$

le vecteur $\vec{g}$ étant tangent au rayon de l'onde le long duquel se propage la phase au point considéré. Dans ces conditions, le corpuscule suivra le rayon déterminé par le principe du temps minimum $\delta\int n\,dl = 0$ et sa trajectoire sera bien celle que la dynamique prévoit par application du principe de Maupertuis $\delta\int g\,dl = 0$

Nous supposerons que la vitesse du mobile est égale à la vitesse de groupe des ondes le long du rayon et nous écrirons :

$$v = \beta c = U = c\frac{\partial\nu}{\partial(n\nu)} = \frac{\partial W}{\partial g}.$$

Nous sommes ainsi toujours d'accord avec la mécanique car, d'après les équations de Hamilton, la vitesse est la dérivée partielle de l'énergie par rapport à la quantité de mouvement. Les hypothèses précédentes entraînent la forme usuelle de l'équation fondamentale de la dynamique, car on a :

$$\frac{dg}{dt} = \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)_W . v = c\frac{\partial\nu}{\partial(n\nu)} . \frac{h}{c}\frac{\partial(n\nu)}{\partial l} = h\frac{\dfrac{\partial(n\nu)}{\partial l}}{\dfrac{\partial(n\nu)}{\partial\nu}} = -h\frac{\partial\nu}{\partial l} = -\frac{\partial W}{\partial l} = F.$$

3. **Dynamique du point.** — Nous avons ainsi établi un lien étroit entre la propagation de l'onde et la dynamique du corpuscule associé. Voyons maintenant si on peut en déduire les relations particulières que la dynamique postule entre la vitesse et la masse d'une part, l'énergie et la quantité de mouvement d'autre part.

Pour cela, il nous faut, dans chaque cas, préciser la forme que prend l'équation de dispersion $n = \varphi(x, y, z, \nu)$. Etudions d'abord la propagation d'un type donné d'ondes dans le vide à grande distance de toute autre matière. Le principe de relativité nous impose la forme de la fonction φ :

$$n = \sqrt{1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}},$$

où ν_0 est un invariant ayant même valeur pour tous les systèmes galiléens et caractéristiques de la nature ntrinsèque de l'onde. Un corpuscule lié à l'onde de la façon précisée tout à l'heure aura pour vitesse :

$$v = \beta c = c \frac{\partial \nu}{\partial (n\nu)} = nc.$$

Donc, *dans ce cas*, $n = \beta$ et par suite $V = \frac{c}{n} = \frac{c}{\beta}$, résultat que j'ai démontré de bien d'autres façons ; l'énergie et la quantité de mouvement sont égales à

$$W = h\nu = \frac{h\nu_0}{\sqrt{1 - n^2}} = \frac{h\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad g = \frac{h}{c}(n\nu) = \frac{W}{c^2} v.$$

Ces formes peuvent s'identifier avec celles de la dynamique d'Einstein en posant :

$$h\nu_o = m_o c^2,$$

relation qui définit la masse propre m_o du corpuscule en fonction de l'invariant ν_o. Si l'onde considérée est une onde lumineuse, l'invariant ν_o et par suite la masse propre m_o doivent être choisis extraordinairement petits ; peut-être même, pour éviter une objection que M. Langevin a bien voulu me signaler, vaut-t-il mieux poser franchement $\nu_o = m_o = 0$. En tout cas, la vitesse du corpuscule doit être extraordinairement voisine de la constante c, sinon lui être égale, et la dynamique de l'atome de lumière apparaît comme une limite de la dynamique du point matériel de masse finie. En particulier, il est facile de montrer que ce point de vue permet l'explication complète des divers effets Doppler.

