

LES PRINCIPES

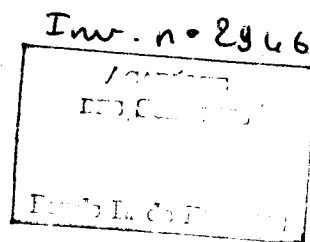
DE LA



NOUVELLE MÉCANIQUE ONDULATOIRE

PAR

M. Louis de BROGLIE



EXTRAIT DE

« LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM »

NOVEMBRE 1926, SÉRIE VI, T. VII, N° 11, pp. 321-337.

LES PRINCIPES DE LA NOUVELLE MÉCANIQUE ONDULATOIRE,

par M. LOUIS DE BROGLIE.

Sommaire. — Le but du mémoire est d'exposer les principes généraux de la nouvelle conception ondulatoire de la mécanique suggérée par l'auteur et confirmée par les récents travaux de Schrödinger. L'auteur a cherché d'abord à montrer, dans le cas particulier des champs constants, comment les résultats de Schrödinger prolongent et complètent les siens; puis il examine si les mêmes idées peuvent être étendues aux champs variables et à la dynamique des systèmes. Résumant enfin la manière dont Schrödinger a pu ramener la mécanique quantique d'Heisenberg, Born et Jordan à la nouvelle mécanique ondulatoire, il indique rapidement, en terminant, les problèmes que pose le raccord de la théorie électromagnétique avec l'ensemble de ces conceptions.

I. — DYNAMIQUE ONDULATOIRE DU POINT MATÉRIEL DANS UN CHAMP CONSTANT.

1. But de l'exposé. — Sous la pression des résultats expérimentaux, les physiciens ont été obligés d'admettre que la dynamique ancienne, même élargie par les conceptions relativistes, ne pouvait interpréter les phénomènes où interviennent les quanta. Il paraît aujourd'hui nécessaire de créer une mécanique nouvelle se rattachant étroitement à la théorie des ondes. C'est la tentative que j'ai poursuivie depuis quelques années ⁽¹⁾ et que de beaux travaux récents de M. Schrödinger ⁽²⁾ ont complétée et élargie. Je vais chercher à résumer dans ses grandes lignes l'état actuel de la question.

Dans ce qui suit, je ne considérerai d'abord que le mouvement d'un point matériel dans un champ constant, réservant pour le troisième paragraphe l'extension des mêmes idées au cas des champs variables et des systèmes de points matériels.

2. Rappel de quelques notions de la théorie des ondes. — Envisageons une région de l'espace dont les propriétés ne dépendent pas du temps. On dit qu'un phénomène s'y propage par ondes si la fonction $u(x, y, z, t)$ qui le représente satisfait à l'équation fondamentale :

$$\Delta u = \frac{1}{V^2} \frac{\partial u^2}{\partial t^2}. \quad (1)$$

V est une grandeur dite « vitesse de propagation » qui varie d'un point à un autre mais ne dépend pas du temps. Remarquons que V peut être imaginaire ($V^2 < 0$). On désigne souvent sous le nom d'indice de réfraction le quotient n de la vitesse c de propagation de la lumière dans le vide par la vitesse V . Il revient évidemment au même de se donner V ou de se donner n en fonction des coordonnées.

Pour interpréter les faits expérimentaux, les physiciens ont été amenés à considérer surtout le type suivant de solution de l'équation (1) :

$$u(x, y, z, t) = A(x, y, z) \cos 2\pi\nu [t - \Psi(x, y, z)] \quad (2)$$

où ν est une constante appelée la fréquence de l'onde, et A , une fonction représentant son

⁽¹⁾ Voir notamment *Thèse de doctorat*, Masson, 1924, et *J. Phys.*, t. 7 (1926), 1-6.

⁽²⁾ *Ann. der Phys.*, t. 79 (1926), 351, 489 et 734. Je désignerai ces trois mémoires par les lettres A, B, C.

amplitude en chaque point ; l'argument du cosinus est la « phase » de l'onde. On peut aussi considérer cette solution comme étant la partie réelle de l'expression :

$$u(x, y, z, t) = C e^{2\pi i \varphi} e^{2\pi i z}, \quad (3)$$

C étant une constante, et φ , une fonction, en général imaginaire, de x, y, z . Si $\varphi = a + ib$, on voit de suite que l'on a :

$$\Psi = -\frac{a}{v} \quad A = C e^{-2\pi b}. \quad (4)$$

Quand on se borne à considérer les solutions sinusoïdales du type (2), l'équation des ondes prend la forme simple où le temps ne figure plus :

$$\Delta u + \frac{4\pi^2 v^2}{V^2} u = \Delta u + \frac{4\pi^2 v^2}{c^2} n^2 u = 0. \quad (5)$$

La phase d'une onde sinusoïdale est la même à un instant donné sur chaque surface de la famille :

$$\Psi(x, y, z) = C^{te}. \quad (6)$$

Ce sont les surfaces équiphases et, quand le temps varie, les valeurs de la phase progressent dans l'espace en passant de l'une à l'autre de ces surfaces. Les courbes orthogonales aux surfaces $\Psi = C^{te}$ sont, par définition, nommées les rayons de l'onde et nous appellerons « vitesse de la phase » la vitesse avec laquelle il faut, en chaque point, cheminer le long du rayon pour accompagner une valeur donnée de la phase. Si dr désigne l'élément de longueur compté sur le rayon, on trouve aisément, pour la vitesse de la phase :

$$v = \frac{1}{\partial \Psi / \partial r} = \left[\sum_{xyz} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (7)$$

3. L'optique géométrique. — Nous arrivons maintenant à une question importante : Existe-t-il une relation simple entre les deux vitesses V et v des équations (1) et (7) ?

Pour le voir, nous prendrons la solution sinusoïdale sous la forme (3) et nous l'introduirons dans (5). Il vient :

$$-4\pi^2 \sum_{xyz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2\pi i \Delta \varphi + \frac{4\pi^2 v^2}{V^2} = 0. \quad (8)$$

Si les dérivées secondes de φ sont très petites devant la somme des carrés des dérivées premières, la fonction $\varphi(x, y, z)$ obéira approximativement à la relation :

$$\sum_{xyz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (9)$$

en posant, par définition,

$$\lambda = \frac{V}{v}. \quad (10)$$

Si, de plus, V est réel, φ l'est également et l'on a, par (9), (4) et (7) :

$$\Psi = -\frac{\varphi}{v}, \quad \sum_{xyz} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{v^2} = \frac{1}{V^2}. \quad (11)$$

Les vitesses V et v peuvent alors être considérées comme égales, et la solution approximative obtenue s'écrit :

$$u(x, y, z, t) = C \cos 2\pi v \left[t - \int \frac{dr}{V} \right], \quad (12)$$

où l'intégrale est prise le long du rayon passant par le point M, de coordonnées x, y, z , depuis une surface équiphase choisie comme origine jusqu'en M.

