1° On peut poser $\alpha_i = e_i$, $\varepsilon = +1$, et

$$I = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \qquad r(\alpha) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{Bmatrix}, \qquad r'(\alpha) = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

La relation du nouveau genre (1) donne alors neuf équations entre les éléments d'un polygone sphérique embrassant, comme cas particulier, les équations fondamentales, dites de Gauss, de la trigonométrie sphérique.

2° On peut poser $\alpha_i = d_i$, $\varepsilon = \pm 1$, et

$$I = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

$$r(\alpha) = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{Bmatrix}, \qquad r'(\alpha) = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{Bmatrix}.$$

La relation du nouveau genre (1) nous donne alors les équations renfermant, comme cas particulier, pour un triangle sphérique, les équations fondamentales, dites de Delambre.

Dans la résolution numérique usuelle des polygones le signe de ε est arbitraire.

Pour résoudre un polygone sphérique par rapport à trois éléments consécutifs, par exemple α_1, α_2, α_3, on n'a qu'à faire passer tous les opérateurs r et r' dépendant des quantités connues, au second membre de (1), et l'on détermine numériquement ce second membre ; le reste du travail consiste en opérations bien connues. Il convient de remarquer qu'il suffit, dans le cas des formules de Delambre (généralisées), de prendre une seule colonne du produit, tandis que, dans le cas des formules de Gauss (généralisées), une colonne peut donner deux inconnues.

On remarquera une connexion intime entre deux systèmes fondamentaux de la trigonométrie sphérique, celui de Gauss et celui de Delambre, connexion qui est apparue dans le traitement, par les formules de nouveau genre, du problème fondamental de la polygonométrie.

Dans une partie de notre travail nous sommes éminemment redevable aux recherches antérieures d'Euler, de Gauss et de Monge.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Corpuscules et ondes* Ψ.
Note [1] de M. **Louis de Broglie**, présentée par M. M. de Broglie.

Dans une Note récente [2], nous avons établi une liaison générale entre le mouvement des corpuscules de matière et de lumière et la propagation des ondes Ψ de la Mécanique ondulatoire. En conservant les mêmes notations, on peut étendre ces résultats. Il est d'abord facile de montrer que les équations de Lagrange dans la nouvelle Mécanique sont :

$$(1) \qquad \frac{d}{ds}(M_0 c u_l) = \frac{1}{2} M_0 c u^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + c u^i \left(\frac{\partial P_i}{\partial x^l} - \frac{\partial P_l}{\partial x_i} \right) + c \frac{\partial M_0}{\partial x^l}.$$

On voit figurer au second membre, en plus de la force gravifique et de la force électromagnétique, une force d'un genre nouveau due à la variabilité de la masse propre. Dans les phénomènes de diffraction de la lumière, c'est cette force supplémentaire qui courbe la trajectoire des photons. Les partisans de la théorie de l'émission disaient que le bord d'un écran exerce une force sur le corpuscule de lumière ; c'est en somme une idée analogue que nous retrouvons ici.

Supposons le champ gravifique nul et considérons un nuage de corpuscules associés à une même onde Ψ. En multipliant (1) par $M_0 a^2$ et en tenant compte de l'équation de continuité, on trouve aisément :

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial x^k}[T_i^k + \Pi_i^k + S_i^k] = 0,$$

S_i^k est le tenseur des tensions électromagnétiques ; T_i^k et Π_i^k sont définis par les formules

$$(3) \qquad \begin{cases} T_i^k = \rho_0 M_0 u_i u^k, \\ \Pi_i^k = g^{kl}\left[2 \dfrac{\partial a}{\partial x^i}\dfrac{\partial a}{\partial x^l} - g_{il}\left(g^{mn}\dfrac{\partial a}{\partial x^m}\dfrac{\partial a}{\partial x^n} - a\Box a\right)\right]. \end{cases}$$

Les T_i^k sont les composantes du tenseur énergie-quantité de mouvement des corpuscules ; les Π_i^k représentent, *en moyenne*, des tensions internes existant *autour des corpuscules*. Donc, quand a n'est pas constant, tout se passe comme si une partie de l'énergie des corpuscules se transformait en

---

(1) Séance du 14 novembre 1927.

(2) *Comptes rendus*, 185, 1927, p. 380. Voir aussi L. Rosenfeld, *Ac. Belge*, 13, 1926, p 573.

tensions internes répandues dans l'espace environnant. Ceci nous montre que le corpuscule n'est pas un point isolé, mais le centre d'un phénomène étendu; la description dualiste par corpuscules et ondes Ψ donne un schéma clair et commode mais qui n'atteint pas la réalité profonde.

