

SUR LA VARIANCE RELATIVISTE DE LA TEMPÉRATURE

PAR

Louis DE BROGLIE

RÉSUMÉ. — *L'étude de la variance relativiste des grandeurs thermodynamiques, et en particulier de la température, a fait, il y a une trentaine d'années, l'objet d'assez nombreuses recherches qui sont peut-être un peu oubliées aujourd'hui. Nous nous proposons de reprendre ici rapidement la question de la variance relativiste de la température en insistant sur certains aspects de la question, notamment sur ses rapports avec une formule due à Boltzmann et bien connue dans la théorie de l'invariance adiabatique.*

I. Invariance de l'entropie. — Il est bien connu que l'entropie est, à côté de l'intervalle d'univers, de la charge électrique et de l'action mécanique, un des grands « invariants » de la théorie de la Relativité. Pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler que, selon Boltzmann, l'entropie d'un état macroscopique est proportionnelle au logarithme du nombre de complexions qui réalise cet état : l'entropie s'exprime donc par un nombre dont l'invariance est presque évidente. Pour affermir le raisonnement, on peut dire que d'une part la définition de l'entropie fait intervenir un nombre *entier* de complexions et que d'autre part la transformation de l'entropie lors d'un changement de référentiel galiléen doit s'exprimer par une fonction *continue* de la vitesse relative des référentiels : il en résulte nécessairement que cette fonction continue est constante et égale à l'unité : ce qui signifie que l'entropie est invariante.

Pour établir la variance relativiste de la température, des raisonnements plus délicats sont nécessaires. Nous développerons celui qui nous paraît le plus instructif.

Considérons un corps C qui, envisagé dans un système de référence R,

qu'il lui est lié, se trouve dans un état d'équilibre thermodynamique à la température absolue T_0 et possède un volume invariable V_0 . Ce pourra être par exemple un gaz à la température T_0 enfermé dans une enceinte rigide de volume V_0 . Le corps C a une masse propre totale M_0 . On peut démontrer¹, nous n'insisterons pas sur ce point, que si le corps C est un gaz de pression p_0 , la masse propre M_0 est égale à $\frac{1}{c^2}(E_0 + p_0 V_0)$, E_0 étant l'énergie totale (énergie de masse + énergie cinétique) de toutes les molécules.

Plaçons-nous maintenant dans un référentiel galiléen R où le corps C possède la vitesse $v = \beta c$ de translation uniforme et supposons que dans ce système de référence une source de chaleur fournisse à C une quantité de chaleur Q . Nous allons démontrer que, pour que le corps C puisse conserver la vitesse βc , il faut lui fournir, en même temps que la quantité de chaleur Q , un certain travail A . En effet le corps conservant par hypothèse la vitesse βc , son énergie qui était initialement $M_0 c^2 (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ne peut augmenter, par suite de l'apport de la chaleur Q et du travail A , que si sa masse propre varie de la valeur initiale M_0 à une valeur finale M'_0 . En d'autres termes, la chaleur et le travail absorbés par le corps C en mouvement auront accru son énergie interne, ce qui aura fait croître sa masse propre.

Le principe de la conservation de l'énergie nous donne alors :

$$(1) \quad (M'_0 - M_0)(1 - \beta^2)^{-1/2} c^2 = Q + A,$$

tandis que, si F désigne la force que l'on a dû exercer sur le corps dans le système de référence R pour lui communiquer le travail A , la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps doit à chaque instant être égale à F , ce qui nous donne :

$$M'_0 v (1 - \beta^2)^{-1/2} - M_0 v (1 - \beta^2)^{-1/2} = \int F dt = \frac{1}{v} \int F v dt = \frac{A}{v},$$

puisque v est constant et que $\int F v dt = A$. Nous écrivons la relation précédente sous la forme :

$$(2) \quad (M'_0 - M_0)(1 - \beta^2)^{-1/2} v^2 = A$$

et l'on voit que le travail fourni dans le processus envisagé est égal à l'augmentation de la quantité $M_0 v^2 (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ou « pseudo-énergie cinétique », dont nous aurons à reparler.