Quittons maintenant le cas du vide et considérons un milieu à symétrie sphérique dans lequel l'indice varie avec la distance r au centre suivant la loi

$$n^2 = \left(1 - \frac{F(r)}{\nu}\right)^2 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}.$$

La vitesse d'un corpuscule associé est ici trouvée égale à :

$$v = \frac{nc}{1 - \frac{F(r)}{\nu}} = \beta c.$$

L'énergie et la quantité de mouvement sont :

$$W = \frac{h\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} + hF(r); \qquad g = \frac{W - hF(r)}{c^2} v.$$

En posant encore $h\nu_o = m_o c^2$ et en identifiant le produit $h\,F(r)$ avec ce que la dynamique appelle l'énergie potentielle, on voit que le mouvement du corpuscule est celui d'un point matériel sous l'action d'une force centrale. Les trajectoires du mobile pourront se déterminer par l'équation de Bouguer : $np = C^{te}$. Puisque $g = \frac{h}{c}(n\nu)$, cette équation s'écrit aussi :

$$g.p. = C^{te},$$

et c'est l'équation des aires qui nous apparaît ainsi comme un cas particulier de celle de Bouguer.

L'application la plus intéressante de ce qui précède est l'étude de l'atome d'hydrogène conçu par Bohr. Il nous apparaît maintenant comme une sphère réfringente qui, pour les ondes accompagnant le mouvement d'un électron de charge $-e$, présente un indice variable suivant la loi écrite plus haut où l'on pose

$$F(r) = -\frac{eE}{hr},$$

E étant la charge du noyau. Les rayons fermés sur eux-mêmes coïncident avec les trajectoires possibles de l'électron et certains possèdent la propriété très remarquable d'être en résonance avec l'onde. Ce sont précisément ces rayons-là qui sont les trajectoires « stables » de Bohr.

Remarquons en passant que la sphère réfringente « atome de Bohr » présente le phénomène du mirage.

4. **Dispersion optique.** — Pour terminer, considérons le cas d'un milieu matériel homogène dans lequel l'indice ne dépend pas du point envisagé, mais est une fonction quelconque de la fréquence. On pourra, comme dans le cas du vide, définir la masse propre du corpuscule associé par l'équation invariante :

$$m_0 = \frac{h}{c^2} \nu \sqrt{1 - n^2},$$

mais m_0 sera imaginaire lorsque n dépassera l'unité. L'énergie aura pour valeur $\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-n^2}}$, mais elle ne prendra la forme dynamique $\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ que si $n = \beta$ ou, d'après nos définitions générales, si $n = \dfrac{d\nu}{d(n\nu)}$. Cette équation a pour intégrale générale $n = \sqrt{1 + \dfrac{A}{\nu^2}}$. Si la constante A est négative, on retrouve une dynamique analogue à celle du point matériel dans le vide. Si A est positif, la masse est imaginaire et la vitesse de phase inférieure à c (1).

Appliquons ces considérations au quantum de lumière traversant un milieu dont la dispersion obéit à la relation :

$$n^2 = 1 + \Sigma_i \frac{\varepsilon_i}{\nu_i^2 - \nu^2},$$

valable seulement en dehors des régions d'absorption. Les ν_i sont les fréquences propres du milieu dispersif et les ε_i en sont des constantes caractéristiques. Du côté rouge de chaque fréquence ν_i, la masse propre est imaginaire et la vitesse de phase plus petite que c; du côté violet, la masse propre est réelle et la vitesse de phase supérieure à c. Enfin, pour les fréquences très supérieures à tous les ν_i, la dispersion s'exprime par l'équation :

$$n^2 = 1 - \frac{\Sigma_i \varepsilon_i}{\nu^2};$$

et la dynamique du quantum devient analogue à celle du point matériel dans le vide avec la différence essentielle que sa masse propre est déterminée par les propriétés du milieu traversé.

