LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

ET LA

STRUCTURE ATOMIQUE DE LA MATIÈRE

ET DU RAYONNEMENT

PAR

M. Louis DE BROGLIE

EXTRAIT DE
« LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM »
Mai 1927, Série VI, T. VIII, N° 5, pp. 225-241

LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE ET LA STRUCTURE ATOMIQUE DE LA MATIÈRE ET DU RAYONNEMENT

par M. Louis de BROGLIE.

Sommaire. — M. Schrödinger et la plupart des auteurs qui se sont occupés de Mécanique ondulatoire ont cherché à représenter les phénomènes dynamiques par des propagations d'ondes à amplitude continue du type classique en Optique. Au premier abord, il est difficile de comprendre comment ce point de vue peut se concilier avec la structure atomique de la matière et du rayonnement, structure qui n'est plus guère contestée aujourd'hui. Le but du présent mémoire est de montrer que les solutions continues fournissent, en réalité, seulement une certaine vue statistique des phénomènes dynamiques dont la description exacte exige sans doute la considération d'ondes comportant des singularités. En particulier, ce genre de conceptions permet de donner un sens clair à l'équation proposée par Schrödinger pour la dynamique des systèmes.

I. INTRODUCTION [1].

Le but de la Mécanique ondulatoire est d'opérer une synthèse entre la dynamique du point matériel et la théorie des ondes conçue à la façon de Fresnel. D'une part, cette synthèse doit avoir pour effet de faire admettre en Optique la notion de points de concentration de l'énergie radiante, notion qui semble aujourd'hui imposée par les données récentes de la Physique expérimentale; d'autre part, elle doit aussi introduire les conceptions de la théorie des Ondes dans l'image que nous nous faisons des points matériels, afin de rendre compte de l'intervention des quanta en Mécanique et des phénomènes intraatomiques.

La nouvelle Mécanique définit les mouvements possibles des points matériels à l'aide d'équations de propagation dont la forme dépend des fonctions potentielles. Doit-on, pour représenter le mouvement d'un point matériel (électron, proton ou photon), adopter une solution continue sans singularités de l'équation de propagation analogue à celles qu'utilise l'Optique de Fresnel? De telles solutions ne rendent évidemment aucun compte de la structure atomique de la matière; il me paraît physiquement préférable de chercher à représenter chaque point matériel par une solution de l'équation de propagation correspondante dont l'amplitude comporte une singularité ponctuelle, traduction analytique de l'existence du point matériel. Cependant, en Optique, l'emploi des solutions continues a permis, pendant un siècle, aux physiciens de prévoir des phénomènes très précis et, par ailleurs, M. Schrödinger vient de se servir avec succès des solutions continues pour représenter les états stationnaires de la Micromécanique. Ces constatations amènent à se demander s'il n'existerait pas, entre les solutions continues et les solutions à singularités des équations de propagation, un lien qui s'exprimerait en gros de la façon suivante : les solutions continues donneraient une image statistique du déplacement des singularités correspondant aux solutions réelles et, par suite, elles permettraient de prévoir la « probabilité de présence » d'une singularité dans un volume donné de l'espace où s'opère le mouvement.

[1] Ce mémoire est le développement de deux notes parues aux *Comptes Rendus*, t. **183** (1926), p. 447 et t. **184** (1927), p. 273.

C'est cette idée que je vais chercher à développer et à préciser ici en mettant nettement en évidence les postulats que j'admets et dont il serait souhaitable de trouver une justification. Ma conception se rapproche de celle qui a été brillamment soutenue par M. Born en ceci qu'elle conduit à considérer les solutions continues comme donnant des probabilités de présence, mais elle en diffère sur un point essentiel. Pour M. Born, en effet, il n'y a que des probabilités; le déterminisme des phénomènes individuels devrait être abandonné, la probabilité des phénomènes statistiques étant seule déterminée. Dans la manière de voir adoptée ici, au contraire, le point matériel est une réalité essentielle et son mouvement est entièrement déterminé comme étant celui d'une singularité de l'amplitude dans une onde qui se propage. Seulement, tout comme en Mécanique ancienne, le mouvement du point dépend des conditions initiales et si l'on ignore (du moins dans une mesure qui sera précisée) ces conditions initiales, on peut parler de la probabilité pour que le point matériel se trouve à un instant donné dans un élément de volume donné de l'espace; c'est cette probabilité qui serait fournie par la considération des ondes continues. Il y aurait donc lieu de conserver la structure atomique de la matière et du rayonnement ainsi que le déterminisme des phénomènes individuels, tout en attribuant aux solutions continues la valeur statistique que M. Born et implicitement M. Schrödinger leur ont reconnue.

II. LES ONDES CONTINUES ET LA DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL.

A. Cas de l'absence de champ.

1. **L'équation de propagation et ses solutions.** — Considérons un point matériel de masse propre m_0 placé en dehors de tout champ dans un espace où n'existe aucun obstacle. Par rapport à un système galiléen, ce point est en mouvement rectiligne et uniforme (ou en repos) et la mécanique ondulatoire nous enseigne que ce mouvement doit être assimilé à la propagation d'une onde et représenté par une solution de l'équation suivante (¹) :

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4\pi^2 \nu_0^2}{c^2} u \tag{1}$$

en posant :

$$\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h}. \tag{2}$$

En raisonnant comme je l'ai fait dans ma thèse, on est amené à chercher des solutions de (1) ayant la forme :

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) \cos \frac{2\pi\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[t - \frac{\beta z}{c} + \tau\right] \tag{3}$$

ou en posant :

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W}{h}, \qquad V = \frac{c}{\beta}, \tag{4}$$

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) \cos 2\pi\nu\left[t - \frac{z}{V} + \tau\right]. \tag{5}$$

Dans la première formule (4), W désigne l'énergie totale du mobile y compris son énergie interne m_0c^2.

Si l'on écrit l'argument du cosinus sous la forme $\frac{2\pi}{h}\varphi(x, y, z, t)$, la fonction φ n'est autre que l'action d'Hamilton.

(¹) Voir *Journal de Physique*, série VI, t. 7, (novembre 1926), p 321-337, équation 49. Je renverrai désormais à ce mémoire par les lettres J. P.

D'autre part, il résulte de (4) que la vitesse du point matériel est égale à la vitesse de groupe d'ondes planes homogènes de la forme :

$$A \cos 2\pi\nu \left[t - \frac{z}{V} + \tau \right]$$

c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{1}{v} = \frac{\partial (\nu/V)}{\partial \nu} \qquad (6)$$

Ce fait remarquable fait penser que le point matériel doit être assimilé à un groupe d'ondes monochromatiques. Cette conception, qui avait été la mienne, a été reprise par M. Schrödinger et l'a conduit à considérer le point matériel comme un « Wellenpacket ». Au point de vue didactique, il est très utile d'employer cette image, mais il n'est pas sûr qu'elle corresponde à la réalité car, je vais le montrer, l'équation (6) peut être obtenue sans faire appel à la notion de groupe d'ondes.