On peut donc, lorsque l'équation (9) est valide, employer les procédés de l'optique géométrique pour l'étude des ondes. Rappelons brièvement quelques-uns de ces procédés. Connaissant une surface équiphase, on en construira deux autres infiniment voisines en décrivant autour de chaque point M de la surface donnée, une sphère de rayon $\varepsilon V(M)$, où ε est une constante très petite, et en prenant l'enveloppe à double nappe de ces sphérules; les surfaces ainsi obtenues sont, en effet, celles sur lesquelles, aux temps $t - \varepsilon$ et $t + \varepsilon$, se trouve la valeur de la phase qui, au temps t , est réalisée sur la surface donnée. De proche en proche, on construit aussi l'ensemble des surfaces équiphases et, du même coup, les rayons se trouvent déterminés comme limites de lignes infiniment brisées. On dit alors qu'on a déterminé les surfaces de phases par la méthode des ondes enveloppes.

L'optique géométrique repose sur un postulat de base dit « principe de Fermat ». D'après ce principe, tout rayon passant par deux points A et B de l'espace est tel que l'intégrale curviligne

$$\int_A^B \frac{dr}{V}$$

soit minimum :

$$\delta \int_A^B \frac{dr}{V} = 0. \quad (13)$$

Dans le langage de la théorie des ondes, on peut dire que le temps mis par la phase pour aller de A à B est minimum le long du rayon. La construction des ondes enveloppes rend presque évidente la proposition de Fermat qui, aux yeux des disciples de Fresnel, est ainsi descendue du rang de postulat au rang de théorème valable sous les mêmes conditions que l'équation (9).

4. Limites d'application de l'optique géométrique. — Les procédés de l'optique géométrique sont applicables lorsque l'équation (9) est valable et nous avons vu que, pour cela, les dérivées secondes de φ doivent être petites devant la somme des carrés des dérivées premières.

Chaque fois qu'en appliquant les procédés de l'optique géométrique, on parvient à une fonction φ ne satisfaisant pas à cette condition, on est certain de faire fausse route.

Nous appellerons longueur d'onde la quantité λ définie par (10). Il faut exprimer que les dérivées secondes de φ sont petites par rapport à $1/\lambda^2$. Dans une direction l qui fait, au point considéré, l'angle θ avec la direction du rayon, on a, par (10) et (11),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = -v \frac{\partial \Psi}{\partial l} = -\frac{v \cos \theta}{V}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial l^2} = \frac{v \cos \theta}{V^2} \frac{\partial V}{\partial l} = \frac{1}{\lambda} \frac{\cos \theta}{V} \frac{\partial V}{\partial l},$$

et l'on doit avoir, quel que soit θ :

$$\cos \theta \cdot \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial l} \cdot \lambda \ll 1. \quad (14)$$

D'où nous concluons : les procédés de l'optique géométrique sont justifiés si la variation relative de la fonction V sur une longueur de l'ordre de λ est très petite.

En particulier, si l'optique géométrique conduit à prévoir un rayon courbe contenu dans un domaine dont les dimensions sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, on peut être certain que la méthode utilisée pour parvenir à ce résultat était incorrecte, l'équation (9) ne pouvant être valable.

5. Groupe d'ondes. — On peut imaginer que la fonction V dépende non seulement des coordonnées mais aussi de la fréquence, considérée comme paramètre variable; on dit alors qu'il y a dispersion. Cette circonstance se présente notamment quand la fonction u doit, en réalité, satisfaire l'équation de propagation :

$$\Delta u = pu + q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (15)$$

où p et q sont des fonctions réelles des coordonnées, car, pour les solutions sinusoïdales, cette équation est équivalente à (1) si l'on pose :

$$V = \left(q - \frac{p}{4\pi_2 v^2} \right)^{-1,2}. \quad (16)$$

Imaginons maintenant un ensemble d'ondes de fréquences très voisines se propageant dans ces conditions, en supposant qu'on puisse s'en tenir à l'optique géométrique.

Les vitesses de propagation n'étant pas tout à fait les mêmes, l'amplitude résultante se propage le long des rayons avec une vitesse U différente de V . C'est la « vitesse du groupe » dont la valeur, d'après un raisonnement classique, est :

$$U = \left(\frac{\partial (v/V)}{\partial v} \right)^{-1}. \quad (17)$$

6. La mécanique ondulatoire. — Par opposition à la nouvelle mécanique ondulatoire, je nommerai « anciennes mécaniques » ou « mécaniques géométriques » : 1° la mécanique classique de Newton, 2° la mécanique de relativité. Je considère la seconde comme constituant un progrès sur la première ; on sait d'ailleurs qu'elles coïncident chaque fois que la vitesse du mobile est assez faible pour permettre de négliger $(v/c)^2$ devant l'unité. Mais aujourd'hui, la dynamique d'Einstein elle-même me paraît seulement une approximation par rapport à une théorie plus générale qui est aux anciennes dynamiques ce qu'est la théorie des ondes à l'optique géométrique.

7. Quelques définitions des anciennes mécaniques. — Les mécaniques anciennes nous apprennent que, dans le cas ici considéré des champs constants, une certaine fonction des coordonnées et de la vitesse du mobile demeure invariable au cours du temps. C'est l'énergie $W(x, y, z, v)$. Dans la dynamique d'Einstein, on a

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + F(x, y, z), \quad (18)$$

$F(x, y, z)$ étant l'énergie potentielle du mobile de masse propre m_0 au point (x, y, z) . Pour obtenir l'expression de W en mécanique classique, il suffit de développer $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ en série et de négliger les termes supérieurs :

$$W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + F(x, y, z). \quad (18')$$

La constante $m_0 c^2$ est très supérieure aux termes suivants quand la mécanique classique est valable. Dans les anciens traités, on désigne sous le nom d'énergie la partie variable de W , somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle ; dans ce qui suit, nous la désignerons par E .

A côté de l'énergie, les dynamiques anciennes introduisent une grandeur vectorielle, la quantité de mouvement $\vec{g}$. Laissant de côté, pour l'instant, le cas où le mobile porte une charge électrique et se meut dans un champ magnétique, nous exprimerons la quantité de mouvement en fonction de la seule variable v par l'expression (relativiste) :

$$\vec{g} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (19)$$

L'équation newtonienne correspondante est :

$$\vec{g} = m_0 \vec{v}. \quad (19')$$

Si l'on élimine la vitesse entre l'expression de g et celle de W , on parvient à exprimer g en fonction des coordonnées et de W . On obtient :

$$\text{dans la mécanique relativiste, } g = \frac{1}{c} \sqrt{(W - F)^2 - m_0^2 c^4}; \quad (20)$$

$$\text{— — — classique, } g = \sqrt{2m_0 [E - F]}. \quad (20')$$

8. L'onde associée au mobile. — L'idée essentielle qui m'a guidé dans mes travaux antérieurs a été d'associer au mouvement de tout mobile la propagation d'une onde. J'ai donc considéré une onde sinusoïdale satisfaisant à l'éq. (1) et, en admettant que les solutions approximatives de l'optique géométrique étaient valables, j'ai écrit l'expression de cette onde sous la forme (12). Pour établir un lien entre l'onde ainsi définie et le problème mécanique correspondant, j'ai été amené à poser :

$$W = h\nu, \quad g = \frac{h\nu}{V}, \quad (21)$$

h étant la constante de Planck. La première relation est, en quelque sorte, imposée par la théorie des quanta de lumière; la seconde dérive de la première par des considérations d'invariance. Les relations (21) ont pour conséquence que la variation de la phase, quand on se déplace de dr le long du rayon pendant le temps dt , est proportionnelle à la variation correspondante de l'action hamiltonienne, car on a

$$2\pi\nu \left(dt - \frac{dr}{V} \right) = \frac{2\pi}{h} (Wdt - gdr). \quad (22)$$

