# LA STATISTIQUE DES CAS PURS EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

"La Revue scientifique" n^os 3292-3293, pp. 259-264, 1948



# LA STATISTIQUE DES CAS PURS EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE ET L'INTERFÉRENCE DES PROBABILITÉS

PAR

LOUIS DE BROGLIE

DANS cet article, je voudrais préciser certains points relatifs au formalisme statistique de la Mécanique ondulatoire. Ce formalisme risque, en effet, d'être mal compris par les esprits habitués au formalisme usuel de la statistique mathématique. La raison en est que la statistique mathématique habituelle repose sur des postulats qui cessent d'être exacts en Mécanique ondulatoire, de telle sorte que, pour faire rentrer le formalisme de la Mécanique ondulatoire dans le cadre général du Calcul des Probabilités, il faut constituer une statistique mathématique plus large que celle dont on fait généralement usage et abandonner certains postulats trop restrictifs. Nous pensons que, dans l'état actuel des théories physiques, il est très-important que les spécialistes du Calcul des Probabilités réfléchissent à ces questions que nous allons tâcher d'exposer le plus simplement possible.

Quand on cherche à dégager les principes du Calcul des Probabilités en invoquant des exemples simples, on admet toujours, — et généralement sans le dire explicitement, parce que cela paraît aller de soi, — que les statistiques portent sur des objets possédant des caractéristiques objectives, indépendantes de la façon dont on les constate. Ainsi il est courant de raisonner sur des pièces de monnaie (jeu de pile ou face), sur des dés, sur des cartes à jouer, etc.; et chacun de ces objets, qui sont des objets à notre échelle, relevant de la Physique macroscopique et directement perceptibles par nos sens, a des caractéristiques qui ne sont pas modifiées par le fait qu'on les constate. Raisonnons sur une carte à jouer : elle a sa couleur (cœur, pique, etc.) et ce que j'appellerai son « grade » (as, roi...), et il paraît évident que le fait de constater la couleur de la carte ne peut pas changer son grade, ni inversement. Pour prendre un autre exemple, si, dans un lot de conscrits, on mesure la taille et le tour de poitrine de chacun d'eux, peut-on imaginer que le fait de mesurer la taille puisse influer sur la valeur du tour de poitrine, ou inversement?

Le postulat très-important que l'on introduit ainsi subrepticement à l'origine des raisonnements sur les probabilités peut vraiment être nommé « postulat d'objectivité ». C'est lui, en effet, qui permet de considérer un dé, une carte à jouer, etc., comme ayant des propriétés objectives indépendantes de la manière dont on les constate : ainsi dans un jeu de cartes, une certaine carte sera un « roi de cœur », car quel que soit le procédé servant à constater sa couleur et son grade, que ces constatations soient simultanées ou successives, on trouvera toujours qu'elle est un cœur et qu'elle est un roi.

Il faut aussi insister sur une autre conséquence du postulat d'objectivité. Il entraîne que les diverses constatations que l'on peut faire sur l'objet peuvent s'effectuer dans un ordre quelconque, qu'elles peuvent être en particulier simultanées ou successives.

Admettant le postulat d'objectivité et ses conséquences, on est alors amené à poser un certain nombre de principes que nous allons rappeler en nous plaçant dans le cas des probabilités discontinues, la généralisation au cas des probabilités continues pouvant ensuite se faire aisément. Nous nous bornerons au cas simple où les objets sur lesquels porte notre statistique présentent seulement deux caractéristiques objectives qui nous intéressent : nous représenterons ces caractéristiques par deux variables aléatoires, U et V, susceptibles de prendre respectivement deux séries de valeurs discontinues : $u_1, u_2 \ldots$ et $v_1, v_2 \ldots$ On peut alors définir les probabilités $P_i$ et $P_k$ des valeurs $U = u_i$ et $V = v_k$. Si, parmi les N objets sur lesquels porte la statistique, $n_i$ ont la valeur $u_i$ de la caractéristique U, on pose $P_i = n_i/N$; s'il y en a $n_k$ qui ont la valeur $v_k$ de la caractéristique V, on pose $P_k = n_k/N$. Mais les objets ayant par hypothèse des caractéristiques indépendantes des constatations et de l'ordre des constatations, il y aura un certain nombre $n_{ik}$ de N objets pour lesquels on aura à la fois $U = u_i$ et $V = v_k$; l'on posera $P_{ik} = n_{ik}/N$, $P_{ik}$ étant par définition la probabilité d'avoir à la fois les valeurs $U = u_i$ et $V = v_k$ de U et de V.