Pour préciser ce point, il faut se demander quelle peut être la forme de la fonction $f(x, y, z, t)$ des équations (3) et (5). Il paraît physiquement probable que cette fonction présente une singularité là où se trouve le point matériel et que l'ensemble des valeurs de f se transporte en bloc parallèlement à la direction du mouvement avec la vitesse v. On doit donc l'écrire $f(x, y, z-vt)$ et si l'on substitue la fonction (5) écrite sous forme complexe dans l'équation (1), on trouve, en annulant les termes imaginaires :

$$vV = c^2. \qquad (7)$$

Or, cette relation, équivalente à la deuxième équation (4), conduit à (6) et, par suite, la relation (6) se trouve obtenue sans avoir aucunement supposé que la solution de l'équation (1) puisse se représenter par un groupe d'ondes homogènes de fréquences voisines. Cette manière d'interpréter la formule (6) est, au fond, beaucoup mieux en accord avec les considérations dont je me suis servi dans ma thèse que la conception du groupe d'ondes.

En annulant les termes réels après substitution de (5) dans (1), on obtient une seconde équation :

$$\Box f = \Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \qquad (8)$$

Cette équation est, on le sait, invariante pour la transformation de Lorentz : la fonction f doit donc satisfaire à l'équation de Laplace dans un système d'axes lié au mobile si l'on suppose que le phénomène ondulatoire est stationnaire dans ce système. L'hypothèse la plus simple consiste alors à admettre que, dans ce système propre, le point matériel possède la symétrie de la sphère; f n'est alors fonction que du rayon r_0 et l'on a nécessairement :

$$u\,(x_0 y_0 z_0 t_0) = \frac{C}{r_0} \cos 2\pi\nu_0\,(t_0 + \tau_0). \qquad (9)$$

Si le point matériel, au lieu d'avoir une symétrie sphérique, avait une symétrie cylindrique autour de l'axe x_0, on pourrait prendre pour solution, au lieu de (9), la fonction :

$$u\,(x_0 y_0 z_0 t_0) = \frac{C x_0}{r_0^3} \cos 2\pi\nu_0\,[t_0 + \tau_0]. \qquad (10)$$

La fonction u étant ainsi obtenue dans le système propre, il suffit de faire une transformation de Lorentz pour en avoir l'expression dans un autre système galiléen. Si, par exemple, on revient au système dont le mobile décrit l'axe des z avec la vitesse v, la solution (9) prend la forme :

$$u\,(x, y, z, t) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(z - vt)^2}{1 - \beta^2}}} \cos 2\pi\nu \left[t - \frac{z}{V} + \tau \right]. \qquad (11)$$

La solution précédente et les solutions analogues telles que (10) correspondent aux anciennes mécaniques en ce sens que la phase est proportionnelle à l'action hamiltonienne. Il est curieux de constater qu'il existe d'autres solutions de (1) de même forme dont le pendant n'existe pas dans les anciennes mécaniques. Par exemple, plaçons-nous dans le système propre envisagé plus haut et cherchons une solution de la forme $f \sin 2\pi\nu'_0 t$ avec $\nu'_0 \neq \nu_0$; nous aurons à satisfaire la relation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_0^2} = \frac{4\pi^2}{c^2}(\nu_0^2 - \nu'^2_0) f. \tag{12}$$

Nous trouverons alors, comme « solutions à symétrie sphérique », les fonctions :

$$\left.\begin{aligned} f(r_0) &= \frac{C}{r_0}\cos 2\pi\left[\frac{\sqrt{\nu'^2_0 - \nu_0^2}}{c} r_0 + C'\right] \qquad &\text{si } \nu'_0 > \nu_0 \\ f(r_0) &= \frac{1}{r_0}\left[C e^{\frac{2\pi}{c}\sqrt{\nu_0^2 - \nu'^2_0}\, r_0} + C' e^{-\frac{2\pi}{c}\sqrt{\nu_0^2 - \nu'^2_0}\, r_0}\right] \qquad &\text{si } \nu_0 > \nu'_0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

et nous en déduirons, par une transformation de Lorentz, une solution pour un système galiléen quelconque. En prenant toujours la droite du mouvement pour axe des z, cette solution aura la forme :

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z - vt) \cos \frac{2\pi\nu'_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[t - \frac{\beta z}{c}\right]. \tag{14}$$

On peut dire que l'on obtient ainsi des mouvements inconnus de l'ancienne dynamique dans lesquels le mobile, au lieu d'avoir sa masse propre normale m_0, aurait une masse propre anormale $h\nu'_0/c^2$. L'écart qui se présente ici par rapport à l'état mécanique normal est caractérisé par une valeur non nulle de $\Box f$.

Nous sommes ainsi conduits au point de vue général suivant : la mécanique ondulatoire du point matériel libre est donnée par l'équation (1), dont *certaines* solutions correspondent aux anciennes dynamiques; mais il existe d'autres solutions dont les formules (13) donnent des exemples. Ces autres solutions indiquent comme possibles des états de mouvement non prévus par les anciennes théories ; le contenu de l'équation (1) est donc beaucoup plus riche que celui des équations différentielles des anciennes dynamiques.

2. **Représentation d'un nuage de points par une onde continue.** — Considérons un nuage de points matériels de même nature qui ne sont soumis à aucune force extérieure ou mutuelle et qui sont tous animés d'une même vitesse v dans une même direction Oz. Si le phénomène ondulatoire équivalent à chaque point a la forme normale (5), le phénomène global sera représenté par la fonction :

$$U(x, y, z, t) = \sum_i f_i(x, y, z - vt) \cos 2\pi\nu\left[t - \frac{vz}{c^2} + \tau_i\right]. \tag{15}$$

Nous ferons l'hypothèse simplificatrice (à laquelle, nous le verrons plus loin, il ne faut pas attacher trop d'importance) que les quantités τ_i sont égales. Les points matériels ont alors même phase et l'on peut écrire :

$$U = \left[\sum_i f_i(x, y, z - vt)\right] \cos 2\pi\nu\left[t - \frac{vz}{c^2}\right]. \tag{16}$$

L'amplitude donnée par le terme entre crochets comporte un grand nombre de singularités mobiles avec la vitesse v parallèlement à Oz.

Maintenant, l'équation (1) admet aussi la solution continue [1] :

$$\Psi(x, y, z, t) = a \cos 2\pi\nu\left[t - \frac{vz}{c^2}\right]. \tag{17}$$

(1) Nous désignerons toujours ici par Ψ les solutions continues des équations de propagation : nos fonctions Ψ sont donc identiques à celles que Schrödinger désigne par cette lettre.

Nous dirons que cette solution continue correspond à la solution à singularité donnée par (5). Nous appellerons densité du nuage le nombre de corpuscules par unité de volume et nous supposerons que cette densité a partout la valeur constante ρ. La constante a de la solution continue (17) pouvant être choisie arbitrairement, nous poserons

$$\rho = Ka^2, \tag{18}$$

K étant une constante donnée à l'avance. Nous voyons que la solution continue donnera, par son facteur trigonométrique, la répartition des phases dans le nuage de points tandis que le carré de son amplitude mesurera la densité du nuage.