Dans les anciennes mécaniques, la forme des trajectoires dans le champ constant est déterminée par le principe de Maupertuis :

$$\delta \int_A^B g dr = 0. \quad (23)$$

En comparant (23) avec (13), en tenant compte de (21), on voit que les trajectoires possibles du mobile coïncident avec les rayons de l'onde associée. Grâce à l'identité du principe de Fermat avec celui de moindre action, le problème dynamique se trouve ramené à l'étude d'une propagation d'ondes sinusoïdales.

D'après (21), pour obtenir l'équation de propagation de l'onde associée dans un champ donné, nous devons, dans l'éq. (1), remplacer $\frac{1}{V}$ par $\frac{g(x, y, z, W)}{h\nu}$.

Nous obtenons ainsi, selon que nous adoptons la mécanique d'Einstein ou celle de Newton :

$$\Delta u + \frac{4\pi^2}{h^2 c^2} [(W - F)^2 - m_0^2 c^4] u = 0, \quad (24)$$

ou

$$\Delta u + \frac{8\pi^2}{h^2} m_0 [E - F] u = 0. \quad (24')$$

Remarquons que la vitesse de propagation dépend de la fréquence ν (par l'intermédiaire de l'énergie); il y a dispersion. Nous verrons d'ailleurs plus loin qu'en dernière analyse la véritable équation de propagation n'est pas du type (1), mais d'un type plus compliqué.

Nous allons vérifier ⁽¹⁾ que les mécaniques géométriques dérivent de (24) ou de (24') sous les mêmes réserves que l'optique géométrique dérive de (1). Écrivons la solution sinusoïdale sous la forme (3) en posant :

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{h} S(x, y, z). \quad (25)$$

En substituant dans (24) ou (24') et en supposant les dérivées secondes de φ petites devant la somme des carrés des dérivées premières, nous arrivons à l'une des relations :

$$\sum_{xyz} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = \frac{(W - F)^2}{c^2} - m_0^2 c^2, \quad (26)$$

$$\frac{1}{2m_0} \sum_{xyz} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + F = E. \quad (26')$$

(26') est l'équation classique de Jacobi pour les champs constants; (26) en est la forme relativiste. S est la fonction d'action, et l'onde peut s'écrire sous la forme analogue à (12) :

$$u(x, y, z, t) = C \cos \frac{2\pi}{h} [Wt - S]. \quad (27)$$

Il est intéressant de noter que la condition relative aux dérivées de φ serait toujours remplie si l'on pouvait supposer h infiniment petit, car les dérivées secondes de φ sont proportionnelles à $1/h$ alors que le carré des dérivées premières l'est à $1/h^2$. Nous en concluons que la mécanique ondulatoire se confond avec les anciennes mécaniques quand h tend vers zéro, résultat qu'on devait attendre a priori.

Nous allons maintenant indiquer un procédé formel permettant de remonter des équations (26) ou (26') aux équations de propagation (24) ou (24'), procédé dont l'importance apparaîtra par la suite. On sait que les dérivées de S par rapport aux coordonnées sont les moments de Lagrange conjugués; si, dans (26) ou (26'), on remplace $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$, $\frac{\partial S}{\partial z}$ par p_x , p_y , p_z , on obtient l'équation de l'énergie qu'on peut écrire :

$$f(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = 0. \quad (28)$$

Dans la fonction f , remplaçons respectivement p_x , p_y , p_z , par les symboles $K \frac{\partial}{\partial x}$, $K \frac{\partial}{\partial y}$, $K \frac{\partial}{\partial z}$ avec la notation

$$K = \frac{h}{2\pi i}. \quad (29)$$

On obtient ainsi un opérateur. Si on applique cet opérateur à la fonction u en égalant le résultat à zéro, on obtient les équations (24) et (24'). Par exemple, partons de (26'); en procédant comme nous venons de l'indiquer, nous obtenons l'opérateur :

$$\frac{1}{2m_0} K^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + F - E$$

et, en égalant à zéro le résultat de l'opération effectuée sur u , on aboutit bien à (24').

De même, (26) conduit à (24).

(1) Cf. LÉON BRILLOUIN, *C. R.*, t. 483 (1926), p. 270. — G. WENTZEL, *Zts. f. Phys.*, t. 38 (1926), p. 518.

9. La remarque capitale de Schrödinger ⁽¹⁾. — Les théories quantiques ont pour principal champ d'application le monde atomique. Admettant ma conception de la mécanique, Schrödinger s'est demandé si, précisément à l'échelle atomique, la propagation de l'onde associée pouvait s'étudier par les méthodes de l'optique géométrique. Or, ce n'est pas le cas, et voici comment on peut s'en apercevoir. Jusqu'ici, on avait appliqué à l'atome les méthodes des mécaniques géométriques en y joignant les conditions de quanta sur lesquelles nous reviendrons. En procédant ainsi, on prévoit l'existence de trajectoires contenues dans le domaine atomique ; si donc on admet la nature foncièrement ondulatoire de la dynamique, l'emploi des méthodes anciennes n'est pas justifié quand la longueur d'onde de l'onde associée à un électron intraatomique est de l'ordre des dimensions de l'atome. Or, les formules (13), (21) et (19') nous donnent (les corrections de relativité étant ici négligeables) :

$$\lambda = \frac{h}{g} = \frac{h}{m_0 v}. \quad (30)$$

Comme le quotient h/m_0 est de l'ordre de l'unité, λ est de l'ordre de v^{-1} et on vérifie facilement, à l'aide des équations de Bohr, que λ est comparable aux dimensions de l'atome. Il est donc logique de conclure que la dynamique atomique ne peut employer les équations de Lagrange-Hamilton dont l'emploi est légitime en mécanique usuelle et à fortiori en mécanique céleste ; elle doit étudier directement les solutions des équations rigoureuses (24) et (24'). Cette remarque capitale de Schrödinger achève de fixer le caractère de la nouvelle mécanique.

10. Le point matériel. — Revenons au cas où les équations (26) ou (26') sont valables. Les rayons de l'onde associée sont des trajectoires possibles du mobile. Mais, dans un mouvement donné, il y a un de ces rayons qui possède une importance physique particulière ; c'est celui qui est effectivement décrit par le mobile. L'onde associée, telle que nous l'avons conçue jusqu'à présent, ne permet pas de comprendre ce qui distingue ce rayon des autres. Pour parvenir à l'entrevoir, il faut, comme je l'ai signalé dans ma thèse ⁽²⁾, considérer, non pas une onde associée monochromatique, mais un groupe d'ondes associées de fréquences très voisines.