On pourra aisément définir aussi les « probabilités liées ». Ainsi la probabilité d'obtenir $V = v_k$, quand on sait que $U = u_i$, sera $P_k^{(i)} = n_{ik}/n_i$, et la probabilité d'obtenir $U = u_i$, quand on sait que $V = v_k$, sera $P_i^{(k)} = n_{ik}/n_k$ ; et l'on vérifiera tout de suite les relations fondamentales

$$(1) \qquad P_i P_k^{(i)} = P_k P_i^{(k)} = P_{ik}.$$

Or on a évidemment

$$(2) \qquad P_i = \sum_k P_{ik}, \quad P_k = \sum_i P_{ik},$$

puisque

$$n_i = \sum_k n_{ik} \quad \text{et} \quad n_k = \sum_i n_{ik}.$$

De (1) et (2), l'on déduit donc :

$$(3) \qquad P_i = \sum_k P_k P_i^{(k)}, \quad P_k = \sum_i P_i P_k^{(i)}.$$

Par exemple, dans un jeu de 32 cartes, si U correspond à la couleur et V au grade, on a

$$P_i = \frac{8}{32}, \quad P_k = \frac{4}{32}, \quad P_{ik} = \frac{1}{32}, \quad P_k^{(i)} = \frac{1}{8}, \quad P_i^{(k)} = \frac{1}{4},$$

et la vérification des relations (1), (2) et (3) est immédiate (¹).

Les résultats généraux, connus sous le nom de « théorème des probabilités totales » et « théorème des probabilités composées », sont contenus dans les formules (1), (2) et (3). Comme il est bien connu, on doit, en énonçant le théorème des probabilités composées, insister sur le fait que les probabilités $P_k^{(i)}$ et $P_i^{(k)}$ doivent être évaluées en tenant compte de ce qu'on suppose connue, par une première constatation, la valeur de U ou celle de V. On donne souvent comme exemple de ce fait que la probabilité de tirer deux rois de suite d'un jeu de 32 cartes est $\frac{4}{32}\cdot\frac{3}{31}$, car après la sortie du premier roi, il reste au talon 31 cartes dont trois rois.

Il est d'ailleurs facile de faire rentrer le problème du tirage successif de deux cartes — quand on ne s'intéresse, comme dans le dernier exemple, qu'à leur grade — dans le schéma général. Il suffit de désigner par U le grade de la première carte et par V celui de la seconde : on doit alors poser

$$P_i = P_k = \frac{4}{32};$$

$$P_{ik} = \frac{16}{31\cdot 32}, \quad \text{si} \quad i \neq k; \qquad P_{ik} = \frac{12}{31\cdot 32}, \quad \text{si} \quad i = k;$$

comme on le voit aisément. Les formules (1) donnent alors

$$P_k^{(i)} = P_i^{(k)} = \frac{4}{31}, \quad \text{si} \quad i \neq k; \qquad P_k^{(i)} = P_i^{(k)} = \frac{3}{31}, \quad \text{si} \quad i = k;$$

et l'on vérifie aisément les relations (2) et (3).

(¹) Bien entendu, toutes les probabilités $P_i, P_k \ldots$ obéissent à des relations telles que $\sum_i P_i = 1 \ldots$

Il est facile de transposer le formalisme qui précède dans le cas des probabilités continues, quand on peut définir des densités de probabilités. Considérant toujours deux variables aléatoires U et V, on désignera par $\rho(u)du$ la probabilité pour que U soit trouvée avoir une valeur comprise dans l'intervalle $du$, et par $\rho(v)dv$ la probabilité pour que V soit trouvée avoir une valeur dans l'intervalle $dv$. On admettra l'existence d'une densité $\rho(u, v)$ telle que $\rho(u, v)du dv$ soit la probabilité pour que, à la fois, U soit trouvée avoir une valeur dans $du$, et V une valeur dans $dv$. Cette existence découle encore ici du postulat d'objectivité et de ses conséquences. Il est alors aisé d'étendre les formules (1), (2) et (3) du cas discontinu au cas continu. Les probabilités $P_k^{(i)}$ et $P_i^{(k)}$ seront remplacées respectivement par des fonctions continues $P(u \mid v)$ et $P(v \mid u)$, nommées probabilité de V liée par U et probabilité de U liée par V. On obtient alors les relations suivantes, qui remplacent respectivement les relations (1), (2) et (3) :