Dans un fluide où la densité au point xyz est $\rho(x, y, z)$, la probabilité pour qu'une molécule prise au hasard soit dans un élément de volume dv entourant le point considéré est $\rho(x, y, z)\, dv$. Cette remarque va nous permettre de présenter ce qui précède sous une forme différente. Considérons un *seul* point matériel en mouvement rectiligne et uniforme ; supposons sa vitesse connue en grandeur et direction, mais inconnue sa position. Alors le produit $a^2 dv$ mesurera la probabilité pour que le point se trouve à un instant quelconque dans l'élément dv. On voit ainsi que la condition d'égalité des τ_i ; admise précédemment n'est pas essentielle puisque le nuage de points envisagé plus haut peut être maintenant considéré comme formé par l'ensemble des positions possibles d'un même point.

B. Cas des champs constants.

3. **Propagation d'un point matériel dans un champ constant.** — Nous envisageons d'abord le cas d'un champ constant défini par une fonction potentielle $F(x, y, z)$. La mécanique ondulatoire admet alors l'équation de propagation à laquelle doit satisfaire l'onde écrite sous forme complexe :

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\pi i}{h}\frac{F(x, y, z)}{c}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_0^2 c^2 - \frac{F^2}{c^2}\right] u = 0. \tag{19}$$

Nous imaginerons que le mobile commence par se déplacer dans une région R_0 de l'espace où la fonction F est nulle, puis pénètre dans la région R où règne le champ considéré. Dans la région R_0, l'équation (19) se réduit à (1) et le point matériel est alors, selon nous, représenté par la fonction :

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t)\cos\frac{2\pi}{h}\varphi. \tag{20}$$

La fonction f comporte une singularité mobile et la fonction φ est l'action hamiltonienne des anciennes mécaniques. Pour obtenir la représentation ondulatoire du point matériel là où règne le champ de forces, il faut prolonger la solution (20) dans la région R. Voyons à quelles relations doivent y satisfaire les fonctions f et φ. Pour cela, écrivons (20) sous forme complexe, substituons dans (19) et séparons le réel de l'imaginaire ; nous obtenons les 2 équations :

$$\frac{1}{f}\Box f = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{2F}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(m_0^2 c^2 - \frac{F^2}{c^2}\right)\right] \tag{21_1}$$

$$\sum_{xyz}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} f\,\Box\varphi + \frac{F}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{21_2}$$

Le champ étant constant, la région R est analogue à un milieu réfringent à propriétés constantes et, en y pénétrant, l'onde restera monochromatique avec la fréquence $\nu = \frac{W}{h}$

qu'elle possède dans R_0 ; dans la nouvelle mécanique, ceci exprime le fait que, dans un champ constant, l'énergie reste constante. On aura donc :

$$\varphi(x, y, z, t) = Wt - \varphi_1(x, y, z); \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = W = h\nu; \qquad \Box\varphi = \Delta\varphi. \tag{22}$$

L'équation (21_1) s'écrira donc :

$$\frac{1}{f}\Box f = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}(W-F)^2 + m_0{}^2c^2\right]. \tag{23}$$

Si le premier membre était négligeable, cette relation serait identique à l'équation de Jacobi dans la dynamique relativiste des champs constants et φ_1 serait la fonction de Jacobi. L'écart avec les anciennes mécaniques apparaît donc ici comme lié à la valeur non nulle de $\Box f$.

A l'approximation ancienne, la vitesse du point matériel passant en un point M est dirigée dans le sens du vecteur grad φ_1 en ce point. Nous *admettrons* qu'il en est de même quand on détermine rigoureusement f et φ.

D'après nos conceptions, le point matériel est une singularité de la fonction f où celle-ci devient infinie en raison inverse d'une certaine puissance de la distance. On a donc, en désignant par n une variable comptée dans une direction quelconque passant par la position M du mobile à l'instant t :

$$\left[\frac{f}{\dfrac{\partial f}{\partial n}}\right]_{M,t} = 0. \tag{24}$$

Comptons n suivant la normale en M à la surface $\varphi_1(x, y, z) = C^{te}$ et appliquons l'équation (21_2) en tenant compte de (22) et de (24); il vient :

$$\left[-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial t}}{\dfrac{\partial f}{\partial n}}\right]_{M,t} = \frac{c^2\,\mathrm{grad}\,\varphi_1}{W-F}. \tag{25}$$

En raison de l'hypothèse faite sur la direction de la vitesse, celle-ci est donc égale à :

$$\vec{v}_M = \frac{c^2\,\overrightarrow{\mathrm{grad}\,\varphi_1}}{W-F}. \tag{26}$$

A l'approximation des mécaniques anciennes, φ_1 se confond avec la fonction de Jacobi et la relation (26) est alors celle qui lie la quantité de mouvement et la vitesse dans la dynamique d'Einstein. Les raisonnements qui précèdent ont pour but de rendre vraisemblable que la relation (26) est valable en toute rigueur dans la nouvelle mécanique.

Nous préciserons plus loin (section III) ce qu'il faut entendre, en mécanique ondulatoire, par approximation newtonienne et nous verrons qu'à ce degré d'approximation, le dénominateur de (26) peut être remplacé par m_0c^2, de sorte qu'on a alors simplement :

$$\vec{v}_M = \frac{1}{m_0}\overrightarrow{\mathrm{grad}\,\varphi_1} \tag{26'}$$

4. **Propagation d'un nuage de points dans un champ constant.** — Soient maintenant des points matériels identiques et sans actions mutuelles qui, au début de leur mouvement, traversent la région R_0 en étant animés de la même vitesse dans la même direction. Si ces points ont même phase, au sens expliqué précédemment, on pourra représenter le nuage dans R_0 par la fonction (16). Nous admettrons que le prolongement de cette fonction dans la région R possède encore un facteur de phase unique, en d'autres termes que la fonc-

tion φ_1 $(x\ y\ z)$ du paragraphe précédent est la même pour tous les points du nuage. Ces points posséderont alors des vitesses définies par la relation (26) et leur mouvement est comparable au mouvement permanent des molécules d'un fluide, car la vitesse d'une particule, lors de son passage en un point, dépend seulement de la position de ce point et non de l'époque du passage. Lorsqu'il suffit d'employer la relation (26'), la fonction φ_1 joue le rôle de potentiel des vitesses.

D'après nos conceptions, les vitesses sont toujours tangentes aux courbes orthogonales de la famille de surfaces $\varphi_1 = C^{te}$; ces courbes sont donc les lignes de courant et elles forment des tubes à l'intérieur desquels les particules se déplacent. Comme ces tubes n'ont pas une section constante dans la région R, la densité ρ du fluide y varie d'un point à l'autre tout en restant constante en chaque point, puisque le mouvement est permanent. Dès lors, l'équation de continuité hydrodynamique nous donne une relation à laquelle doit satisfaire la fonction $\rho\,(x, y, z)$:

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \tag{27}$$

En tenant compte de (26), on peut écrire (27) :

$$\frac{\partial}{\partial n}\left[\log\left(\frac{\rho}{W-F}\right)\right] = -\frac{\Delta\varphi_1}{\operatorname{grad}\varphi_1}. \tag{28}$$

Comme dans le cas du mouvement uniforme, nous allons chercher à représenter le nuage de points par une onde continue. Dans la région R_0, le nuage peut être représenté par l'onde continue (17), la densité étant reliée à l'amplitude par la relation (18). L'onde continue (17) pénétrant dans la région R, où la propagation est régie par (19), va y être représentée par une fonction de la forme :

$$\Psi\,(x, y, z, t) = a\,(x, y, z) \cos\frac{2\pi}{h}\varphi'\,(x, y, z, t) = a\,(x, y, z)\cos 2\pi\left[\nu t - \frac{1}{h}\varphi'_1\,(x, y, z)\right]. \tag{29}$$

La région R_0 est analogue à un milieu réfringent homogène ; la région R, à un milieu réfringent non homogène ; la détermination des fonctions a et φ'_1 revient donc à la résolution d'un problème d'optique classique.