On peut alors concevoir que l'amplitude résultante présente, en un point, un maximum très prononcé ; ce maximum serait le point matériel. Cette manière de voir est rendue vraisemblable par le fait suivant : d'après les anciennes mécaniques, la vitesse du mobile est l'inverse de la dérivée de la fonction $g(x, y, z, W)$ des équations (20) et (20') par rapport à W . On a :

$$v = \left(\frac{\partial g}{\partial W} \right)^{-1} \quad (31)$$

et, d'après (21), ceci est équivalent à

$$v = \left(\frac{\partial (v/V)}{\partial v} \right)^{-1}. \quad (32)$$

(17) nous montre alors que la vitesse du mobile coïncide avec celle du groupe des ondes associées.

Mais qu'arrive-t-il si le phénomène dynamique évolue dans un domaine de l'ordre de la longueur d'onde, comme c'est le cas pour l'atome ? Schrödinger ⁽³⁾ pense qu'alors on ne peut plus parler de point matériel décrivant une trajectoire ; il en donne comme raison que la région où l'amplitude d'un groupe est voisine de son maximum a nécessairement une étendue de plusieurs longueurs d'onde. Le point matériel ne serait plus ponctuel à l'échelle de la longueur d'onde et, dans l'atome, on ne pourrait parler de la position, ni de l'orbite

(1) B, p. 497 et suivantes.

(2) Thèse, p. 46.

(3) B, p. 507-508.

d'un électron. Et cependant, un atome dont les dimensions sont de l'ordre de 10^{-8} cm peut absorber un quantum ultraviolet dont la longueur d'onde est plus de 1 000 fois plus grande (effet photoélectrique); ceci m'inclinerait plutôt à croire que la région de localisation de l'énergie doit être ponctuelle, même à l'échelle de la longueur d'onde. Il y a là un problème difficile que nous retrouverons plus loin sous diverses formes.

II. — STABILITÉ DES MOUVEMENTS DANS LES CHAMPS CONSTANTS.

11. Les anciennes conditions quantiques de stabilité. — L'étude des phénomènes de quanta a obligé les physiciens à introduire dans la mécanique une idée qui a longtemps paru extrêmement étrange : parmi l'infinité des mouvements périodiques qu'un point matériel peut posséder dans un champ constant, sont seuls stables certains mouvements privilégiés formant une suite énumérable comme la suite des nombres entiers.

L'introduction de la notion d'ondes associées a préparé la solution de cette énigme⁽¹⁾. Si, en effet, nous supposons réalisées les conditions d'application de l'optique géométrique, l'onde associée peut s'exprimer sous la forme (27) et, pour que la fonction u soit bien déterminé en tout point de l'espace, il faut que, le long de toute courbe fermée C , l'on ait :

$$\int_C dS = nh. \quad (n \text{ entier}) \quad (33)$$

C'est la forme générale des conditions de quanta énoncée par Einstein⁽²⁾ en 1917. L'apparition du nombre entier dans les formules dynamiques cesse d'être mystérieuse; elle devient aussi naturelle que son intervention dans la théorie des cordes vibrantes ou des antennes de radiotélégraphie. On peut exprimer (33) en disant que toutes les périodes cycliques de l'intégrale d'action doivent être des multiples de la constante h .

Il faut remarquer que la quantification se présente sous une forme assez différente suivant qu'on considère les périodes obtenues par variation d'une variable cyclique comme un azimut, ou d'une variable non cyclique comme un rayon vecteur. Par exemple, dans un champ attractif central, la quantification azimutale conduit à une condition de la forme :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial S}{\partial \theta} d\theta = n_1 h, \quad (34)$$

tandis que la quantification radiale s'exprime par :

$$2 \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{\partial S}{\partial \rho} d\rho = n_2 h, \quad (35)$$

ρ_0 et ρ_1 étant les valeurs de ρ qui limitent la libération du rayon vecteur (points de branchement de la fonction S) et qui correspondent aux cercles sur lesquels la quantité de mouvement s'annule.

Les conditions résumées par (33) constituent la forme naturelle sous laquelle la stabilité quantique doit s'énoncer dans le langage de l'ancienne mécanique, mais elles ne doivent plus maintenant être considérées que comme des approximations de valeur limitée. En particulier, une condition de quantification radiale telle que (35) ne peut *jamais* être exacte, car, sur les cercles de rayons ρ_0 et ρ_1 , la longueur d'onde de l'onde associée est infinie d'après (30) et, par suite, au voisinage de ces cercles, l'optique géométrique n'est certainement pas valable.

12. Les nouvelles conditions de stabilité. — La fonction u des équations (24) (24') doit, d'après sa nature physique, être partout uniforme et continue, et doit être nulle à l'infini. Il faut donc chercher pour quelles valeurs des constantes W ou E les équations (24) ou (24') admettent de telles solutions. C'est sous cette forme que Schrödinger énonce les

⁽¹⁾ *Thèse*, ch. III.

⁽²⁾ *Ber. deutsch. Phys. Ges.*, (1917), p. 82.

conditions de stabilité valables dans tous les cas. Il détermine ainsi l'énergie des mouvements ou plutôt la fréquence des ondes stables⁽¹⁾.

Nous allons considérer plus particulièrement l'équation (24'), qui a seule été envisagée par Schrödinger. Je dis : 1° qu'il existe une suite de valeurs E pour lesquelles (24') admet une solution partout uniforme et finie; 2° que les fonctions u ainsi obtenues forment, en général, un système de fonctions orthogonales.

Posons :

$$\mu = \frac{2\pi}{h^2} m_0 E, \quad \frac{8\pi^2 m_0}{h^2} V(x, y, z) = R(x, y, z). \quad (36)$$

Si M désigne le point de coordonnées $x y z$, (24') s'écrit :

$$\Delta u(M) + [4\pi\mu - R(M)] u(M) = 0. \quad (37)$$

Si $u(M)$ est partout uniforme et continue et est nulle à l'infini, on peut ramener la résolution de l'équation (37) à celle d'une équation intégrale homogène du type de Fredholm :

$$u(M) = \mu \int K(M, P) u(P) dv_P \quad (38)$$

où $K(M, P)$ est un « noyau » convenablement choisi; dv_P désigne un élément de volume contenant le point P et l'intégrale est étendue à l'espace tout entier. On sait qu'une semblable équation intégrale n'admet de solutions non nulles que pour certaines valeurs de la constante μ . En général, à chacune de ces valeurs particulières μ_i , correspond une seule fonction u_i . Les μ_i sont les constantes fondamentales; les u_i , les fonctions fondamentales des équations (37) et (38).