En éliminant $(M'_0 - M_0)(1 - \beta^2)^{-1/2}$ entre (1) et (2), nous obtenons :

$$(3) \quad A = \beta^2 (1 - \beta^2)^{-1} Q,$$

d'où :

$$(4) \quad Q = (M'_0 - M_0) c^2 (1 - \beta^2)^{1/2} = -\Delta \mathcal{L}$$

$\Delta \mathcal{L}$ étant la variation de la fonction de Lagrange relativiste $\mathcal{L} = -M_0 c^2 (1 - \beta^2)^{1/2}$ du corps C.

1. Voir M. von Laue, Théorie de la Relativité, traduction française, Gauthier Villars chap. VII.

Donc, ainsi que nous l'avions annoncé, pour que le corps C puisse conserver dans R la vitesse βc , l'apport de chaleur Q doit être complété par la fourniture du travail A . De (1) et (3), nous tirons aisément :

$$(5) \quad M'_0 - M_0 = (1 - \beta^2)^{1/2} / c^2 (A + Q) = (1 - \beta^2)^{-1/2} Q / c^2.$$

Revenons maintenant au référentiel R_0 . Dans ce référentiel, il n'y a visiblement aucun travail effectué pendant l'opération que nous venons de considérer, puisque la forme du corps y est restée invariable. Vue dans ce système propre, l'opération effectuée consiste uniquement dans l'apport d'une quantité de chaleur Q_0 telle que

$$(6) \quad Q_0 / c^2 = M'_0 - M_0 = (1 - \beta^2)^{-1/2} Q / c^2.$$

Lors du passage du référentiel R_0 au référentiel R, la quantité de chaleur se transforme donc suivant la loi

$$(7) \quad Q = Q_0 (1 - \beta^2)^{1/2}$$

et, comme l'entropie $S = \int \frac{dQ}{T}$ est invariante, il en résulte que la température se transforme suivant la même loi et que l'on a :

$$(8) \quad T = T_0 (1 - \beta^2)^{1/2}.$$

2. *Extension au cas où le volume du corps C varie.* — Nous supposons que le corps C est un gaz ou tout au moins un corps pour lequel on peut définir une pression isotrope dont la valeur est p_0 dans le référentiel R_0 et p dans le référentiel R. Des considérations sur la théorie relativiste de l'élasticité² permettent de démontrer que la pression est alors un invariant relativiste, c'est-à-dire que $p = p_0$. Nous allons retrouver ce résultat en reprenant le raisonnement du chapitre précédent dans le cas où le volume du corps C est invariable.

Plaçons-nous dans le référentiel R et supposons que, la vitesse d'ensemble v du corps C restant constante, on lui fournisse la quantité de chaleur Q et le travail A pendant que son volume varie de ΔV . La conservation de l'énergie nous fournit alors

$$(9) \quad \Delta E = (M'_0 - M_0) (1 - \beta^2)^{-1/2} c^2 = Q + A - p \Delta V$$

et comme on a toujours la relation (2), on trouve aisément :

$$(10) \quad A = \beta^2 (1 - \beta^2)^{-1} (Q - p \Delta V),$$

relation qui se réduit à (2) quand ΔV est nul.

De (9), on tire alors aisément :

$$(11) \quad M'_0 - M_0 = \frac{Q - p \Delta V}{c^2} (1 - \beta^2)^{-1/2}.$$

D'autre part dans le système de référence R_0 (où $A_0 = 0$), on a :

$$(12) \quad \frac{\Delta E_0}{c^2} = M'_0 - M_0 = (Q_0 - p_0 \Delta V_0) / c^2.$$

2. Laue, *loc. cit.*, p. 244.

La comparaison de (11) et de (12) donne :

$$(13) \quad Q - p \Delta V = (Q_0 - p_0 \Delta V_0) (1 - \beta^2)^{1/2}$$

et comme $\Delta V = \Delta V_0 (1 - \beta^2)^{1/2}$, la relation (13) est bien vérifiée si nous posons :

$$(14) \quad Q = Q_0 (1 - \beta^2)^{1/2}; \quad p = p_0.$$

De plus, en portant l'expression (10) de A dans (9), nous trouvons :

$$(15) \quad \Delta E = (Q - p \Delta V) (1 - \beta^2)^{-1} = (T \Delta S - p \Delta V) (1 - \beta^2)^{-1}.$$

Nous avons donc :

$$(16) \quad \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V = T (1 - \beta^2)^{-1}; \quad \left(\frac{\partial E_0}{\partial S_0} \right)_{V_0} = T_0.$$

Comme $dS = dS_0$ et $dE = dE_0 (1 - \beta^2)^{-1/2}$, on retombe sur la formule de transformation (8) pour la température.