$$(1') \qquad \rho(u, v) = \rho(v)\, P(v \mid u) = \rho(u)\, P(u \mid v),$$

$$(2') \qquad \rho(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(u, v)\, dv, \qquad \rho(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(u, v)\, du,$$

$$(3') \qquad \rho(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(v)\, P(v \mid u)\, dv; \qquad \rho(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(u)\, P(u \mid v)\, du,$$

formules qui contiennent encore le théorème des probabilités totales et celui des probabilités composées (¹).

*
* *

Tout le formalisme que nous venons d'exposer est bien connu et nous ne l'avons rappelé que pour fixer les idées. Mais voici le point nouveau et essentiel : ce formalisme général ne s'applique pas aux statistiques que l'on rencontre en Mécanique ondulatoire, tout au moins quand les grandeurs aléatoires U et V sont des grandeurs canoniquement conjuguées, telles qu'une coordonnée $q$ et le moment de LAGRANGE $p$ conjugué (grandeurs associées à des opérateurs non commutables).

Pour comprendre la question, il faut d'abord rappeler les principes de la Mécanique ondulatoire. Je les résumerai sans entrer dans les détails qu'on peut trouver dans d'autres exposés.

Soit un système microphysique et soit A et B deux grandeurs mesurables relatives à ce système ; à ces grandeurs correspondent des opérateurs linéaires et hermitiques A et B dont les valeurs propres et les fonctions propres sont respectivement $\alpha_i$ et $\varphi_i$, $\beta_k$ et $\chi_k$. Toute mesure de A ne peut fournir comme valeur que l'un des $\alpha_i$ ; toute mesure de B ne peut fournir comme valeur que l'un des $\beta_k$. Les fonctions propres $\varphi_i$ de A formant un système complet de fonctions

(¹) Bien entendu, toutes les densités de probabilité $\rho(u) \ldots$ obéissent à des relations telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(u)du = 1 \ldots.$

orthonormales, la fonction d'onde du système pourra se développer suivant les $\varphi_i$. Supposons que la fonction d'onde $\Psi$ du système soit exactement connue (cas pur au sens de NEUMANN) et que l'on ait

$$\Psi = \sum_i c_i \varphi_i; \tag{4}$$

alors, d'après les principes de la Mécanique ondulatoire, les $|c_i|^2$ donneront les probabilités des diverses valeurs possibles $\alpha_i$ de A. C'est là le principe général de décomposition spectrale.

Si A et B sont des opérateurs non commutables ($AB \neq BA$), ce qui se produit quand les grandeurs A et B sont canoniquement conjuguées, alors le système des $\varphi_i$ ne coïncide pas avec le système des $\chi_k$, et l'on a

$$\varphi_j = \sum_k d_{jk}\chi_k, \qquad \chi_k = \sum_j d^{-1}_{kj}\varphi_j, \tag{5}$$

les $d_{jk}$ et $d^{-1}_{jk}$ ne se réduisant pas aux symboles de KRONECKER $\delta_{jk}$. La matrice dont les $d_{jk}$ sont les éléments est une matrice unitaire (complexe orthogonale), c'est-à-dire que [1]

$$d^*_{jk} = d^{-1}_{kj}.$$

On a donc

$$\Psi = \sum_j c_j \varphi_j = \sum_{jk} c_j\, d_{jk}\chi_k,$$

et le principe de décomposition spectrale appliqué à la grandeur B nous apprend que la probabilité de trouver pour B la valeur $\beta_k$ est $|\sum_j c_j d_{jk}|^2$. Dans l'état pur représenté par la fonction $\Psi$, nous avons donc

$$P_i = |c_i|^2, \qquad P_k = \left|\sum_j c_j\, d_{jk}\right|^2. \tag{6}$$

La fonction d'onde $\Psi$ étant toujours normée, ces formules nous donnent les probabilités en valeur absolue.