Si nous écrivons la solution (29) sous forme complexe et si nous la substituons dans l'équation (19), nous obtenons deux relations en séparant le réel de l'imaginaire :

$$\frac{1}{a}\Delta a = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right)^2 + \frac{2F}{c^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + \left(m_0{}^2c^2 - \frac{F^2}{c^2}\right)\right] \tag{30$_1$}$$

$$\sum_{xyz}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi'} + \frac{1}{2}a\Delta\varphi' = 0. \tag{30$_2$}$$

La forme de φ' permet d'écrire, à la place de (30_1) :

$$\frac{1}{a}\Delta a = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi'_1}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}(h\nu - F)^2 + m_0{}^2c^2\right]. \tag{31}$$

Si le premier membre est négligeable, on obtient l'équation de l'optique géométrique relative à l'équation de propagation (19). En comparant les équations (23) et (31), on voit que, si les premiers membres en sont négligeables, on obtient d'une part la mécanique ancienne, d'autre part l'optique géométrique. Les fonctions φ_1 et φ'_1 sont alors identiques ; elles se confondent avec la fonction de Jacobi.

Nous ferons maintenant l'hypothèse essentielle que φ_1 et φ'_1 sont encore identiques lorsque les premiers membres des équations (23) et (31) ne peuvent plus être négligés. Evidemment, ceci exige que l'on ait :

$$\frac{1}{a}\Delta a = \frac{1}{f}\square f. \tag{32}$$

Nous désignerons ce postulat sous le nom de « principe de la double solution », parce qu'il implique l'existence de deux solutions sinusoïdales de l'équation (19) ayant même facteur de phase, l'une comportant une singularité ponctuelle et l'autre ayant, au contraire, une amplitude continue. Naturellement, ce principe est provisoire en ce sens qu'il doit pouvoir être confirmé ou infirmé par des raisonnements rigoureux ; mais il est fortement suggéré par la nécessité de concilier la structure atomique de la matière et de la lumière avec les succès de l'optique classique et de la théorie de Schrödinger.

La fonction φ'_1 étant ainsi identifiée avec φ_1, la relation (30_2) va s'écrire :

$$\frac{2}{a}\frac{\partial a}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left[\log a^2\right] = -\frac{\Delta \varphi_1}{\operatorname{grad} \varphi_1}, \tag{33}$$

d'où, en comparant avec (28), l'on conclut que le long d'un tube de courant la quantité $\frac{\rho}{a^2\,(W-F)}$ reste constante. Puisque, dans la région R_0 où F est nul, on a la relation (18), on doit avoir dans R :

$$\rho\,(x, y, z) = Ka^2\,(x, y, z)\left[1 - \frac{F\,(x, y, z)}{W}\right]. \tag{34}$$

La fonction F étant donnée, on voit que la détermination de l'onde continue (29) doit donner la densité du nuage en chaque point.

Quand il est légitime de négliger l'énergie potentielle devant l'énergie totale (approximation newtonienne), on peut écrire la formule approchée :

$$\rho\,(x, y, z) = Ka^2\,(x, y, z). \tag{34'}$$

Nous pouvons évidemment envisager ce qui précède sous un angle différent en supposant que les particules du nuage sont seulement *la répétition du même point matériel.* Nous supposons, en effet, la vitesse initiale dans la région R_0 donnée en grandeur et direction ; si nous ne savons rien de plus, c'est-à-dire si toutes les *positions* initiales du mobile sont également probables, à chaque hypothèse sur la position initiale correspondra un mouvement et, en juxtaposant par la pensée toutes ces possibilités, nous obtiendrons l'équivalent du mouvement d'un nuage infiniment dense de points identiques. La probabilité pour que le point matériel soit, à un instant donné, effectivement présent dans un élément de volume dv entourant le point de coordonnées $x\ y\ z$ de la région R est alors évidemment proportionnelle à $\rho\,(x, y, z)\,dv$; elle est donc donnée en fonction des grandeurs de l'onde continue par les formules (34) ou (34'). La forme des trajectoires est d'ailleurs également déterminée par la connaissance de l'onde continue, puisque ces trajectoires sont orthogonales aux surfaces d'égale phase.

Comme exemple, considérons un nuage de particules électrisées, animées de la même vitesse dans la même direction, qui viennent passer aux environs d'un centre chargé immobile ; suivant la distance à ce centre de sa trajectoire rectiligne initiale, chaque particule sera plus ou moins déviée et l'ancienne mécanique permet de calculer la proportion des particules déviées dans une direction donnée lorsqu'on suppose uniforme la densité du nuage incident : c'est là le calcul fait par Sir E. Rutherford pour prévoir la diffusion des rayons β par la matière. La nouvelle mécanique adopte un autre point de vue et considère l'espace autour du centre comme présentant un indice de réfraction par rapport aux ondes des électrons incidents. Si les idées proposées plus haut sont exactes, le résultat statistique de la diffusion doit pouvoir s'obtenir comme il suit : on considérera une onde plane continue tombant sur une sphère réfringente dont l'indice varie suivant une loi convenable en fonction de la distance au centre et l'on calculera les intensités diffusées dans les diverses directions ; ces intensités doivent donner les proportions relatives d'électrons diffusés dans ces directions. C'est bien ce qui parait résulter d'un intéressant calcul de G. Wentzel [1], qui a ainsi retrouvé en première approximation la loi de Rutherford.

[1] *Zts. f. Phys.*, t. 40 (1926), p. 590. J'avais pressenti ce résultat dans mon livre *Ondes et mouvements*, p. 84.

C. *Cas des champs variables.*

5. **Équation de propagation**. — L'équation de propagation correspondant au mouvement d'un point de charge électrique e dans un champ électromagnétique défini par un potentiel scalaire $\mathcal{V}(x, y, z, t)$ et un potentiel vecteur $\vec{A}(x,y,z,t)$ est ([2]) :

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\pi i}{h}\frac{eV}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{4\pi i}{h}\sum_{xyz}\frac{e}{c}A_x\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_0{}^2c^2 - \frac{e^2}{c^2}(\mathcal{V}^2 - A^2)\right]u = 0. \quad (35)$$

En principe, il faut toujours introduire les termes contenant le potentiel vecteur, car, d'après la relation de Lorentz, le potentiel vecteur ne peut pas être nul si le potentiel scalaire est variable. Si, néanmoins, l'influence de ces termes est négligeable, on pourra se contenter d'écrire, en posant $F(x, y, z, t) = eV$:

$$\Box u + \frac{4\pi i}{h}\frac{F}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_0{}^2c^2 - \frac{F^2}{c^2}\right]u = 0. \quad (35')$$