3. *Commentaires sur la formule (8)*. — Comparons les formules de transformation pour l'énergie et pour la température :

$$(17) \quad E = E_0 (1 - \beta^2)^{-1/2}; \quad T = T_0 (1 - \beta^2)^{1/2}.$$

Nous voyons que, tandis que l'énergie est plus petite dans le système propre, la température y est, au contraire plus élevée.

La différence entre les deux genres de transformation est la même que celle que l'on rencontre pour les fréquences cycliques et les fréquences ondulatoires. Comme c'est là une question importante qui a joué un grand rôle dans la genèse de la Mécanique ondulatoire, nous la reprendrons rapidement.

Considérons dans un référentiel R_0 un processus périodique variant sinusoidalement au cours du temps. Il sera représenté par une variable de repé-
rage ayant pour expression :

$$q_0 = a_0 \sin 2\pi \nu_0 t_0$$

avec un choix convenable de l'origine du temps t_0 . Ce processus pourra être, par exemple, le mouvement d'une horloge et alors la variable sera l'abscisse de la projection de l'aiguille sur l'un des diamètres du cadran.

La théorie de la Relativité nous apprend que pour un observateur lié au référentiel R dans lequel l'horloge a la vitesse βc , le mouvement de l'horloge paraît ralenti dans le rapport $(1 - \beta^2)^{1/2}$, de sorte que la variable de repé-
rage aura pour lui une expression de la forme :

$$q = a \sin 2\pi \nu_c t,$$

où ν_c , fréquence cyclique de l'horloge pour cet observateur, vaut :

$$(18) \quad \nu_c = \nu (1 - \beta^2)^{1/2}.$$

Telle est la formule donnant la transformation de la « fréquence cyclique » d'un processus périodique quand on passe du référentiel R_0 où il siège à un référentiel R en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à R_0 .

Imaginons maintenant qu'en tout point du référentiel R_0 soit placée une

horloge de fréquence ν_0 . Alors, se trouvera ainsi défini en chaque point de R_0 un processus périodique de fréquence ν_0 et l'ensemble des variables de repérage γ_0 correspondantes définira dans R_0 une onde stationnaire dont l'expression sera en tout point :

$$(19) \quad \Psi = a_0 \sin 2\pi \nu_0 t_0.$$

Si l'on prend, pour simplifier, l'axe des ζ dans la direction du mouvement relatif de R et de R_0 , la transformation de Lorentz montre que, vue du système de référence R , cette onde est représentée par la formule :

$$(20) \quad \Psi = a \sin 2\pi \nu_0 \left(t - \frac{\beta}{c} \zeta \right) (1 - \beta^2)^{-1/2} = a_0 \sin 2\pi \nu \left(t - \frac{\zeta}{V} \right)$$

avec

$$(21) \quad \nu = \nu_0 (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad V = \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v}.$$

L'expression (20) donne la répartition des phases des horloges telle qu'elle est vue par l'observateur lié à R : cette répartition est celle d'une onde se propageant dans la direction Ox avec la fréquence ν et la vitesse de phase V . La première formule (21) montre comment se transforme la « fréquence ondulatoire » quand on passe du système R_0 où l'onde est stationnaire au système galiléen quelconque R .

La comparaison des formules (17), (18) et (21) montre que l'énergie et la fréquence ondulatoire d'une part, la température et la fréquence cyclique d'autre part se transforment de même. Le premier de ces deux faits permet de supposer que *dans tous les systèmes galiléens*, on peut lier l'énergie d'un corpuscule et la fréquence d'une certaine onde associée par la relation du quantum $E = h\nu$, où h est la constante de Planck : l'on sait quel rôle fondamental a joué cette constatation à l'origine de la Mécanique ondulatoire.