Mais supposons maintenant que nous mesurions d'abord A, puis B. Si la mesure de A fournit la valeur $\alpha_i$, la fonction $\Psi$ représentant l'état du système après cette mesure sera $\Psi = \varphi_i$; la formule (5) montre alors que la probabilité de trouver, par une seconde mesure, $B = \beta_k$ est $|d_{ik}|^2$. De même, si l'on a d'abord B, puis A, on trouverait, pour la probabilité de trouver $A = \alpha_i$ après avoir trouvé $B = \beta_k$, la valeur $|d^{-1}_{ki}|^2 = |d_{ik}|^2$. Finalement nous pouvons poser

$$P^{(i)}_k = P^{(k)}_i = |d_{ik}|^2. \tag{7}$$

Nous avons donc pu définir ici, comme en statistique usuelle, les probabilités $P_i$, $P_k$, $P^{(i)}_k$ et $P^{(k)}_i$; mais le point essentiel est que ces quantités ne satisfont ordinairement plus aux relations (3). Par exemple on a, en général,

$$\left|\sum_j c_j\, d_{jk}\right|^2 \neq \sum_j |c_j|^2\,|d_{jk}|^2, \tag{8}$$

car le second membre ne dépend que des modules des quantités complexes $c_j$ et $d_{jk}$, tandis que le premier membre dépend en général de la différence de leurs arguments (différence de phase). Physiquement, cela signifie que la probabilité de mesurer la valeur $B = \beta_k$ n'est pas la même si l'on effectue directement sur l'état initial la mesure de B, ou si l'on mesure d'abord A, puis B. Mathématiquement, le fait que les relations (3) ne sont pas satisfaites découle de ce qu'en Mécanique ondulatoire les probabilités s'expriment par des carrés de modules de quantités complexes.

Il est aisé de voir que les relations (1) ne peuvent pas non plus être satisfaites, car les quantités $P_i P^{(i)}_k$ et $P_k P^{(k)}_i$ ne sont pas égales; elles ne le seraient en effet que si l'on avait $|c_i|^2 = |\sum_j c_j d_{ji}|^2$, ce qui ne peut avoir lieu, puisque les $d_{ji}$ ne se réduisent pas aux $\delta_{ji}$ de KRONECKER. Il en résulte l'impossibilité de définir des probabilités $P_{ik}$ au sens du schéma général usuel; même si l'on parvenait à trouver des $P_{ik}$ satisfaisant aux relations (2), les relations (1) ne seraient pas satisfaites.

Il est donc possible d'introduire en Mécanique quantique la probabilité $P_{ik}$ d'avoir à la fois $A = \alpha_i$ et $B = \beta_k$. Cela se rattache évidemment à l'impossibilité postulée par la nouvelle Mécanique de mesurer simultanément deux grandeurs non commutables, comme le sont par hypothèse les grandeurs A et B. On peut mesurer successivement les deux grandeurs, ce qui permet de définir $P_i, P_k, P^{(i)}_k$ et $P^{(k)}_i$, mais chaque mesure de l'une des grandeurs influe sur la valeur de l'autre : ainsi se trouvent exclues la possibilité de mesures simultanées et celle de définir les $P_{ik}$. Comme le formalisme classique, qui comporte la possibilité de définir les $P_{ik}$ et qui entraîne la validité des relations (1), (2) et (3), découle du postulat d'objectivité (nous l'avons vu plus haut), il apparaît que la Mécanique ondulatoire abandonne ce postulat. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

La non-validité des équations (1), (2) et (3) entraîne-t-elle que le théorème des probabilités composées ne soit plus exact en Mécanique ondulatoire? La réponse est négative, si, du moins, on a soin d'énoncer correctement ce théorème. L'impossibilité de définir une grandeur $P_{ik}$ satisfaisant à l'équation (1) n'empêche pas en effet de définir une grandeur $P_{i,k}$ qui est la probabilité d'obtenir par des mesures successives $A = \alpha_i$ et $B = \beta_k$, ainsi qu'une grandeur $P_{k,i}$ qui est la probabilité d'obtenir par des mesures successives $B = \beta_k$ et $A = \alpha_i$. Seulement, ici, comme la mesure d'une grandeur peut influer sur les valeurs de l'autre, on n'aura plus en général $P_{i,k} = P_{k,i}$, et l'on ne pourra plus définir $P_{ik}$ comme égal à la valeur commune de $P_{i,k}$ et $P_{k,i}$. Cela n'empêchera pas de poser les formules

$$P_{i,k} = P_i P^{(i)}_k, \qquad P_{k,i} = P_k P^{(k)}_i, \tag{9}$$

qui expriment le théorème des probabilités composées. Mais ici, plus encore que dans le formalisme classique,