Nous allons toujours supposer que le mobile envisagé commence par se déplacer dans une région R_0 de l'espace où les potentiels sont nuls puis pénètre dans la région R où existe le champ variable considéré. Nous cherchons encore à prolonger la solution du type (5), valable dans R_0, par une solution de (35) ayant la forme :

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t)\cos\frac{2\pi}{h}\varphi(x, y, z, t), \quad (36)$$

f présentant une singularité mobile. En substituant dans (35), on obtient toujours deux équations :

$$\frac{1}{f}\Box f = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{2e\mathcal{V}}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + 2\frac{e}{c}\sum_{xyz}A_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + m_0{}^2c^2 - \frac{e^2}{c^2}(\mathcal{V}^2 - A^2)\right]. \quad (37_1)$$

$$\sum_{xyz}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}f\Box\varphi + \frac{e\mathcal{V}}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{c}\sum_{xyz}A_x\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (37_2)$$

Si le premier membre de (37_1) était négligeable, $\varphi(x,y,z,t)$ serait la fonction de Jacobi de la dynamique relativiste des champs variables. L'écart à partir des anciennes mécaniques est donc toujours lié à une valeur non nulle de $\Box f$.

A l'approximation des anciennes théories, la vitesse du point matériel passant en $M(x,y,z)$ à l'instant t est dirigée dans le sens du vecteur quantité de mouvement qui est défini par la relation :

$$\vec{g} = -\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}\,\varphi} + \frac{e}{c}\vec{A}\right]. \quad (38)$$

Comme précédemment, nous admettrons qu'il en est encore de même si l'on considère les solutions rigoureuses de l'équation de propagation.

La relation (24) doit évidemment être ici encore valable. Nous l'appliquerons en choisissant pour n la variable comptée à l'instant t et au point M suivant la direction du vecteur $\vec{g}$. L'équation (37_2) devient alors :

$$\left[-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial t}}{\dfrac{\partial f}{\partial n}}\right]_{M,t} = \frac{c^2 g}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}}, \quad (39)$$

([2]) J. P. équation (59).

et l'hypothèse faite sur la direction de la vitesse nous donne :

$$\vec{v}(M, t) = \frac{c^2 \vec{g}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}}, \tag{40}$$

relation dont (26) est évidemment un cas particulier. A l'approximation de l'ancienne mécanique, l'équation (40) est celle qui lie la quantité de mouvement et la vitesse.

Ici encore, si l'énergie de mouvement est faible devant l'énergie interne $m_0 c^2$, on aura:

$$\vec{v}(M, t) = \frac{1}{m_0} \vec{g}. \tag{40'}$$

6. **Propagation d'un nuage de points.** — Il est tout indiqué de transposer dans le cas des champs variables les considérations du paragraphe 4. Nous envisagerons de nouveau un nuage de points identiques, sans actions réciproques et « en phase » qui, au début de leur mouvement, traversent la région R_0 dans la même direction avec la même vitesse. Ce nuage, dont la densité dans R_0 sera supposée uniforme, y sera représenté par la fonction (16) ; prolongée dans la région R, cette solution présenterait une phase unique si les approximations de la mécanique ancienne étaient valables, cette phase étant alors donnée par la fonction de Jacobi. Nous admettrons que, dans la solution rigoureuse, la phase est encore unique, c'est-à-dire que dans R le nuage peut se représenter par la fonction :

$$U(x, y, z, t) = \left[\sum_i f_i(x, y, z, t)\right] \cos \frac{2\pi}{h} \varphi(x, y, z, t), \tag{41}$$

la fonction f_i présentant une singularité mobile.

Les vitesses sont données par la formule (40) mais, le mouvement n'étant naturellement pas permanent, l'équation de continuité doit s'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\frac{\rho c^2 \vec{g}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}}\right] = 0. \tag{42}$$

Introduisons la notation :

$$\rho' = \rho \cdot \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}}. \tag{43}$$

Nous trouvons facilement, en tenant compte de (38) et de la relation de Lorentz entre les potentiels, l'équation :

$$g \frac{\partial (\log \rho')}{\partial n} + \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}\right] \frac{\partial (\log \rho')}{\partial t} = \Box \varphi. \tag{44}$$

Comme précédemment, nous allons chercher à représenter la propagation d'un nuage par celle d'une onde continue du type classique. Dans R_0, cette onde sera de la forme (17), l'amplitude étant reliée à la densité par la relation (18). La région R joue le rôle d'un milieu réfringent dont l'indice en chaque point varie avec le temps et l'onde continue, en y pénétrant, prendra la forme :

$$\Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) \cos \frac{2\pi}{h} \varphi'(x, y, z, t). \tag{45}$$

(45) diffère de (29) parce que a dépend du temps et que φ' n'est plus linéaire en t. Naturel

lement, Ψ doit satisfaire à l'équation de propagation (35), ce qui nous conduit, comme d'habitude, à deux relations :

$$\frac{1}{a}\Box a = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{e\mathcal{V}}{c^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} \quad \frac{2e}{c}\sum_{xyz}A_x\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + m_0^2c^2 - \frac{e^2}{c^2}(\mathcal{V}^2 - A^2)\right] \quad (46_1)$$

$$\sum_{xyz}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + \frac{1}{2}a\,\Box\varphi' + \frac{e\mathcal{V}}{c^2}\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{e}{c}\sum_{xyz}A_x\frac{\partial a}{\partial x} = 0. \quad (46_2)$$

Nous introduirons encore le principe de la double solution en supposant que la fonction φ' est identique à la fonction φ, c'est-à-dire qu'à la solution (41), dont l'amplitude comporte des singularités, doit correspondre une solution à amplitude continue ayant même facteur de phase. Ceci entraîne d'ailleurs, par comparaison entre (37_1) et (46_1), l'égalité :

$$\frac{1}{a}\Box a = \frac{1}{f}\Box f. \quad (47)$$

Ceci admis, l'équation (46_2) nous donne :

$$g\,\frac{\partial\,(\log a^2)}{\partial x} + \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - eV\right]\frac{\partial\,(\log a^2)}{\partial t} = \Box\varphi. \quad (48)$$

En comparant avec (44), on voit qu'en suivant le mouvement des mêmes particules du nuage, le quotient $\frac{\rho'}{a}$ reste constant. Puisque, dans R_0, la relation (18) est valable, on a en tout point de R et à tout instant :

$$\rho\,(x, y, z, t) = \frac{K}{W_0}\,a^2\,(x, y, z, t)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}\right] = K'a^2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}\right] \quad (49)$$

Si l'énergie cinétique est faible devant l'énergie interne m_0c^2, on peut ici encore considérer la densité du nuage comme proportionnelle au carré de l'amplitude de Ψ.

On peut naturellement regarder le nuage comme étant formé par l'ensemble de toutes les positions possibles d'un même point matériel dont on connaît seulement la vitesse dans R_0 en grandeur et direction. La probabilité pour que le mobile se trouve à l'instant t dans un volume dv entourant le point xyz est $\rho\,(x, y, z, t)\,dv$ et elle est déterminée par l'équation (49) en fonction des grandeurs de l'onde continue.