On peut, au premier abord, être étonné de constater que la quantité de chaleur et la température, se transformant comme une fréquence cyclique et non comme une fréquence ondulatoire, n'ont pas la même variance que l'énergie. On sait, en effet, que la chaleur est une forme de l'énergie et, de plus, la Thermodynamique statistique nous a habitués à considérer la température d'un corps comme proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne des molécules de ce corps. Mais si l'on se reporte au raisonnement qui conduit à la formule (7), l'on voit que la répartition de l'énergie fournie au corps entre chaleur et travail est imposée par le fait, inconnu des théories antérieures à la théorie de la Relativité, qu'un apport d'énergie est susceptible de faire varier la masse propre du corps : autrement dit, la variance de la température est imposée par le principe, spécifiquement relativiste, de l'inertie de l'énergie. Quant à la proportionnalité de la température à l'énergie cinétique moyenne, elle n'est exacte que dans le système propre du corps et, même dans ce système, elle n'est valable qu'à l'approximation relativiste. Nous voulons insister sur ce point.

4. *Équipartition de l'énergie.* — Soit un corps dont l'état est défini dans son référentiel propre par f coordonnées $q_{o1} \dots q_{of}$ et par f moments conjugués de Lagrange $p_{o1} \dots p_{of}$. Nous savons que la probabilité pour que q_o soit compris dans l'intervalle $q_o \rightarrow q_{oi} + dq_{oi} \dots$, p_{of} dans l'intervalle $p_{of} \rightarrow p_{of} + dp_{of}$ est proportionnelle à

$$e^{-\frac{E_o}{kT}} dq_{o1} \dots dp_{of},$$

où k est la constante de Boltzmann.

Cherchons la valeur moyenne du produit $p_{oi} \dot{q}_{oi}$. Comme on a $\dot{q}_{oi} = \frac{\partial E_o}{\partial p_{oi}}$ d'après les équations de Hamilton, il vient :

$$p_{oi} \dot{q}_{oi} = \int \dots \int p_{oi} \frac{\partial E_o}{\partial p_{oi}} e^{-\frac{E_o}{kT}} dq_{o1} \dots dp_{of} \int \dots \int e^{-\frac{E_o}{kT}} dq_{o1} \dots dp_{of}$$

et, en intégrant par parties sur la variable p_{oi} , on obtient :

$$(22) \quad p_{oi} \dot{q}_{oi} = k T_o.$$

Le théorème exprimé par cette formule est rigoureux en ce sens qu'il est valable aussi bien en Mécanique relativiste qu'en Mécanique newtonienne.

Appliquons à un gaz dont les molécules ont des vitesses assez faibles pour qu'on puisse négliger les corrections de relativité, ce qui est le cas usuel. Alors, en prenant pour variables q_{oi} les coordonnées rectangulaires des diverses molécules du gaz, l'énergie cinétique E_i d'une molécule est une fonction quadratique homogène des trois composantes de vitesses v_{oi} de la molécule et comme $p_{oi} = \frac{\partial E_i^{(o)}}{\partial \dot{q}_{oi}}$, on trouve par application du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes :

$$(23) \quad \overline{E_i^{(o)}} = \frac{3}{2} k T_o,$$

relation bien connue d'après laquelle la température du gaz est proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne de ses molécules. Mais ce résultat cesserait d'être exact si l'on tenait compte des corrections de relativité. Dans ce cas,

en effet, l'énergie cinétique d'une molécule égale à $m_o c^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} - 1 \right]$

n'est plus une fonction quadratique homogène des composantes rectangulaires de la vitesse et l'on ne peut plus passer de la formule (22) toujours exacte à la formule (23). Par contre, on peut toujours écrire, en désignant par 1, 2, 3 les indices des q_{oi} se rapportant à une molécule :

$$\frac{1}{2} \sum_i^3 p_{oi} \dot{q}_{oi} = \frac{3}{2} k T_o.$$

et comme $p_{oi} = m_o \dot{q}_{oi} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$ avec $v^2 = \sum_i^3 \dot{q}_{oi}^2$, on a :

3. Le point indique une dérivée par rapport au temps.

$$(24) \quad \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \frac{3}{2} k T_0.$$

La température est donc proportionnelle à la valeur moyenne de la grandeur $\frac{1}{2} m_0 v^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$ pour les molécules du gaz. Cette grandeur n'est pas l'énergie cinétique des molécules dont nous avons rappelé plus haut l'expression relativiste exacte, mais elle se confond avec elle pour les petites valeurs de $\left(\frac{v}{c} \right)^2$, ce qui permet alors de retomber sur la formule (23) :

comme cette grandeur, égale au produit de la masse en mouvement par le carré de la vitesse, pourrait facilement être prise à tort comme expression de l'énergie cinétique, nous la nommerons « la pseudo-énergie cinétique » et nous voyons que la pseudo-énergie cinétique a une grande importance pour la définition relativiste correcte de la température.