[1] L'astérisque indique la quantité complexe conjuguée.

il faut insister sur le fait que $P_i^{(k)}$ par exemple est la probabilité de la valeur $B = \beta_k$, *quand on sait* que $A = \alpha_i$ ; car, pour savoir que $A = \alpha_i$, il faut avoir fait une mesure de A et toute mesure de A peut influer sur la valeur de B.

On peut d'ailleurs encore définir ici la probabilité $P_k^{(A)}$ de trouver $B = \beta_k$ après avoir trouvé pour A l'une quelconque des valeurs $\alpha_i$, ainsi que la probabilité $P_i^{(B)}$ de trouver $A = \alpha_i$ après avoir trouvé pour B l'une quelconque des valeurs $\beta_k$. Conformément au théorème des probabilités totales, on écrira

$$P_k^{(A)} = \sum_i P_{i,k} = \sum_i P_i P_k^{(i)}, \qquad P_i^{(B)} = \sum_k P_{k,i} = \sum_k P_k P_i^{(k)},$$

formules qui remplacent les formules (3) et où l'on doit noter que l'on n'a en général ni $P_k^{(A)} = P_k$ ni $P_i^{(B)} = P_i$.

La non-validité des équations (3) résultant de l'inéquation (8) est due à l'intervention des arguments ou phases des quantités complexes. On dit que (8) exprime « l'interférence des probabilités », et c'est là un des résultats les plus fondamentaux de la Mécanique ondulatoire. De fait, c'est cette interférence des probabilités qui se traduit physiquement par l'existence des phénomènes d'interférences pour la lumière et pour les corpuscules (diffraction des électrons par exemple); nous le montrerons plus loin en étudiant l'expérience des franges de Wiener. Mais notons dès maintenant que l'interférence des probabilités est démontrée d'une façon irrécusable par les vérifications si nombreuses et si précises de la théorie des interférences en Optique physique et en Mécanique ondulatoire des particules matérielles.

Nous avons exposé le formalisme statistique de la Mécanique ondulatoire sur l'exemple des probabilités discontinues. Il est aisé d'étendre le formalisme aux probabilités continues, en introduisant des densités de probabilités. Montrons-le sur l'exemple très-simple d'un corpuscule assujetti à se déplacer, en l'absence de tout champ, sur une droite prise pour axe des $q$. Nous avons ici à considérer deux variables aléatoires canoniquement conjuguées : la variable $U = q$ et la variable $V = p$, $p$ étant la quantité de mouvement suivant l'axe des $q$. L'opérateur $P = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}$ admet comme valeurs propres toute valeur réelle de $p$, et à une valeur réelle donnée de $p$ correspond comme fonction propre l'onde plane $e^{-\frac{2\pi i}{h}pq}$ qui, convenablement normée, sera désignée par $\varphi(p, q)$. On peut démontrer aisément que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(p, q)\,\varphi(p, q_0)\,dp = \delta(q - q_0), \tag{10}$$

$\delta(q - q_0)$ étant la fonction singulière de Dirac qui généralise, dans le cas du continu, le symbole discontinu de Kronecker $\delta_{ik}$ (égal à o si $i \neq k$ et à 1 si $i = k$).

D'autre part, l'opérateur « $Q =$ multiplication par $q$ » admet comme valeurs propres toute valeur réelle $Q = q_0$, et à $q_0$ correspond, comme fonction propre, précisément la fonction singulière $\delta(q - q_0)$ de Dirac.