7. **Le vecteur courant dans le nuage de points électrisés.** — Suivant le procédé bien connu, nous pouvons définir en chaque point de notre nuage et à chaque instant un quadri-vecteur courant dont les composantes seront, en posant $ict = x_4$:

$$s_1 = \rho e\frac{v_x}{c}, \qquad s_2 = \rho e\frac{v_y}{c}, \qquad s_3 = \rho e\frac{v_z}{c}, \qquad s_4 = i\rho e. \quad (50)$$

En tenant compte de (38), (40) et (49), on trouve aisément :

$$s_1 = -K'^2eac\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x\right]\ \dots \qquad s_4 = ieK'a^2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}\right]. \quad (51)$$

Introduisons le quadrivecteur $\vec{P}$ de composantes :

$$P_1 = A_x, \qquad P_2 = A_y, \qquad P_3 = A_z, \qquad P_4 = i\mathcal{V}. \quad (52)$$

On a alors :

$$s_\alpha = -K'ea^2c\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} + \frac{e}{c}P_\alpha\right] \quad (53)$$

Cette expression du courant d'Univers coïncide avec celle qu'ont proposée MM. Gordon [1] et Schrödinger [2]. En effet, ces auteurs partent d'une fonction qui s'écrit avec nos notations :

$$L = \sum_{1}^{4}{}_{\alpha} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha} + \frac{2\pi e}{hc} i P_\alpha \Psi \right) \left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x_\alpha} - \frac{2\pi e}{hc} i P_\alpha \overline{\Psi} \right) + \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2} \overline{\Psi} \Psi \right] \tag{54}$$

où Ψ, désigne ici l'onde continue écrite sous forme complexe et $\overline{\Psi}$, la fonction conjuguée; puis ils définissent le quadrivecteur courant par la formule :

$$s_\alpha = -\lambda \frac{\partial L}{\partial P_\alpha}, \tag{55}$$

λ étant une constante d'homogénéité. Or il est facile de vérifier que les expressions (53) et (55) concordent.

III. Passage des anciennes mécaniques a la nouvelle.

8. Les équations de Lagrange en mécanique ondulatoire. — Si nous jetons les yeux sur les équations générales (37_1) et (46_1) en tenant compte du principe de la double solution et de l'équation (47) qui en découle, nous voyons qu'on peut écrire *rigoureusement* l'équation de Jacobi sous sa forme habituelle, à condition d'attribuer au mobile la masse propre variable :

$$M_0 (x, y, z, t) = \sqrt{m_0^2 - \frac{h^2}{4\pi^2 c^2} \frac{\Box a}{a}}. \tag{56}$$

Les anciennes dynamiques négligent le second terme sous le radical, ce qui revient à supposer h infiniment petit.

Cela étant, la nouvelle mécanique peut faire usage du principe d'Hamilton et des équations de Lagrange à condition d'y introduire la masse variable M_0. Nous allons le vérifier en négligeant, pour simplifier, le potentiel vecteur. Le principe d'Hamilton va s'écrire sous la forme :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0 \tag{57}$$

avec

$$L = -M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - F. \tag{58}$$

On est conduit, comme de coutume, aux équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial v_x} \right] = \frac{\partial L}{\partial x}, \text{ etc.} \tag{59}$$

et on définit les composantes de la quantité de mouvement par les formules :

$$g_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{M_0 v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \text{ etc.} \tag{60}$$

On nommera toujours énergie l'expression (constante dans un champ constant) :

$$W = \sum_{xyz} g_x v_x - L = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + F. \tag{61}$$

(1) *Zts. f. Phys.*, t. 40 (1926), p. 117.
(2) *Ann. der Phys.*, t. 82 (1927), p. 265. — Voir aussi O. Klein [*Zts. f. Phys.*, t. 21 (1927), p. 407].

A l'aide des formules (60) et (61), on vérifie qu'en posant :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = W, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - g_x, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - g_y, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - g_z. \tag{62}$$

on obtient l'équation de Jacobi :

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - F\right)^2 - \sum_{xyz}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 = M_0^2 c^2 \tag{63}$$

et cette relation, compte tenu de la définition de M_0, est bien la forme que prennent (37_1 et (46_1) dans le cas actuel. Notons aussi qu'en combinant (60) et (61), on retrouve de suite, pour la vitesse, la formule fondamentale (40).

En résumé, *si l'on suppose connue la fonction* $a(x, y, z, t)$, la théorie de Lagrange-Hamilton permet de calculer la forme des trajectoires et la loi du mouvement des particules du nuage.

Précisons maintenant en quoi consiste, dans la nouvelle mécanique, l'approximation newtonienne. Elle attribuera à β une valeur assez petite pour qu'on puisse négliger son carré devant l'unité ; mais, de plus, elle regardera le second terme sous le radical dans (56) comme suffisamment petit devant le premier pour qu'il soit permis d'écrire :

$$M_0(x, y, z, t) = m_0 + \varepsilon(x, y, z, t), \tag{64}$$

$\frac{\varepsilon}{m_0}$ *étant de l'ordre de* β^2. Dès lors, on aura, pour la quantité de mouvement et l'énergie, les formules approximatives :

$$g_x = m_0 v_x, \qquad g_y = m_0 v_y, \qquad g_z = m_0 v_z, \qquad W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \varepsilon c^2 + F. \tag{65}$$

et, chaque fois qu'il s'agit de la valeur absolue de W et non de ses variations, nous pourrons la prendre égale à $m_0 c^2$, ce qui légitime, en particulier, le passage de (40) à (40'). Enfin, la fonction de Lagrange (58) prend la forme approchée :

$$L = - m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 - \varepsilon c^2 - F. \tag{66}$$

Tout se passe donc comme s'il existait, outre F, un terme d'énergie potentielle εc^2.

IV. Cas du mouvement d'un système de points matériels.

9. **Point de vue de M. Schrödinger.** — Dans ses travaux, M. Schrödinger envisage systématiquement les solutions continues des équations de propagation. Nous avons entrevu comment l'exactitude des résultats que l'on obtient ainsi peut se concilier avec l'existence de la structure discontinue de la matière dans le cas d'un seul point matériel.

Passons maintenant au cas d'un système isolé de N points matériels, dont je désignerai les masses *propres* par $m_1 m_2 \ldots m_N$. Se limitant à l'approximation newtonienne, Schrödinger considère l'espace de configuration qu'on peut construire avec les $3N$ coordonnées $x_1 y_1 \ldots z_N$ des N points et il envisage la propagation d'une onde dans cet hyperespace. E étant l'énergie totale au sens newtonien, et $F(x_1 \ldots z_N)$, la fonction d'énergie potentielle, la propagation s'effectuerait, d'après Schrödinger, conformément à l'équation :

$$\sum_1^N \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2}\right] + \frac{8\pi^2}{h^2}[E - F]\, u = 0. \tag{67}$$

Cette hypothèse paraît naturelle, car l'équation (19), valable pour un point dans un champ constant, peut s'écrire, à l'approximation newtonienne, en tenant compte de la forme de u et en supprimant l'indice de la masse propre :

$$\frac{1}{m}\Delta u + \frac{8\pi^2}{h^2}[E - F]\, u = 0, \tag{67'}$$

forme dont (67) est bien la généralisation.