5. *Rappel d'une formule de Boltzmann.* — Nous allons retrouver la valeur moyenne de la quantité $\sum p_i \dot{q}_i$, prise cette fois non pas sur un ensemble de molécules, mais dans le temps pour un seul système périodique, en rappelant une formule due à Boltzmann et fort utile dans la théorie des invariants adiabatiques. Nous n'en donnerons pas la démonstration : on la trouvera, très complètement développée, dans le beau livre de M. Léon Brillouin sur les tenseurs⁴. Nous nous contenterons d'en rappeler la forme et la signification.

Considérons un système mécanique dont le mouvement, envisagé dans un système de référence propre R_0 , est strictement périodique de fréquence ν_0 . Nous supposons que l'état du système est défini par deux catégories de variables : 1^o des variables q_{01}, \dots, q_{0f} à variation rapide ; 2^o des variables Q_{01}, \dots, Q_{0f} qui restent constantes quand le système est dans un état déterminé et qui varient seulement quand le système passe d'un état à un autre. Nous mettons un indice 0 à toutes ces coordonnées pour rappeler qu'elles sont rapportées au système de référence R_0 . Les variables q_{0i} sont des variables microscopiques définissant l'état interne du système et leurs variations correspondent aux mouvements calorifiques : elles sont donc analogues aux coordonnées des molécules d'un gaz. Les variables Q_{0i} , dites variables macroscopiques, traduisent les conditions extérieures auxquelles est soumis le système et leurs variations lors d'un changement d'état correspondent à un travail effectué sur le système : elles sont donc analogues aux variables qui, dans le cas d'un gaz, fixent la position des parois du récipient où il se trouve.

Un exemple simple et classique d'un système du type envisagé est fourni par un pendule dont la longueur peut varier. Il y a alors une seule

4. Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité, Paris, Masson, 1938, p. 176 et ss.

variable q_i : l'angle qui fixe la position instantanée du pendule. La longueur du pendule peut jouer le rôle de variable Q . L'énergie d'oscillation du pendule à longueur constante est considérée comme une énergie interne et le travail que l'on doit fournir au point de suspension pour faire varier la longueur du pendule est considéré comme un travail extérieur. Quand on apporte une certaine quantité d'énergie δQ_0 (quantité de chaleur) à la masse oscillante, cet apport provoque en général une augmentation δE_0 de l'énergie d'oscillation de la masse (augmentation d'énergie interne) et une variation de longueur du pendule avec fourniture d'un travail $\delta \mathcal{E}_0$ au point de suspension supposé mobile (fourniture de travail extérieur), de sorte qu'on retrouve l'équation thermodynamique classique $\delta Q_0 = \delta E_0 + \delta \mathcal{E}_0$.

Voici maintenant le résultat fondamental qu'a démontré Boltzmann. Si nous désignons par

$$(25) \quad \mathcal{A}_0 = \oint \sum_i^f p_{oi} dq_{oi}$$

l'intégrale d'action maupertuisienne prise sur une période complète du mouvement dans l'état initial du système, la quantité de chaleur fournie au corps lors d'un changement d'état est reliée à la variation de \mathcal{A}_0 par la formule :

$$(26) \quad \delta Q_0 = \nu_0 \delta \mathcal{A}_0.$$

En particulier, pour les transformations adiabatiques où l'état du système varie sans apport de chaleur $\delta Q_0 = 0$, la grandeur \mathcal{A}_0 reste invariable. Tout comme l'entropie, l'intégrale cyclique d'action maupertuisienne reste constante dans une transformation adiabatique : c'est là le théorème de l'invariance adiabatique dont on connaît l'importance dans les théories quantiques.