Si $\Psi(q)$ est la fonction d'onde du corpuscule supposée bien connue (cas pur au sens de Neumann), on pourra la développer sous les formes

$$\Psi(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(p)\,\varphi(p, q)\,dp = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(q_0)\,\delta(q - q_0)\,dq_0,$$

la première expression étant une intégrale de Fourier et la seconde résultant immédiatement des propriétés de la fonction singulière de Dirac. D'après les principes fondamentaux de la Mécanique ondulatoire, les densités de probabilité relatives aux variables aléatoires Q et P, quand le corpuscule est dans l'état décrit par $\Psi(q)$, sont donc

$$\rho(u) = \rho(q) = |\Psi(q)|^2, \qquad \rho(v) = \rho(p) = |c(p)|^2. \tag{11}$$

Nous pouvons, comme dans le schéma classique, introduire des probabilités liées $P(u\,|\,v) = P(q\,|\,p)$ et $P(v\,|\,u) = P(p\,|\,q)$ : la formule (11) et la formule évidente

$$\varphi(p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p, q_0)\,\delta(q - q_0)\,dq_0,$$

montrent aisément que

$$P(q\,|\,p) = P(p\,|\,q) = |\varphi(p, q)|^2 = \mathrm{Cte} = C. \tag{12}$$

Mais les quantités $\rho(q)$, $\rho(p)$, $P(q\,|\,p)$, $P(p\,|\,q)$ définies par (11) et (12) ne satisfont pas aux relations (3') du schéma classique. Les deux quantités

$$\rho^{(P)}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(p)\,P(p\,|\,q)\,dp = C\int_{-\infty}^{+\infty} |c(p)|^2\,dp = C$$

et

$$\rho^{(Q)}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(q)\,P(q\,|\,p)\,dq = C\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(q)|^2\,dq = C,$$

sont constantes et égales entre elles, mais elles ne sont pas respectivement égales à $\rho(q)$ et à $\rho(p)$, comme le voudrait le schéma classique.

De plus, les expressions

$$\rho(q)\,P(q\,|\,p) = C\,|\Psi(q)|^2 \qquad \text{et} \qquad \rho(p)\,P(p\,|\,q) = C\,|c(p)|^2$$

n'ayant pas la même valeur, les équations (1') ne nous permettent pas de définir une densité $\rho(q, p)$.

On peut cependant chercher s'il n'existerait pas une fonction $\rho(p, q)$ satisfaisant les équations (2'). De fait, cette fonction existe. J. Bass, reprenant un résultat de E. Wigner, en a donné la forme qui est la suivante :

$$\rho(q, p) = \frac{2}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{4\pi i}{h}pz}\,\Psi(q - z)\,\Psi^*(q + z)\,dz. \tag{13}$$

Cette fonction vérifie bien les relations (2') avec les formes (11) de $\rho(q)$ et de $\rho(p)$. Mais, si l'on introduisait la définition (13) dans les formules (1′), on trouverait pour $P(q|p)$ et $P(p|q)$ les valeurs suivantes :

$$P(p\,|\,q) = \frac{\rho(q,p)}{|c(p)|^2}, \qquad P(q,p) = \frac{\rho(q,p)}{|\Psi(q)|^2},$$

qui sont différentes l'une de l'autre et ne coïncident pas avec les valeurs (12) qu'imposent les principes de la Mécanique ondulatoire. Il est donc impossible de trouver une densité $\rho(q,p)$ satisfaisant à l'ensemble des conditions (1′) (2′) et (3′) du schéma classique, et cette non-existence de la densité $\rho(q,p)$ correspond à l'impossibilité de mesurer simultanément les grandeurs non commutables $q$ et $p$.

* * *

Comme nous l'avons rappelé au début de cette étude, les formules générales (1), (2), (3) ou (1′), (2′), (3′) de la statistique mathématique reposent sur le postulat, plus ou moins nettement explicité, que les êtres physiques sur lesquels porte la statistique possèdent des caractéristiques objectives indépendantes des opérations effectuées pour les constater. C'est parce que ce postulat n'est pas valable pour les corpuscules ou les systèmes de la Microphysique que les concepts et les formules de la statistique usuelle ne leur sont pas applicables. Il est amusant et instructif d'imaginer ce que pourrait être un jeu de cartes doué de propriétés statistiques analogues à celles qu'on rencontre en Microphysique.