Mais l'équation (67) soulève deux difficultés. D'abord, dans les idées de Schrödinger, le point matériel formé par un groupe d'ondes n'aurait pas le caractère d'une singularité ponctuelle et, en microméanique, on ne pourrait plus parler de sa position ni de sa trajectoire. Mais alors, quel serait le sens des coordonnées $x_1 \ldots z_N$ avec lesquelles on construit l'espace abstrait de configuration? Cette difficulté disparaît si l'on admet avec nous que le point matériel est toujours bien défini.

Mais il y a une autre difficulté. Physiquement, il ne peut, en effet, être question d'une propagation dans l'espace de configuration dont l'existence est purement abstraite : l'image ondulatoire de notre système doit comporter N ondes se propageant dans l'espace réel et non une seule onde se propageant dans l'espace de configuration. Quel est donc le sens véritable de l'équation de Schrödinger? C'est ce qu'il nous faut chercher.

10. Signification de l'équation (67). — Pour simplifier, nous allons considérer un système isolé formé par deux points matériels, l'extension des raisonnements au cas de N points ne présentant aucune difficulté de principe. Pour nous, chacun des deux points constitue une singularité dans un phénomène ondulatoire dont l'espace est le siège. Si nous négligeons les actions magnétiques, la propagation des deux ondes se fait suivant les équations :

$$\left.\begin{aligned} \Box u_1 + \frac{4\pi i}{h}\frac{F_1}{c^2}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_1{}^2c^2 - \frac{F_1}{c^2}\right]u_1 = 0 \\ \Box u_2 + \frac{4\pi i}{h}\frac{F_2}{c^2}\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_2{}^2c^2 - \frac{F_2}{c^2}\right]u_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Il faut bien distinguer les variables xyz, qui repèrent un point quelconque de l'espace, des coordonnées $x_1y_1z_1$ et $x_2y_2z_2$ des deux points matériels. Conformément au principe de l'action et de la réaction, nous attribuerons aux fonctions potentielles $F_1\,(x,y,z,x_2,y_2,z_2)$ et $F_2\,(x,y,z,x_1,y_1,z_1)$ les formes suivantes :

$$F_1 = F\left(\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}\right) \qquad F_2 = F\left(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}\right) \tag{69}$$

de telle sorte que la valeur de F_1 au point occupé par le premier mobile est égale à la valeur de F_2 au point occupé par le second; r étant la distance des deux mobiles, cette valeur commune est $F(r)$. La propagation dans l'espace de chacune des deux ondes dépend donc, en chaque point, de la valeur du potentiel qui correspond à la position simultanée de la singularité dans l'autre onde.

Il faut trouver pour chacune des équations (68) une solution comportant une singularité telle que l'ensemble des deux relations soit satisfait. Adoptons, avec Schrödinger, l'approximation newtonienne. Dans les anciennes mécaniques, il existe une fonction de Jacobi du système $\varphi\,(x_1 \ldots z_2)$ telle que les quantités de mouvement soient :

$$m_1 v_{1x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \text{ etc} \qquad m_2 v_{2x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \text{ etc.} \tag{70}$$

La nouvelle mécanique peut-elle, à l'approximation newtonienne, définir une telle fonction φ? Pour un instant, nous allons considérer le mouvement du deuxième point matériel comme connu ; le mouvement du premier s'opère alors dans un champ qui est une fonction connue de x, y, z, t, cas que nous avons examiné. Si l'état initial de vitesse du premier point est supposé donné, nous savons que l'ensemble de ses mouvements possibles est représenté par une onde à amplitude continue

$$a_1(x, y, z, t)\, e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi_1(x, y, z, t)}.$$

D'après le dernier paragraphe, on peut alors écrire les équations du mouvement sous la forme de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L_1}{\partial v_{1x}}\right] = \frac{\partial L_1}{\partial x_1}, \text{ etc.} \tag{71}$$

en posant :

$$L_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \varepsilon_1 (x_1 y_1 z_1 t)\, c^2 - F(r). \tag{72}$$

De même, en considérant le mouvement du premier point comme connu, celui du second point sera déterminé par les équations :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L_2}{\partial v_{2x}}\right] = \frac{\partial L_2}{\partial x_2}, \text{ etc.} \tag{73}$$

avec

$$L_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \varepsilon_2 (x_2 y_2 z_2 t)\, c^2 - F(r). \tag{74}$$

Il s'agit de résoudre simultanément les équations (71) et (73). En mécanique classique, il est possible de trouver une fonction de Lagrange L pour tout le système telle que les équations (71) et (73) s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q'}\right] = \frac{\partial L}{\partial q} \qquad \left(q' = \frac{dq}{dt}\right), \tag{75}$$

q étant une quelconque des 6 variables $x_1 \ldots z_2$; on sait qu'il est alors possible de définir une fonction de Jacobi $\varphi(x_1 \ldots z_2)$ vérifiant les relations (70). J'ai montré ailleurs [1] que, pour pouvoir obtenir cette fonction L, il faut pouvoir séparer, dans L_1 et L_2, les termes dépendant des actions mutuelles de ceux qui n'en dépendent pas ; cette séparation étant supposée réalisée, on prend pour fonction L la somme des termes de la deuxième sorte augmentée de la demi-somme des termes de la première sorte. On peut procéder ainsi en mécanique classique parce qu'on néglige, dans L_1 et L_2, les termes en ε_1 et ε_2, ce qui permet d'écrire :

$$L = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - F(r). \tag{76}$$

Pour qu'il puisse en être de même en mécanique nouvelle, il faut que ε_1 et ε_2 se réduisent à une *même* fonction de la distance r ; autrement dit, les termes supplémentaires d'énergie potentielle introduits par les nouvelles conceptions doivent avoir le même caractère mutuel que ceux définis par les fonctions F_1 et F_2. C'est là l'extension naturelle du principe de l'action et de la réaction. Si nous l'admettons, nous pourrons former la fonction de Lagrange du système en ajoutant au second membre de (76) le nouveau terme mutuel $-\varepsilon(r)c^2$ et nous en déduirons, comme d'habitude, l'existence d'une fonction $\varphi(x_1 \ldots z_2)$ vérifiant les équations (70).

