La variance relativiste du moment cinétique d'un corps en rotation;

PAR LOUIS DE BROGLIE.

Dans la théorie de l'électron magnétique et tournant due à M. Dirac, l'électron possède un moment cinétique (moment de quantité de mouvement) provenant de son mouvement de rotation propre. Ce moment cinétique, ou « spin », est représenté mathématiquement par une densité vectorielle $\vec{\sigma}$: l'intégrale d'espace de cette densité vectorielle donne le moment cinétique en question. On démontre que les trois composantes rectangulaires du vecteur $\vec{\sigma}$ se transforment, si l'on effectue une transformation de Lorentz, comme les trois composantes d'espace d'un quadrivecteur d'espace-temps dont la quatrième composante, la composante de temps, est nulle dans le système propre de l'électron. Ce résultat peut paraître étrange au premier abord parce qu'on est habitué (et, en un sens, à juste titre comme nous le verrons) à considérer les trois composantes d'un moment cinétique comme formant les composantes yz, zx et xy d'un tenseur d'espace-temps antisymétrique de rang deux, ce qui paraît mal s'accorder avec la variance trouvée pour la densité de spin. Pour tâcher de tirer cette question au clair, nous allons étudier ici la variance relativiste du moment cinétique d'un corps en rotation.

*
* *

Considérons un corps dont un point O′ décrit, dans un système de référence galiléen $Oxyz$, une droite d'un mouvement uniforme. Prenons cette droite pour axe des z. Si le corps est en rotation, il possèdera un moment cinétique autour de O′.

Tout d'abord, nous pouvons définir un tenseur antisymétrique de rang deux $\overset{\rightarrow}{\vec{M}}$ tel que ses composantes yz, zx et xy sont les trois composantes rectangulaires du moment cinétique total du corps en mouvement par rapport à l'origine O. Ce tenseur aura pour composantes non nulles :

$$
(1)\quad \left\{\begin{array}{ll}
M_{yz} = -M_{zy} = \Sigma(z p_y - y p_z); & M_{zx} = -M_{xz} = \Sigma(x p_z - x p_x), \\
M_{xy} = -M_{yx} = \Sigma(y p_x - x p_y); & M_{xt} = -M_{tx} = \Sigma\left(ct\, p_x - x\frac{W}{c}\right), \\
M_{yt} = -M_{ty} = \Sigma\left(ct\, p_y - y\frac{W}{c}\right); & M_{zt} = -M_{zt} = \Sigma\left(ct\, p_z - z\frac{W}{c}\right),
\end{array}\right.
$$

les signes Σ indiquant une sommation sur toutes les molécules dont le corps est constitué; p_x, p_y, p_z et $\frac{W}{c}$ sont les composantes du quadrivecteur impulsion d'Univers d'une molécule. Comment doit-on prendre ces Σ ? Chaque molécule du corps a sa ligne d'Univers et on doit prendre, sur chaque ligne d'Univers, un point auquel correspond les huit grandeurs x, y, z, t, p_x, p_y, p_z et W. Mais, naturellement, l'observateur lié à un système de référence fera toujours la sommation sur les états des molécules qui sont pour lui simultanées, c'est-à-dire qui correspondent à une même valeur de son temps propre.

Supposons, pour simplifier (ce qui ne peut rien changer aux résultats), que le corps en mouvement soit homogène, que ses molécules soient toutes semblables et de même masse propre m_0. L'observateur lié au système $Oxyz$ attribue à chaque molécule une certaine vitesse $\vec{v}$, qui varie d'une molécule à l'autre, et il voit dans l'élément de volume $d\tau$ un nombre de molécules $\rho\, d\tau$. Il pose donc

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
M_{yz} &= \int_V m_0 \left[z \frac{\rho v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - y \frac{\rho v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c_2}}} \right] d\tau,\\
M_{zx} &= \int_V m_0 \left[x \frac{\rho v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - z \frac{\rho v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right] d\tau,\\
M_{xy} &= \int_V m_0 \left[y \frac{\rho v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - x \frac{\rho v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right] d\tau;\\
M_{xt} &= \int_V m_0 \left[ct \frac{\rho v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - x \frac{\rho c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right] d\tau,\\
M_{yt} &= \int_V m_0 \left[ct \frac{\rho v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - y \frac{\rho c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right] d\tau,\\
M_{zt} &= \int_V m_0 \left[ct \frac{\rho v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - z \frac{\rho c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right] d\tau;
\end{aligned}\right.$$

les intégrales étant étendues à tout le volume V du corps en mouvement.