5. **Examen d'un raisonnement classique.** — Les partisans de la théorie de Fresnel ont fait à la théorie de l'émission une objection qui lui fut fatale. « Considérons, disaient ces physiciens, le trajet de la lumière entre un point A situé dans un milieu d'indice uniforme n, et un point B situé dans un milieu d'indice uniforme n_2. Ce trajet est formée de deux droites se raccordant en un point de la surface de séparation (voir fig. 1). Le principe de Fermat donne (nous l'avons vu) :

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$

Au contraire, la théorie corpusculaire doit partir du principe de Maupertuis $\delta \displaystyle\int_A^B g\, dl = 0$. Puisque g est le produit de la masse constante du corpuscule de lumière par la vitesse, on aura $\delta \displaystyle\int_A^B v\, dl$; d'où l'on tire :

$$n_1 \sin \alpha_2 = n_2 \sin \alpha_1.$$

(1) La vitesse de l'énergie serait alors supérieure à c; ce cas ne peut donc pas pas se trouver physiquement réalisé.

Laquelle des deux formules est exacte? Si le milieu 1 est l'air ou le vide d'indice unité, le milieu 2 l'eau, l'expérience prouve que $\alpha_1 > \alpha_2$. Donc, pour la théorie ondulatoire $n_2 > 1$ et la phase se propage moins vite dans l'eau que dans l'air. Pour la théorie de l'émission, au contraire, la conclusion est inverse. Or l'expérience s'est prononcée dans le premier sens : la théorie corpusculaire est erronée ». Aujourd'hui, le raisonnement précédent est en défaut parce que nous connaissons la variation de la masse avec la vitesse ; néanmoins, il pourrait sembler possible, au premier abord, de le remettre sur pied. En effet, le point matériel libre a, d'après Einstein, une quantité de mouvement égale à $\frac{W}{c^2}v$, W étant son énergie. Or le passage d'un milieu à l'autre ne peut faire varier cette énergie : pour moi, en particulier, cette conclusion s'impose, puisqu'un changement d'énergie s'accompagnerait d'un changement de fréquence. Donc, la masse W/c^2 du corpuscule en mouvement ne varie pas non plus et l'on doit bien écrire

$$\delta \int_A^B v\,\mathrm{d}l = 0.$$

L'objection paraît subsister.

On y échappe pourtant en adoptant le point de vue développé ici suivant lequel les équations de la dynamique se déduisent dans certains cas particuliers de la théorie des ondes. Il faut, en effet, à mon sens, en revenir toujours à la définition de g :

$$g = \frac{h}{c}(n\nu) = \frac{W}{c^2} \cdot nc.$$

La quantité de mouvement n'est donc égale à $\frac{W}{c^2} \cdot v$ que si

$$n = \beta = \sqrt{1 + \frac{A}{\nu^2}},$$

et cette condition n'est pas, en général, réalisée pour les milieux réfringents dans les conditions usuelles.

La seule forme correcte et générale du principe de Maupertuis est donc :

$$\delta \int_A^B \frac{h\nu}{c} n\,\mathrm{d}l = 0.$$

Il ne peut être en contradiction avec l'optique ondulatoire puisqu'il est identique au principe de Fermat.

Manuscrit reçu le 1er juillet 1925.

Note à la correction :

En supposant que le quantum de lumière possède dans un milieu réfringent une énergie potentielle P, on est évidemment conduit à écrire :

$$g = \frac{h\nu - P}{c^2} v = \frac{h\nu}{V}$$

d'où l'on tire .

$$P = h\nu\left(1 - n\frac{\mathrm{d}(n\nu)}{\mathrm{d}\nu}\right) = h\nu\left[1 - \frac{\mathrm{d}(n^2\nu^2)}{\mathrm{d}(\nu^2)}\right].$$

S'il existe dans le milieu une seule fréquence critique ν_i, la formule de Lorentz donne, en dehors des zones d'absorption,

$$P = -h\nu\frac{\varepsilon_i \nu_i^2}{(\nu_i^2 - \nu^2)^2} < 0.$$

Tout se passe donc comme si les molécules du milieu *attiraient* le quantum, et cela d'autant plus fortement que l'on se trouve plus près de la résonance.

PARIS. — SOC. GÉN. D'IMPRIMERIE ET D'ÉDITION, 17, RUE CASSETTE