Il nous reste à montrer que les fonctions u_i sont, en général, orthogonales, c'est-à-dire satisfont aux relations :

$$\int u_i(P) u_j(P) dv_P = 0, \quad i \neq j. \quad (39)$$

Les fonctions u_i et u_j étant des solutions de (37) pour les valeurs μ_i et μ_j de la constante μ , on en déduit aisément la relation :

$$u_j \Delta u_i - u_i \Delta u_j = \sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) = 4\pi (\mu_i - \mu_j) u_i u_j. \quad (40)$$

En intégrant dans tout l'espace, on obtient, puisque les intégrales de surfaces sont nulles à l'infini :

$$(\mu_i - \mu_j) \int u_i(P) u_j(P) dv_P = 0, \quad (41)$$

et ceci équivaut à (39) si, à chaque μ_i , correspond une seule fonction u_i .

Les u_i n'étant évidemment définies qu'à une constante multiplicative près, on peut les normaliser en choisissant les constantes de façon à avoir :

$$\int u_i^2(P) dv_P = 1 \quad (42)$$

pour toute valeur de i .

Je n'insisterai pas davantage sur ces généralités⁽²⁾. Ce qui vient d'être dit suffit à mon-

(1) A et B.

(2) Pour la théorie des équations intégrales et des fonctions fondamentales, on pourra consulter, par exemple, les ouvrages suivants :

GOURSAT, *Traité d'analyse*, t. 3, Gauthier Villars, édition de 1923.

HEYWOOD et FRÉCHET, *L'équation de Fredholm et ses applications*, Hermann, édition de 1913.

trer comment le problème de la quantification se ramène à la recherche de certaines constantes fondamentales. La détermination des fonctions fondamentales correspondantes présente un certain caractère arbitraire dans le cas où plusieurs de ces fonctions se rattachent à une même valeur μ_i . Ces cas sont précisément ceux où, dans le langage mathématique des anciennes mécaniques, on disait qu'il y avait « dégénérescence ».

Schrödinger a étudié certains cas remarquables. Sans avoir recours à la théorie des équations intégrales, il a déterminé les constantes et les fonctions fondamentales par l'artifice suivant : il ramène l'équation de propagation à étudier à une équation du type de Laplace :

$$(a_0x + b_0)y'' + (a_1x + b_1)y' + (a_2x + b_2)y = 0, \quad (43)$$

équation dont les solutions s'expriment par des intégrales prises le long de certaines courbes dans le plan de la variable complexe selon une méthode classique ⁽¹⁾. L'étude de ces solutions permet de déterminer les constantes et les fonctions cherchées.

Les résultats ainsi obtenus mériteraient à eux seuls tout un exposé. Pour ne pas trop allonger le présent mémoire, je renvoie le lecteur aux beaux travaux de Schrödinger, me bornant à rappeler les deux points suivants :

1° Dans le cas de l'oscillateur linéaire ⁽²⁾, on parvient à la formule, des demi-quanta, déjà déduite par Heisenberg de sa mécanique quantique. Cette formule, suggérée par l'expérience, était en opposition avec l'ancienne méthode de quantification.

2° Dans le cas de l'atome d'hydrogène ⁽³⁾, si $E > 0$, toutes les solutions sont acceptables; les mouvements hyperboliques ne sont pas quantifiés. Si, au contraire, $E < 0$, on retrouve les niveaux d'énergie de la théorie de Bohr. Les μ_i ont donc ici une suite discrète de valeurs négatives (spectre de raies) et une suite continue de valeurs positives (spectre continu).

III. — EQUATIONS GÉNÉRALES DE PROPAGATION

13. Equation générale de propagation pour le point matériel libre. — Dans le cas d'un point matériel libre, l'équation de propagation de l'onde associée est, d'après (24), en remplaçant W par $h\nu$:

$$\Delta u + \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2} \left[1 - \frac{m_0^2 c^4}{h^2 \nu^2} \right] u = 0. \quad (44)$$

En comparant avec (5), on voit que l'espace présente, pour l'onde associée, l'indice de réfraction :

$$n = \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{h^2 \nu^2}}. \quad (45)$$

Il y a donc dispersion et, comme nous l'avons dit à propos des groupes d'ondes, ceci nous conduit à penser que l'équation (44) est une forme dégénérée d'une équation plus générale telle que (15). Pour trouver cette équation, nous nous souviendrons d'abord de la façon dont nous avons pu remonter de l'équation de l'énergie sous la forme (28) aux équations de propagation (24) et (24'). Nous allons appliquer le même procédé, mais en traitant cette fois le temps comme une variable analogue aux variables d'espace, comme le veut la théorie de relativité. Posons donc :

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad ct = x_4. \quad (46)$$

⁽¹⁾ Voir GOURSAT, *Traité d'analyse*, t. 2, p. 450.

⁽²⁾ B, p. 514.

⁽³⁾ A, *passim*.

La dynamique de relativité nous apprend que les moments conjugués de ces 4 variables sont les composantes de l'impulsion d'Univers :

$$p_1 = g_x, \quad p_2 = g_y, \quad p_3 = g_z, \quad p_4 = \frac{W}{c}, \quad (47)$$

où les g sont les composantes de la quantité de mouvement, et W , l'énergie.

L'équation de la conservation de l'énergie peut alors s'écrire :

$$p_4^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m_0^2 c^2 = 0. \quad (48)$$

généralisant le procédé employé pour (28) nous remplacerons, dans (48), chaque p_i par $K \frac{\partial}{\partial x_i}$, K ayant la valeur (29), et, en appliquant l'opérateur obtenu à la fonction u et égalant le résultat à zéro, nous obtenons :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 u = 0. \quad (49)$$

L'équation (44) est la forme que prend (49) quand on se borne à envisager les ondes monochromatiques de fréquence ν , mais (49), qui est de la forme (15), paraît être l'équation générale de propagation de toutes les ondes du groupe associé au mobile de masse m_0 .

Dans un système de référence donné, le point matériel libre se déplace en ligne droite avec une vitesse constante v . Si l'on prend la trajectoire pour axe des z , il paraît probable que le groupe d'ondes associé peut être représenté par la fonction :

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z - vt) e^{2\pi i \nu \left[t - \frac{n}{c} z \right]}, \quad (50)$$

où n a la valeur (45). Substituons dans (49) et posons :

$$x_0 = x, \quad y_0 = y, \quad z_0 = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t_0 = \frac{t - \frac{v}{c^2} z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (51)$$

On trouve les deux relations :

$$v = nc \quad (52)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_0^2} = 0. \quad (53)$$

L'équation (52) est vérifiée d'elle-même car, si l'on remplace n par v/c dans (45), on retrouve l'expression de l'énergie en fonction de la vitesse. Quand à l'équation (53), elle exprime que la fonction f est harmonique dans le système propre du mobile, car (51) est la transformation de Lorentz. Si le mobile possède dans son système propre la symétrie centrale, la fonction u , exprimée à l'aide des variables x_0, y_0, z_0, t_0 , a pour partie réelle :

$$u(x_0 y_0 z_0 t_0) = \frac{C}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \cos 2\pi \nu_0 t_0, \quad (54)$$

avec $\nu_0 = \nu \sqrt{1 - n^2}$. Avec les variables x, y, z, t , l'expression du groupe d'ondes serait donc :

$$u(x, y, z, t) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(z - nct)^2}{1 - n^2}}} \cos 2\pi \nu \left[t - \frac{n}{c} z \right]. \quad (55)$$

La solution (55) est différente de celle que j'avais proposée jusqu'ici ⁽¹⁾, mais elle me semble préférable. On remarquera qu'elle définit le point matériel comme une singularité *rigoureusement* ponctuelle.