Si les vitesses sont assez faibles pour qu'on puisse négliger les corrections de relativité, on aura $E_c^{(0)}$ désignant l'énergie cinétique :

$$(27) \quad \mathcal{A}_0 = \int_0^{\tau_0} 2 E_c^{(0)} dt = 2 \frac{\overline{E_c^{(0)}}}{\nu_0} \quad \left(\tau_0 = \frac{1}{\nu_0} \right)$$

la barre indiquant ici une moyenne dans le temps. Pour une transformation adiabatique, le quotient $\frac{\overline{E_c^{(0)}}}{\nu_0}$ doit rester constant, résultat dont l'ancienne théorie des Quanta faisait un grand usage. Pour un pendule simple on a $\frac{\overline{E_c^{(0)}}}{\nu_0} = \frac{E_0}{2}$ et on en conclut l'invariance adiabatique du quotient $\frac{E_0}{\nu_0}$.

Mais ici encore il faut remarquer qu'en théorie relativiste rigoureuse c'est l'intégrale \mathcal{A}_0 et non l'expression $2 \frac{\overline{E_c^{(0)}}}{\nu_0}$ qui doit figurer dans la formule (26).

6. *Température et entropie d'un système périodique.* — Nous pouvons écrire (26) sous la forme équivalente :

$$(28) \quad \delta Q_0 = \nu_0 \mathfrak{A}_0 \delta (\log \mathfrak{A}_0).$$

En comparant cette expression avec la formule thermodynamique

$$(29) \quad \delta Q_0 = k T_0 \delta \left(\frac{S_0}{k} \right),$$

nous voyons que nous pouvons définir pour le genre de système considéré une température et une entropie qui seront données dans le référentiel R_0 par les formules :

$$(30) \quad k T_0 = \nu_0 \mathfrak{A}_0, \quad S_0 = k \log \mathfrak{A}_0.$$

Examinons d'abord la définition de l'entropie ainsi obtenue. Supposons que le mouvement périodique du système envisagé puisse se représenter à l'aide d'une seule variable q_0 (cas auquel on peut toujours se ramener par l'emploi de variables angulaires appropriées). Alors le point représentatif de l'état du système décrira une courbe fermée dans le plan $q_0 p_0$ qui joue le rôle d'extension-en-phase et l'intégrale

$$\mathfrak{A}_0 = \oint p_0 \, dq_0 = \int \int \, d p_0 \, dq_0$$

sera égale à l'aire de ce plan intérieure à cette courbe fermée.

Or, en Thermodynamique statistique, l'entropie S_0 est reliée au nombre P_0 des complexions réalisant l'état considéré par la formule fondamentale de Boltzmann :

$$(31) \quad S_0 = k \log P_0.$$

On peut définir le nombre de complexions P_0 de plusieurs façons différentes, qui coïncident dans le cas des systèmes à très grand nombre de degrés de liberté, mais qui sont distinctes dans le cas des systèmes à petit nombre de degrés de liberté⁵. L'une de ces définitions consiste à poser que le nombre des complexions correspondant à un état d'énergie E_0 est égal au volume de l'extension-en-phase limité par la surface $E_0 = C^e$. En adoptant cette définition, on a $P_0 = \mathfrak{A}_0$ et les définitions (30) et (31) de l'entropie coïncident.

Revenons à la définition (30) de la température. Nous pouvons l'écrire (dans le cas d'une seule variable q_0) :

$$(32) \quad k T_0 = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} p_0 \, dq_0 = \overline{p_0 \dot{q}_0},$$

la moyenne étant prise dans le temps sur une période. L'analogie de cette formule avec la formule (22) est évidente, mais dans un cas on a une moyenne dans le temps pour un seul système, dans l'autre une moyenne statistique pour un grand nombre de systèmes identiques. Néanmoins la

5. Voir par exemple Léon Brillouin, « Les statistiques quantiques ». Presses universitaires 1930, tome I, p. 94.

parenté étroite qui existe en Thermodynamique statistique entre les deux sortes de moyenne paraît rendre très plausible la définition (30) de la température d'un système périodique⁵.