Nous voulons maintenant que les M_{ik} ainsi définis se transforment comme les composantes d'un tenseur antisymétrique de rang deux. Pour cela, considérons un « observateur propre » lié au point O′ du corps en mouvement. Il emploie des coordonnées $x_0 y_0 z_0$ et un temps t_0. Si $V = \beta c$ désigne la vitesse de O′ par rapport au système $Oxyz$ et si nous supposons les axes $O'x_0 y_0 z_0$ parallèles aux axes $Oxyz$, nous aurons, entre les coordonnées des deux systèmes, les formules de la transformation simple de Lorentz

$$(3)\qquad x_0 = x,\qquad y_0 = y,\qquad z_0 = \frac{z-\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad t_0 = \frac{t-\frac{\beta}{c}z}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Il est bien connu qu'en passant du système $Oxyz$ au système $O'x_0 y_0 z_0$, les quatre quantités ρv_x, ρv_y, ρv_z et ρ se transforment comme les composantes d'un vecteur d'espace-temps, le quadrivecteur densité-courant. On a donc

$$(4)\qquad \rho_0 v_x^0 = \rho v_x, \qquad \rho_0 v_y^0 = \rho v_y, \qquad \rho_0 v_z^0 = \frac{\rho v_z - \beta c \rho}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \rho_0 = \frac{\rho - \frac{\beta}{c}\rho v_z}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Naturellement, l'observateur propre définit les composantes du tenseur $\overset{\rightrightarrows}{\mathrm{M}}$ par les formules

$$(5)\qquad \mathrm{M}_{yz}^0 = \int_{\mathrm{V}_0} m_0 \left[z_0 \frac{\rho v_y^0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} - y_0 \frac{\rho v_z^0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} \right] d\tau_0, \qquad \ldots,$$

$\vec{v}_0$ étant la vitesse dans le système propre de la molécule qui occupe la position $x_0 y_0 z_0$ à l'instant t_0 et ρ_0 étant le nombre de molécules dans l'élément $d\tau_0$.

Si l'on veut exprimer les quantités $\mathrm{M}_{xy}^0 \ldots$ à l'aide des variables $xyzt$, on doit faire usage des relations suivantes :

$$(6)\qquad d\tau_0 = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 - \frac{\beta}{c} v_z^0\right),$$

$$(7)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 + \frac{\beta}{c} v_z^0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}\sqrt{1-\beta^2}}.$$

La relation (6) se démontre en tenant compte du fait que les états des molécules qui occupent l'élément de volume $d\tau_0$ à l'instant t_0 pour l'observateur propre, ne sont pas simultanés pour l'observateur lié aux axes $Oxyz$, de sorte qu'on ne peut pas appliquer ici la formule usuelle $d\tau_0 = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

La relation (7) résulte des formules relativistes de transformation des vitesses, savoir :

$$(8)\qquad v_x^0 = \frac{v_x\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c} v_z}, \qquad v_y^0 = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c} v_z}, \qquad v_z^0 = \frac{v_z - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c} v_z}.$$

En tenant compte de (3), (6) et (7), on trouve aisément

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} M^0_{yz} &= \int_V m_0[(z-\beta ct)\rho v_y - y\rho(v_z-\beta c)]\frac{d\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\beta^2}},\\ M^0_{zx} &= \int_V [x\rho(v_z-\beta c)-(z-\beta ct)\rho v_x]\frac{d\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\beta^2}},\\ M^0_{xy} &= \int_V m_0[y.\rho v_x - x.\rho v_y]\frac{d\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\beta^2}}.\end{aligned}\right.$$

En comparant avec (2), nous trouvons alors

$$(10)\quad M^0_{yz} = \frac{M_{yz}-\beta M_{yt}}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad M^0_{zx} = \frac{M_{zx}+\beta M_{xt}}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad M^0_{xy} = M_{xy}.$$

Ces formules montrent bien que les composantes du moment cinétique, par rapport à l'origine des coordonnées, se transforment comme les composantes yz, zx et xy d'un tenseur antisymétrique de rang deux, mais nous allons voir que ce ne sont pas les quantités M_{yz}, M_{zx} et M_{xy} qui représentent, dans le système $Oxyz$, le moment de rotation propre du corps entraîné.