14. Cas du mouvement d'une charge électrique dans un champ électromagnétique. — Suivant la même méthode, nous allons chercher l'équation générale de propagation des ondes associées au mouvement d'un point matériel de charge e dans un champ électromagnétique connu, c'est-à-dire donné en fonction des coordonnées et du temps.

Le champ est défini par les composantes du potentiel d'Univers qui résume le potentiel scalaire Ψ et le potentiel vecteur $\vec{a}$. Ces composantes sont :

$$\varphi_1 = -\frac{a_x}{c}, \quad \varphi_2 = -\frac{a_y}{c}, \quad \varphi_3 = -\frac{a_z}{c}, \quad \varphi_4 = \frac{\Psi}{c}. \quad (56)$$

Entre les composantes de $\vec{\varphi}$ et celles de l'impulsion d'Univers, existe la relation invariante :

$$(p_4 - e\varphi_4)^2 - \sum_{123} (p_i - e\varphi_i)^2 = m_0^2 c^2. \quad (57)$$

Remplaçons encore chaque p_i par $K \frac{\partial}{\partial x_i}$ et tenons compte de la relation de Lorentz entre les potentiels :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \text{div } \vec{a} = 0. \quad (58)$$

Il vient :

$$K^2 \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u \right] - 2K \frac{e\Psi}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} - 2K \frac{e}{c} \sum_{xyz} a_x \frac{\partial u}{\partial x} + \left[\frac{e^2}{c^2} (\Psi^2 - a^2) - m_0^2 c^2 \right] u = 0. \quad (59)$$

Cette équation doit probablement être regardée comme réglant la propagation des ondes associées au mouvement de l'électron dans une région où les potentiels sont connus en fonction des coordonnées et du temps; en termes précis, les fonctions u qui représentent les ondes associées seraient les parties réelles de certaines solutions de (59). Il faut cependant remarquer que (59) contient des termes imaginaires (ceux où figure K) et ceci soulève peut-être quelques objections au point de vue physique.

Quoi qu'il en soit, en posant dans (59)

$$u = e^{\frac{2\pi i}{h} S},$$

on retrouve bien la forme générale relativiste de l'équation de Jacobi comme première approximation :

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - e\Psi \right)^2 - \sum_{xyz} \left(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{e}{c} a_x \right)^2 = m_0^2 c^2. \quad (60)$$

Si les champs sont constants, l'équation (59) conduit à des résultats déjà connus, car on peut alors supposer que u est périodique, de fréquence constante ν .

Dans un champ électrostatique ($a = 0$), l'équation (59) prend la forme (24) et l'espace où règne le champ présente pour l'onde l'indice :

$$n = \sqrt{\left(1 - \frac{e\Psi}{h\nu} \right)^2 - \frac{m_0^2 c^4}{h^2 \nu^2}}. \quad (61)$$

(1) Voir notamment *C. R.*, t. 180 (1925), p. 498.

S'il y a un champ magnétique et si l'optique géométrique est applicable, on peut se contenter de l'équation (60); l'indice de réfraction, en un point M et dans une direction faisant l'angle θ avec le potentiel vecteur, a alors pour valeur :

$$n = c \sqrt{\sum_{xyz} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2} / \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{c}{h\nu} \left[\frac{ea \cos \theta}{c} \pm \sqrt{\left(\frac{h\nu - e\Psi}{c} \right)^2 - m_0^2 c^2 - \frac{e^2 a^2 \sin^2 \theta}{c^2}} \right]. \quad (62)$$

Par suite de la présence du potentiel vecteur, l'espace se comporte comme anisotrope et biréfringent ⁽¹⁾.

15. Dynamique des systèmes. — La dynamique des systèmes de points matériels ne paraît présenter dans la nouvelle mécanique aucune difficulté de principe particulière quand l'optique géométrique est valable, car on est alors ramené à l'équation de Jacobi et aux mécaniques anciennes.

Il n'en est plus de même si l'optique géométrique n'est plus applicable. Si, dans chaque groupe d'ondes, subsiste encore dans ce cas une singularité *ponctuelle* méritant le nom de point matériel, on peut facilement concevoir que chacun des groupes d'ondes se propage suivant une loi telle que (59) où les coefficients dépendent de la position simultanée des singularités dans les autres groupes; mais s'il n'y a plus, dans ce genre de mouvements, de points matériels bien définis, la question s'obscurcit. Schrödinger penche vers cette seconde opinion et, pour fonder la dynamique des systèmes ⁽²⁾, il généralise mon idée d'ondes de phase : il associe au mouvement de l'ensemble de N mobiles une onde dans l'espace à $3N$ dimensions imaginé par les théories classiques pour représenter, par le déplacement d'un seul point représentatif, l'évolution de tout le système. Cette onde associée au système des N points serait donc fonction de $3N$ coordonnées d'espace et du temps.

Jusqu'à présent, je n'ai pu accepter ce point de vue; pour moi, les ondes associées ont une réalité physique et doivent s'exprimer par des fonctions des 3 coordonnées d'espace et du temps. Je ne puis insister davantage sur cette question délicate; on voit, par ce qui précède, que la dynamique ondulatoire des systèmes ne semble pas encore solidement constituée.

IV. — RACCORD AVEC LA THÉORIE D'HEISENBERG ET L'ÉLECTROMAGNÉTISME

16. La mécanique quantique d'Heisenberg ⁽³⁾. — Depuis un an, à la suite des profondes suggestions d'Heisenberg, s'est développée toute une doctrine, dite mécanique quantique, d'apparence très abstraite, qui, grâce aux travaux de Born, Jordan, Dirac, Pauli, L. Brillouin, etc., a acquis une forme mathématique remarquable et fournit des résultats intéressants.

Tous les renseignements que nous possédons sur l'intérieur des atomes nous sont fournis par l'étude des spectres; partant de cette remarque, Heisenberg juge téméraire de parler des positions et des vitesses des électrons intraatomiques et préfère représenter l'état de l'atome par des grandeurs directement reliées aux fréquences et aux intensités spectrales observables. A la place de chaque coordonnée q_i et de chaque moment p_i figurant dans la théorie de Bohr, on introduit un tableau à double entrée ayant l'aspect d'un déterminant dont le terme général serait :

$$q_i^{ik} e^{2\pi i \nu_{ik} t} \quad \text{ou} \quad p_i^{ik} e^{2\pi i \nu_{ik} t}, \quad (63)$$

avec la convention supplémentaire que q_i^{ki} et p_i^{ki} sont imaginaires conjuguées de q_i^{ik} et

⁽¹⁾ Thèse, p. 39.

⁽²⁾ B, passim et notamment p. 522 et suivantes.