Comme, pour nous, les points matériels ont des coordonnées tout à fait définies, nous pourrons construire un espace de configuration sans ambiguïté. Le système des 2 mobiles y sera figuré par un point représentatif dont les six composantes de vitesse seront données par les relations (70). Supposons toujours que les vitesses initiales soient données mais non pas les positions initiales ; aux diverses hypothèses que nous pourrons faire sur ces positions initiales correspondront diverses trajectoires du point représentatif et, à l'ensemble de

(1) *Ondes et mouvements*, p. 43 et suivantes.

toutes les possibilités conçues simultanément, correspondra un nuage de points représentatifs. Le mouvement de ce nuage est permanent et obéit à l'équation de continuité:

$$\operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0, \tag{77}$$

où ρ $(x_1 \ldots z_2)$ est la densité du nuage, et v, sa vitesse. En tenant compte de (70), cette équation s'écrit, avec des notations dont le sens est évident :

$$\sum_{xyz}\left[\frac{1}{m_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial(\log\rho)}{\partial x_1} + \frac{1}{m_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial(\log\rho)}{\partial x_2}\right] + \frac{1}{m_1}\Delta_1\varphi + \frac{1}{m_2}\Delta_2\varphi = 0, \tag{78}$$

Or, si nous considérons l'équation (67) de Schrödinger et si nous en cherchons une solution continue de la forme:

$$\Psi(x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 t) = A(x_1 \ldots z_2)\, e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi} \tag{79}$$

nous trouvons, en substituant, que A doit satisfaire la relation :

$$\sum_{xyz}\left[\frac{1}{m_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial(\log A^2)}{\partial x_1} + \frac{1}{m_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial(\log A^2)}{\partial x_2}\right] + \frac{1}{m_1}\Delta_1\varphi + \frac{1}{m_2}\Delta_2\varphi = 0. \tag{80}$$

D'après (78) et (80), l'amplitude A de l'onde fictive (79) va donc jouer ici le même rôle que l'amplitude de l'onde continue dans le cas d'un seul point; autrement dit, le produit $A^2\,dv$ va mesurer en chaque point de l'espace de configuration la probabilité de présence du point représentatif dans l'élément de volume dv.

Cette conclusion est confirmée par la remarque suivante : si les deux points sont sans action mutuelle, l'équation de Schrödinger admet comme solution le *produit* des fonctions continues Ψ relatives aux deux points et, les probabilités de présence des deux points étant alors tout à fait indépendantes, ceci est bien d'accord avec le théorème des probabilités composées.

En résumé : 1° L'équation de Schrödinger n'a de sens que s'il est possible de construire un espace de configuration, c'est-à-dire si les points matériels ont une position bien définie dans l'espace. 2° Cette équation n'est pas une véritable équation de propagation physique, mais elle fournit, par le carré de l'amplitude de la solution appropriée, la probabilité pour que le système soit dans un état donné quand on ignore la position initiale de ses constituants.

J'ajouterai qu'il paraît difficile de trouver une équation jouant un rôle analogue à (67) si l'on ne veut pas se contenter de l'approximation newtonienne.

Le beau calcul de Fermi relatif à la diffusion des électrons par un rotateur peut être regardé comme une illustration de ce qui précède(1).

V. Résumé et remarques.

11. **L'onde pilote.** — Si l'on examine l'ensemble des résultats obtenus dans la section II on voit qu'ils se résument par les deux formules fondamentales (40) et (49) :

$$\left\{\begin{aligned} \vec{v} &= -c^2\,\frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}\varphi} + \frac{e}{c}\vec{A}}{\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}} && \text{(I)} \\ \rho(x,y,z,t) &= C^{te} \times a^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}\right). && \text{(II)} \end{aligned}\right.$$

Je suis parvenu à la première de ces relations (dont la seconde est une conséquence) par le principe de la double solution. Ce principe se vérifie dans le cas de l'absence de

(1) *Zts. f. Phys.*, t. **40** (1926), p. 399.

champ, mais reste une hypothèse dans le cas général. Il est, à mon avis, nécessaire de conserver, même en micromécanique, la notion d'atomicité de la matière, ne serait-ce que pour donner un sens à l'équation (67) de Schrödinger. Mais si l'on ne veut pas invoquer le principe de double solution, il est admissible d'adopter le point de vue suivant : on admettra l'existence, en tant que réalités distinctes, du point matériel et de l'onde continu. représentée par la fonction Ψ et l'on prendra comme postulat que le mouvement du point est déterminé en fonction de la phase de l'onde par l'équation (I). On conçoit alors l'onde continue comme guidant le mouvement de la particule. C'est une onde pilote.

En prenant ainsi l'équation (I) comme postulat, on évite d'avoir à la justifier par le principe de double solution ; mais ce ne peut être, je crois, qu'une attitude provisoire. Il faudra bien, sans doute, *réincorporer* le corpuscule dans le phénomène ondulatoire et l'on sera probablement ramené à des idées analogues à celles qui ont été développées plus haut.

Je vais indiquer deux des applications les plus importantes des formules (I) et (II).

Pour la lumière, l'onde continue Ψ est celle qu'envisage l'Optique classique et puisque d'après (II), la densité des photons est proportionnelle au carré de l'amplitude, les phénomènes de l'Optique ondulatoire vont être prévus de même par l'ancienne et par la nouvelle théorie de la lumière.

Nos formules fondamentales paraissent aussi conduire à justifier une des hypothèses de M. Schrödinger. Considérons un ensemble d'atomes d'hydrogène dont l'état est défini, au point de vue de Schrödinger, par une même fonction Ψ somme de fonctions fondamentales. Pour nous, l'électron a dans chaque atome une position et une vitesse bien déterminées, mais si, par la pensée, nous superposons tous les atomes, nous obtenons une sorte d'atome moyen où la densité de l'électricité est évidemment donnée, à l'approximation newtonienne, d'après (II), par :

$$\delta = e\rho = C^{te} \times a^2 = C^{te}\, \Psi \overline{\Psi}.$$

Cette expression est bien celle qu'a proposée Schrödinger ; elle nous apparaît ici comme définissant une sorte de densité moyenne.

Il est du reste aisé de retrouver, en se plaçant à ce point de vue, toutes les formules de la théorie des matrices d'Heisenberg sous la forme qui leur a été donnée par Schrödinger.

12. Les états contraints du point matériel. — Dans le mémoire déjà cité, M. Schrödinger a donné l'expression du tenseur énergie-quantité de mouvement correspondant aux ondes continues Ψ. Si l'on attribue aux ondes continues le sens précisé plus haut, ce tenseur se décompose en un tenseur donnant l'énergie et la quantité de mouvement des particules et un tenseur qui correspondrait à des tensions existant dans le phénomène ondulatoire autour des particules. Ces tensions sont nulles dans les états mécaniques conformes aux anciennes dynamiques : elles caractérisent les états nouveaux prévus par la mécanique ondulatoire [ceux des formules (13), par exemple], qui apparaissent ici comme des états contraints du point matériel.

Cette remarque permet de lever une difficulté relative à la pression exercée sur une paroi par un flux de corpuscules. D'ordinaire, on calcule cette pression en supposant que les corpuscules rebondissent sur la paroi et lui communiquent par choc une certaine impulsion ; c'est ainsi qu'on prévoit la pression d'un gaz en théorie cinétique ou celle d'un rayonnement noir dans la théorie corpusculaire de la lumière.

Mais, au point de vue de la mécanique ondulatoire, il existe au voisinage de la paroi un état d'interférence dû à la superposition des ondes incidentes et réfléchies, et l'application de la formule (I) montre que les particules ne viennent plus frapper la paroi. Comment celle-ci subit-elle alors une pression ? Ce ne peut être que par l'intermédiaire des tensions qui règnent dans la région d'interférence. Du fait de ces tensions, la paroi doit subir la même pression que si les particules lui communiquaient une impulsion en venant rebondir à sa surface : c'est bien ce que montre un calcul effectué en se servant des formules de Schrödinger.

Manuscrit reçu le 1er Avril 1927.

PARIS. — SOCIÉTÉ GÉNÉRALE D'IMPRIMERIE ET D'EDITION, 17, RUE CASSETTE