D'ailleurs, on peut resserrer davantage l'analogie des formules (22) et (32). On peut, en effet, décomposer les mouvements des molécules d'un gaz en une suite de mouvements périodiques. En Mécanique ondulatoire, on fait correspondre ces mouvements périodiques aux ondes stationnaires associées qui peuvent exister dans l'enceinte contenant le gaz et, en dénombrant ces ondes stationnaires par le procédé classique de Jeans, on trouve une interprétation bien connue des cellules d'extension-en-phase imaginée par l'ancienne théorie des quanta. Cela étant, pour chaque mouvement périodique de ce type, définissons une température par une moyenne dans le temps conformément à la formule (32), puis prenons la moyenne des températures ainsi définies pour l'ensemble des mouvements périodiques nous retrouverons ainsi la température définie par la relation (22). Le calcul est particulièrement simple dans le cas d'un gaz à 1 dimension dont les molécules se réfléchissent aux deux extrémités d'un segment de droite.

7. *Retour à la variance relativiste de la température.* — Imaginons maintenant que l'on observe un système périodique du type de Boltzmann dans un système de référence galiléen R où il est en mouvement rectiligne et uniforme avec la vitesse βc . D'après les formules de transformation (7) et (18) de la quantité de chaleur et de la fréquence cyclique, la relation (26) prendra dans le système de référence R la forme :

$$(33) \quad \partial Q = v_c \partial \mathcal{A}_0 = v_c \mathcal{A}_0 \partial (\log \mathcal{A}_0),$$

ce qui nous conduit, pour avoir $\partial Q = T \partial S$, à poser :

$$(34) \quad kT = v_c \mathcal{A}_0 \quad S = S_0 = k \log \mathcal{A}_0,$$

\mathcal{A}_0 étant toujours l'intégrale cyclique d'action maupertuisienne calculée dans le référentiel propre R_0 où le système est périodique. Dans ces formules, v_c est la période cyclique du processus périodique vu par l'observateur lié au référentiel R. D'après (18) et (30) on a bien :

$$T = T_0 (1 - \beta^2)^{1/2}$$

Comme exemple, prenons comme système périodique un oscillateur harmonique quantifié de fréquence ν_0 . Dans R_0 , on aura :

$$(35) \quad E_0 = n h \nu_0 = k T_0$$

si l'on admet avec l'ancienne théorie des quanta que \mathcal{A}_0 est un multiple entier de h . Dans R, on aura :

$$(36) \quad E = E_0 (1 - \beta^2)^{-1/2} = n h \nu; \quad kT = k T_0 (1 - \beta^2)^{1/2} = n h \nu_c$$

5. Depuis que cet article a été écrit, nous avons indiqué une deuxième manière de définir l'entropie et la température d'un système périodique (voir C. R., t. 223, 1946, p. 298).

ν et ν_0 étant respectivement la fréquence ondulatoire et la fréquence cyclique correspondant à la fréquence propre ν_0 . Nous pouvons énoncer ces résultats en disant : dans tout référentiel galiléen, l'énergie est égale à un multiple entier du « quantum ondulatoire $h\nu$ » et la température multipliée par k est égale à un multiple entier du « quantum cyclique $h\nu_0$ ».

D'après les hypothèses originelles de la Mécanique ondulatoire, un point matériel de masse m_0 doit être considéré comme un système périodique du type précédent pour lequel $n = 1$ et $\nu_0 = m_0 c^2 / h$. Dans le référentiel propre R_0 , son énergie est $E_0 = h\nu_0 = m_0 c^2$ et dans un référentiel galiléen quelconque R_0 , elle est $E = h\nu = m_0 c^2 (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Ceci est bien connu. Mais on pourrait aussi, d'après ce qui précède, attribuer au point matériel une température qui dans le référentiel R_0 vaudrait $T_0 = h\nu_0 / k = m_0 c^2 / k$ et dans le référentiel R vaudrait $T = h\nu / k = m_0 c^2 / k (1 - \beta^2)^{1/2}$. Il y a là l'amorce d'une Thermodynamique du point matériel qu'on pourrait chercher à développer dans le cadre de la Mécanique ondulatoire : il est assez difficile de dire où cette voie pourrait conduire et nous nous contenterons d'en avoir indiqué le point de départ.

Manuscrit reçu le 19 septembre 1945.

ERRATUM

Page 31-32-10

Lignes 7 et 8 du bas, *au lieu de* : un oscillateur harmonique
lire : une onde stationnaire

Dernière ligne, *au lieu de* : l'entrepie
lire : l'entropie