⁽³⁾ Au sujet de la mécanique quantique, on se reportera à l'exposé de Léon Brillouin dans ce journal : t. 7 (1926), p. 135. On y trouvera la bibliographie de la question.

de p_l^{ik} . Les fréquences ν_{ik} sont les fréquences d'émission de l'atome qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$\nu_{ik} = \nu_i - \nu_k, \quad (64)$$

d'après la loi fondamentale de combinaison de Ritz.

Les quantités q_l^{ik} sont telles que les carrés de leurs modules :

$$|q_l^{ik}|^2 = q_l^{ik} \cdot q_l^{ik} \quad (65)$$

soient égaux aux intensités des raies spectrales.

Pour pouvoir se servir de ces tableaux de nombres, il faut connaître les règles de calcul qui leur sont applicables. Heisenberg, Born et Jordan ont montré que ces règles sont celles dont font usage les mathématiciens pour les matrices algébriques. L'addition et la multiplication de ces matrices ⁽¹⁾ sont définies par les formules :

$$(a + b)^{ik} = a^{ik} + b^{ik}, \quad (66)$$

$$(a \cdot b)^{ik} = \sum_j a^{ij} \cdot b^{jk}. \quad (67)$$

De (67) résulte que, dans un produit de matrices, on ne peut permuter l'ordre des facteurs.

Pour introduire la constante de Planck dans la mécanique quantique, on pose comme postulat de base que les matrices q_l et p_l satisfont aux relations :

$$\begin{aligned} (n_l p_m - p_m p_l)^{ik} &= 0 \\ (q_l q_m - q_m q_l)^{ik} &= 0 \\ (p_l q_m - q_m p_l)^{ik} &= 0, \quad \text{si } l \neq m, \\ (p_l q_l - q_l p_l)^{ik} &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ \frac{h}{2\pi i} & \text{si } i = k. \end{cases} \end{aligned} \quad (68)$$

Pour déterminer les p_l , les q_l et les ν_{ik} , la mécanique quantique pose les équations d'allure Hamiltonienne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d q_l}{d t} \right)^{ik} &= 2\pi i \nu_{ik} q_l^{ik} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_l} \right)^{ik} \\ \left(\frac{d p_l}{d t} \right)^{ik} &= 2\pi i \nu_{ik} p_l^{ik} = \left(- \frac{\partial H}{\partial q_l} \right)^{ik} \end{aligned} \quad (69)$$

Dans le dernier membre de ces équations, H désigne une fonction de matrices qui s'exprime à l'aide des matrices q_l et p_l de la même façon que l'énergie à l'aide des coordonnées et des moments dans le problème classique correspondant. Pour la définition exacte des fonctions de matrices et de leurs dérivées, on se reportera aux mémoires originaux ou à l'exposé de Léon Brillouin ⁽²⁾.

Je remarquerai qu'en fait les équations (69) n'ont guère été appliquées qu'au mouvement d'un seul mobile et que, dans ce cas, il a paru nécessaire, pour obtenir des résultats exacts, de choisir pour H l'expression de l'énergie en coordonnées cartésiennes rectangulaires (Dirac) ⁽³⁾.

On démontre, dans la théorie d'Heisenberg ⁽⁴⁾, que si f est une fonction quelconque des q_l et des p_l , les relations (68) entraînent les suivantes :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial q_l} \right)^{ik} = \frac{2\pi i}{h} (p_l f - f p_l)^{ik}; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial p_l} \right)^{ik} = \frac{2\pi i}{h} (f q_l - q_l f)^{ik}. \quad (70)$$

(1) L. BRILLOUIN, *loc. cit.*, p. 137.

(2) p. 139 et suivantes.

(3) DIRAC, *Proc. Roy. Soc.*, t. 110 (1926), p. 570 et suivantes.

(4) Voir L. BRILLOUIN, *loc. cit.*, équations (35) et (39).

En appliquant ces formules à la fonction H et en substituant dans (69), on met les équations de la mécanique quantique sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} v^{ik} q_l^{ik} &= \frac{1}{h} (H q_l - q_l H)^{ik} \\ v^{ik} p_l^{ik} &= \frac{1}{h} (H p_l - p_l H)^{ik} \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

17. Interprétation de Schrödinger. — Par une remarquable transposition, Schrödinger⁽¹⁾ est parvenu à montrer que les équations de la théorie d'Heisenberg s'interprètent naturellement dans la mécanique ondulatoire. Pour cela, il est parti de la définition des fonctions « bien ordonnées ». Ce sont des fonctions où l'on s'interdit de changer l'ordre des facteurs : ainsi, par exemple, les expressions $xy + yx$ et $2xy$ sont identiques si on les considère comme des fonctions ordinaires mais sont différentes en tant que fonctions bien ordonnées.

Considérons alors une fonction bien ordonnée $F(q_l, p_l)$ de deux séries de variables q_l et p_l , et supposons, de plus, que F soit un polynôme entier par rapport aux p_l . Si, dans F , nous remplaçons chaque p_l par le symbole $K \frac{\partial}{\partial q_l}$, où K a la valeur (29), nous obtenons un opérateur; c'est un procédé que nous avons déjà plus d'une fois employé. Désignons par la notation $[F, u]$ le résultat de l'opération effectuée sur une fonction u des variables q_l . Enfin, supposons que nous connaissions un ensemble de fonctions u_i normales et orthogonales, c'est-à-dire satisfaisant aux équations (40) et (42). Schrödinger définit comme composantes de la matrice correspondant à la fonction bien ordonnée $F(q_l, p_l)$ les quantités :

$$F^{ik} = \int u_i(P) [F, u_k(P)] dv_P, \quad (72)$$

l'intégrale étant étendue à l'espace entier, et montre que les F^{ik} vérifient les règles de calcul (66-67).

Si l'on considère, en particulier, les fonctions $F = q_l$ et $F = p_l$, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} q_l^{ik} &= \int u_i(P) u_k(P) q_l dv_P \\ p_l^{ik} &= \int u_i(P) K \frac{\partial}{\partial q_l} u_k(P) dv_P \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

On vérifie facilement qu'avec ces définitions, les relations (68) sont satisfaites. Les équations (69) prennent alors la forme (71), à laquelle nous devons satisfaire. Pour cela, nous n'avons qu'un moyen : choisir convenablement le système des fonctions u_i jusqu'ici arbitraire. Nous choisirons le système des fonctions fondamentales de l'équation (24'), ou, ce qui revient au même, de l'équation

$$[H, u] - Eu = 0, \quad (74)$$

où H est l'expression de l'énergie en coordonnées cartésiennes rectangulaires, qui est bien un polynôme en p_l .

Les équations (71) sont alors satisfaites. Il suffit de le vérifier pour la première. On a :

$$H^{ik} = \int u_i(P) [H, u_k(P)] dv_P = E_k \int u_i(P) u_k(P) dv_P = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k. \\ E_k & \text{si } i = k. \end{cases} \quad (75)$$

H est donc une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les E_k , résultat connu de la mécanique quantique. On en déduit :

$$(H q_l - q_l H)^{ik} = \sum_j H^{ij} q_l^{jk} - \sum_j q_l^{ij} H^{jk} = (E_i - E_k) q_l^{ik}. \quad (76)$$

(1) C.