Jusqu'ici, la grandeur Ψ a été considérée comme un scalaire. Si on la considère, au contraire, comme un vecteur d'Univers dont chaque composante Ψ_i obéit à l'équation de propagation, on obtient aisément la généralisation des formules précédentes. Il nous semble que cette théorie généralisée pourrait conduire à adopter le point de vue suivant : la grandeur vectorielle Ψ *pour les photons* serait identique au quadrivecteur potentiel de la théorie électromagnétique comme cela est suggéré par le fait que l'on a pour les photons $\Box \Psi_i = 0$. Suivant cette vue, le champ électromagnétique serait formé de photons; selon les cas, ces photons seraient immobiles ou en mouvement et leur énergie se trouverait plus ou moins complètement emmagasinée sous forme de tensions internes.

MÉCANIQUE PHYSIQUE. — *Prévision de dilatabilité de l'invar en pièces obtenues par transformation à chaud ou à froid.* Note [1] de M. **J. F. Saffy**, présentée par M. H. Le Chatelier.

On sait que l'écrouissage, ainsi que le refroidissement par immersion dans l'eau à partir du rouge, diminuent la dilatabilité des ferronickels réversibles du groupe Fe^2Ni; M. Ch.-Éd. Guillaume, qui a découvert ce phénomène, en a tiré parti pour améliorer la qualité de l'invar; il obtient par ce moyen un alliage pratiquement indilatable, alors que le coefficient vrai de l'invar à l'état recuit (soit chauffé à 850° environ et refroidi très lentement) est toujours supérieur à 1.10^{-6}. En ce qui concerne l'écrouissage, en particulier, ses formules permettent de calculer la dilatabilité d'une tige écrouie par tréfilage [2], connaissant la dilatabilité de la coulée à l'état recuit et le taux de l'écrouissage, caractérisé par le coefficient d'allongement A pour 100 à la filière.

Les pièces d'invar forgé, dont le travail est habituellement achevé à la température du rouge sombre, possèdent un écrouissage marqué, qu'on ne

---

(1) Séance du 14 novembre 1927.

(2) Ch.-Éd. Guillaume, *Recherches métrologiques sur les aciers au nickel* (*Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures*, 17, 1927, p. 183).

détruit habituellement pas par recuit : cet écrouissage offre en effet le double avantage de relever la limite d'élasticité du métal et d'abaisser sa dilatabilité.

Il est important de pouvoir évaluer cette diminution de dilatabilité, car la forme des pièces ne se prête généralement pas à une mesure dilatométrique directe. Or j'ai vérifié que l'on peut prévoir la dilatabilité α_e d'une pièce écrouie par travail à chaud à partir de la dilatabilité α_r et de la dureté Brinell Δ_r, exprimée en kg/mm², de l'alliage à l'état recuit.

En effet, la vitesse de refroidissement des pièces travaillées à chaud est toujours très faible par rapport à celle correspondant à l'immersion dans l'eau à partir du rouge. La variation de dilatabilité $\alpha_e - \alpha_r$ cherchée provient donc en quasi-totalité de l'écrouissage, dont l'importance peut être caractérisée par la dureté Δ_e (¹). M. Guillaume ayant déterminé, dans les tiges étirées à froid, la fonction

$$\alpha_e - \alpha_r = f(\mathrm{A}\ {}^0\!/_0),$$

j'ai cherché à déterminer dans les mêmes conditions, afin de la comparer à la précédente, la fonction

$$\Delta_e - \Delta_r = \varphi(\mathrm{A}\ {}^0\!/_0).$$

J'ai constaté que, pour des valeurs convenables des échelles d'ordonnées, les courbes représentatives des fonctions φ et $-f$ étaient pratiquement superposables.

On a en effet, d'après M. Guillaume

(I)

$\mathrm{A}\ {}^0\!/_0 =$	0	19	40	60	78	112
$f(\mathrm{A}\ {}^0\!/_0) = (\alpha_e - \alpha_r)\,10^6 =$	0	−0,588	−0,930	−1,265	−1,578	−1,630 (²),

et d'après mes propres expériences

(II)

$\mathrm{A}\ {}^0\!/_0 =$	0	30	54	90	134	237
$\varphi(\mathrm{A}\ {}^0\!/_0) = (\Delta_e - \Delta_r) =$	0	42	66	84	90	96 ....

En prenant la même échelle pour $\alpha_e - \alpha_r = -1.10^6$ d'une part et $\Delta_e - \Delta_r = 55$ kg/mm² d'autre part, les courbes φ et $-f$ sont presque identiques, et l'on a la relation, valable pour les températures voisines de 20° :

$$\text{(III)} \qquad \alpha_e - \alpha_r = -\frac{\Delta_e - \Delta_r}{55} \cdot 10^6.$$

(¹) La dureté Brinell Δ et la ténacité R (kg/mm²) de l'invar sont liées par la relation $\Delta = 3\mathrm{R}$; à l'état recuit, R varie de 45 à 48 kg/mm², suivant coulées.

(²) *Loc. cit.*, p. 184 $(\alpha_e - \alpha_r).10^6 = -1,630$ est quasi-asymptote de la courbe f.