En effet, si l'observateur lié aux axes xyz veut décrire le mouvement de rotation du corps en mouvement autour du point O′, il doit imaginer des axes liés à O′ et, par exemple, parallèles à $Oxyz$. Ces axes coïncident avec $O'x_0y_0z_0$, mais je les nomme maintenant $O'\xi\eta\zeta$. Les coordonnées ξ, η, ζ d'un point du corps pour l'observateur lié à O sont évidemment

$$(11)\qquad \xi = x,\qquad \eta = y,\qquad \zeta = z-\beta ct.$$

De plus, les composantes de la quantité de mouvement d'une molécule du corps, *dans la mesure où elle est due au mouvement propre de de rotation autour de* O′, seront reliées aux quantités p_x, p_y et p_z par les relations

$$(11\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} &p_\xi = p_x,\qquad p_\eta = p_y,\\ &p_\zeta = p_z - \text{quantité de mouvement de translation} = p_z - \frac{m_0\beta c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\end{aligned}\right.$$

puisque la molécule considéré a une « masse en mouvement » égale à $\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ et que sa vitesse d'entraînement est βc dans le sens Oz.

Or l'observateur lié à O définit tout naturellement les composantes du moment cinétique propre du corps en mouvement par les formules

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} S_x &= \int_V \rho[\zeta p_\eta - \eta p_\zeta]\,d\tau, \\ S_y &= \int_V \rho[\xi p_\zeta - \zeta p_\xi]\,d\tau, \\ S_z &= \int_V \rho[\eta p_\xi - \xi p_\eta]\,d\tau; \end{aligned}\right.$$

ce qui le conduit aux valeurs

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} S_x &= \int_V m_0\left[(z-\beta ct)\frac{\rho v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - y\frac{\rho(v_z-\beta c)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]d\tau, \\ S_y &= \int_V m_0\left[x\frac{\rho(v_z-\beta c)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - (z-\beta ct)\frac{\rho v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]d\tau, \\ S_z &= \int_V m_0\left[y\frac{\rho v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - x\frac{\rho v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]d\tau. \end{aligned}\right.$$

En comparant avec les équations (10), on trouve

$$(14)\qquad S_x = M^0_{yz}\sqrt{1-\beta^2}, \qquad S_y = M^0_{zx}\sqrt{1-\beta^2}, \qquad S_z = M^0_{xy}.$$

Pour $\beta = 0$, on obtient les résultats évidents à priori

$$(15)\qquad S^0_x = M^0_{yz}, \qquad S^0_y = M^0_{zx}, \qquad S^0_z = M^0_{xy}.$$

L'on en déduit

$$(16)\qquad S_x = S^0_x\sqrt{1-\beta^2}, \qquad S_y = S^0_y\sqrt{1-\beta^2}, \qquad S_z = S^0_z,$$

formules qui nous montrent comment se transforment les composantes du moment de rotation propre $\vec{S}$ quand on fait une transformation de Lorentz. Si la vitesse de O′ tend vers la vitesse limite c,

β tend vers un et le vecteur $\vec{S}$ se couche sur la direction du mouvement.

Pour retrouver maintenant le résultat de la théorie de Dirac signalé au début, supposons que, dans tout système galiléen, nous puissions définir une densité vectorielle $\vec{\sigma}$ telle que l'on ait

$$\int \vec{\sigma}\, d\tau = \vec{S}. \tag{17}$$

Dans le système propre du corps en mouvement, nous aurons alors

$$S_x^0 = \int_{V_0} \sigma_x^0\, d\tau_0, \qquad S_y^0 = \int_{V_0} \sigma_y^0\, d\tau_0, \qquad S_z^0 = \int_{V_0} \sigma_z^0\, d\tau_0. \tag{18}$$

Si l'on veut effectuer les intégrations dans le système xyz, on devra cette fois remplacer $d\tau_0$ par $\frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$. En tenant compte de (16), on trouve ainsi

$$\left\{\begin{aligned} \frac{S_x}{\sqrt{1-\beta^2}} &= S_x^0 = \int_V \sigma_x^0 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \frac{S_y}{\sqrt{1-\beta^2}} &= S_y^0 = \int_V \sigma_y^0 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ S_z &= S_z^0 = \int_V \sigma_z^0 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

La définition (17) donne alors

$$\sigma_x = \sigma_x^0, \qquad \sigma_y = \sigma_y^0, \qquad \sigma_z = \frac{\sigma_z^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{20}$$

Les quantités σ_x, σ_y et σ_z se transforment donc comme les trois composantes rectangulaires d'espace d'un quadrivecteur d'espace-temps dont la quatrième composante est nulle dans le système propre du corps en rotation. C'est bien le résultat obtenu pour la densité du spin dans la théorie de Dirac. Pour β tendant vers 1, le vecteur d'espace $\vec{\sigma}$ se couche sur la direction du mouvement, fait qui joue un rôle important dans la nouvelle théorie de la lumière, proposée par l'auteur.