L'équation (74) est alors vérifiée si les ν_{ik} obéissent à la loi des fréquences de Bohr :

$$\nu_{ik} = \frac{1}{h} (E_i - E_k). \quad (77)$$

Nous pouvons maintenant comprendre pourquoi H doit être exprimée en coordonnées rectangulaires : si l'on exprimait H autrement, par exemple en coordonnées cylindriques ou polaires, l'équation (74) ne serait plus identique à l'équation de propagation (24') et la méthode d'Heisenberg ne serait plus justifiée.

Encore une remarque ! La mécanique d'Heisenberg correspond à l'équation (24') de la mécanique ondulatoire newtonienne et non à l'équation (24) de la dynamique relativiste.

18. Signification des ν_{ik} et des q_i^{jk} . — La caractéristique essentielle de la théorie d'Heisenberg, c'est que les ν_{ik} sont les fréquences des raies spectrales de l'atome et que les quantités $q_i^{jk} e^{2\pi i \nu_{ik} t}$ sont reliées aux intensités de ces raies et jouent le rôle du moment électrique dans les théories classiques.

La mécanique ondulatoire peut-elle expliquer cela ? En ce qui concerne les fréquences ν_{ik} , j'avais eu l'idée de les considérer comme des fréquences de battement⁽¹⁾. Voici comment on pourrait concevoir la chose, si l'optique géométrique était valable dans l'atome. Considérons, pour simplifier, l'atome d'hydrogène, et soient deux mouvements de l'électron stables au sens de Bohr et d'énergies W_i et $W_k < W_i$. D'après (27), les ondes associées à ces deux mouvements auraient pour expressions :

$$\left. \begin{aligned} u_i &= A_i \cos \frac{2\pi}{h} (W_i t - S_i) \\ u_k &= A_k \cos \frac{2\pi}{h} (W_k t - S_k) \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

et, d'après (33), le long d'une courbe fermée quelconque C située dans la région où s'effectue le mouvement, on doit avoir :

$$\int_C dS_i = n_i h, \quad \int_C dS_k = n_k h. \quad (79)$$

Supposons (nous reviendrons sur ce point) que dans l'atome, à un instant donné, les ondes u_i et u_k coexistent. Leur superposition donnera naissance à un battement dont l'amplitude contiendra le facteur :

$$\cos \frac{2\pi}{h} \left[\frac{W_i - W_k}{2} t - \frac{S_i - S_k}{2} \right] = \cos 2\pi \left[\frac{\nu_{ik} t}{2} - \frac{S_i - S_k}{2h} \right]. \quad (80)$$

Le signe du cosinus n'important pas, le battement aura la fréquence ν_{ik} . De plus, sur la courbe C , il y a $n_i - n_k$ maxima d'amplitude et chacun d'eux décrit la courbe avec une fréquence :

$$\omega = \frac{\nu_{ik}}{n_i - n_k}, \quad (81)$$

comme cela résulte de (79) et (80)⁽²⁾. Nous voyons ainsi apparaître des fréquences mécaniques ayant un sens physique et telles que les fréquences spectrales en soient des harmoniques.

En y réfléchissant, on voit que la conception précédente jette une certaine lumière sur le rôle des harmoniques dans la théorie de correspondance. Néanmoins, elle n'est pas satisfaisante : d'abord elle repose sur l'application des solutions de l'optique géométrique à

(1) *C. R.*, t. 179 (1924), p. 676. Voir aussi Schrödinger A, à la fin.

(2) L'ensemble des maxima tourne sur la courbe C et se reproduit identique à lui-même avec la fréquence ν_{ik} .

l'intérieur de l'atome, ce qui n'est pas justifié; ensuite elle n'explique nullement le rôle des q_i^{ik} d'Heisenberg définis par la première des relations (73).

Pour interpréter les q_i^{ik} comme composantes du moment électrique de l'atome, Schrödinger ⁽¹⁾ a supposé l'état ondulatoire de l'atome défini par la superposition des ondes stables sous la forme :

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_i a_i u_i(x, y, z) e^{2\pi i \nu_i t}, \quad (82)$$

et la densité électrique en un point de l'atome, liée à l'état ondulatoire par la relation :

$$\rho = \Psi \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}, \quad (83)$$

$\bar{\Psi}$ étant la fonction imaginaire conjuguée de Ψ . On aurait ainsi :

$$\rho = 2\pi \sum a_i a_k u_i u_k (\nu_i - \nu_k) \sin 2\pi (\nu_i - \nu_k) t, \quad (84)$$

et, d'après (73), le moment électrique de l'atome aurait pour composante, dans la direction q_i :

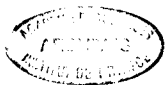
$$\mathfrak{M}_i = \int \rho q_i dv = 2\pi \sum a_i a_k (\nu_i - \nu_k) q_i^{ik} \sin 2\pi (\nu_i - \nu_k) t. \quad (85)$$

Le rôle des q_i^{ik} serait ainsi expliqué. Schrödinger reconnaît d'ailleurs que cette interprétation se heurte à des objections et n'est qu'une esquisse.

Revenons sur un point important. Il paraîtrait naturel d'admettre que la vibration interne de l'atome, dans un de ses états stables, présente uniquement la fréquence ν_i correspondant à cet état. Or les deux conceptions qui viennent d'être exposées ont ceci de commun qu'elles supposent constamment présentes dans l'atome les ondes correspondant à *tous* les mouvements stables. Pour expliquer cet apparent paradoxe, on pourrait peut-être partir de la remarque qu'un mouvement est défini non pas par une onde monochromatique, mais par un groupe d'ondes; lorsque toutes les fréquences sont stables (cas du mouvement libre, par exemple), le groupe peut être formé d'ondes de fréquences extrêmement voisines, mais s'il y a une série discrète de fréquences stables rigoureusement définies, le groupe n'est-il pas forcé de se dissocier et de comprendre toute la série des fréquences ν_i qui sont très séparées les unes des autres?

19. Conclusion. — L'interprétation des grandeurs q_i^{ik} se rattache à la question beaucoup plus générale de raccorder la mécanique ondulatoire avec l'électromagnétisme ou, pour mieux dire, de créer une physique générale du champ qui contienne à la fois l'électromagnétisme convenablement modifié et la nouvelle mécanique. Cette physique du champ devra expliquer la nature des ondes associées, justifier leurs équations de propagation, dégager le sens profond de la constante h . Elle devra aussi montrer pourquoi les groupes d'ondes à singularités qui constituent la matière rentrent tous dans un petit nombre de types : l'électron, le proton, le quantum de lumière... On aura ainsi compris pourquoi la matière est atomique. Nous n'en sommes pas encore là mais ces questions s'imposent désormais à l'attention des chercheurs.

⁽¹⁾ C. p. 755.



Manuscrit reçu le 5 août 1926.