Considérons pour cela un jeu de 32 cartes. A chaque carte est attachée la valeur de deux variables aléatoires : la couleur U pouvant prendre les valeurs cœur (1), pique (2), trèfle (3) et carreau (4), et le grade V pouvant prendre les valeurs as (1), roi (2), dame (3)... Nous admettrons que pour constater la couleur et le grade d'une carte, il faut deux opérations distinctes qui ne peuvent jamais être exécutées simultanément. Nous admettrons aussi que, comme pour un jeu de 32 cartes ordinaires, les probabilités $P_i$ et $P_k$ des valeurs $u_i$ et $v_k$ sont égales respectivement à $1/4$ et à $1/8$. Mais la propriété la plus caractéristique que nous attribuerons à notre jeu de cartes et qui le rendra analogue à un système de la Microphysique, sera la suivante : le fait de constater la couleur d'une carte pourra influer sur son grade et inversement. Une telle hypothèse serait évidemment absurde pour un jeu de cartes ordinaire, parce que les cartes ordinaires sont des objets macroscopiques doués de propriétés objectives, mais les corpuscules de l'échelle atomique se comportent à peu près comme le feraient les cartes du jeu que nous imaginons.

Pour notre jeu de cartes paradoxal, nous pouvons définir les $P_i$, les $P_k$ et même les $P_k^{(i)}$ et les $P_i^{(k)}$, mais les $P_{ik}$ n'existeront pas et l'on n'aura pas en général $P_i P_k^{(i)} = P_k P_i^{(k)}$. Pour préciser, supposons par exemple que le fait de constater que la couleur d'une carte est cœur entraîne automatiquement que la constatation subséquente du grade donne la valeur « roi » avec la probabilité $1/4$, ou la valeur « dame » avec la probabilité $3/4$ ; et supposons de plus que le fait de constater que la carte est un roi, entraîne automatiquement que la constatation subséquente de la couleur donne la valeur « pique » avec la probabilité $1/3$ ou la valeur « trèfle » avec la probabilité $2/3$. Nous admettons donc que $P_k^{(1)}$ est égal à $1/4$ pour $k=2$, à $3/4$ pour $k=3$ et à $0$ pour les autres valeurs de $k$, et que $P_i^{(2)}$ est égal à $1/3$ pour $i=2$, à $2/3$ pour $i=3$ et à $0$ pour $i=1$ ou $4$. Les autres $P_i^{(k)}$ et $P_k^{(i)}$ ont des valeurs que nous n'explicitons pas. Alors la probabilité de trouver cœur et roi, en constatant d'abord la couleur, puis le grade, sera $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ ; tandis que la probabilité de trouver roi et cœur, en constatant d'abord le grade, puis la couleur, sera $\frac{1}{8}\cdot 0 = 0$. D'ailleurs la probabilité de faire la constatation « roi » après avoir fait la constatation « cœur » ne sera pas égale à la probabilité de faire directement la constatation « roi » que nous supposons toujours égale à $1/8$. Les relations (1) et (3) ne sont donc pas satisfaites.

Remarquons encore que si, après avoir fait la seconde constatation, nous voulions recommencer la première, nous ne trouverions pas en général le même résultat. Ainsi, dans l'exemple développé plus haut, après avoir constaté successivement que la carte est un cœur et un roi, nous ne pourrions pas dire que c'est un roi de cœur, puisqu'une nouvelle constatation de la couleur nous donnerait « pique » ou « trèfle ». Cette circonstance est encore tout à fait analogue à celles qu'on rencontre en Microphysique.

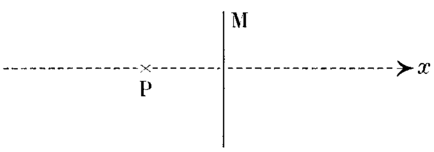
Il est intéressant de souligner que, dans le jeu de cartes à propriétés étranges que nous venons d'imaginer, les cartes perdent au moins partiellement les caractères d'objectivité qu'elles possèdent dans les jeux usuels. Dans ceux-ci, les cartes ont des caractéristiques objectives bien définies : l'une d'elles par exemple étant roi et cœur est un roi de cœur. C'est là ce qui permet de définir les probabilités et d'écrire les relations (1), (2), (3). Au contraire, dans notre jeu de cartes « microphysique », les cartes n'ont plus de caractéristiques objectives : aucune d'elles n'est à priori un roi de cœur et même, quand on a fait sur l'une d'elles les constatations successives cœur et roi, on ne peut dire que ce soit un roi de cœur. C'est pourquoi les $P_{ik}$ n'existent plus ici et, s'il est encore possible de définir les $P_i$, $P_k$, $P_i^{(k)}$ et $P_k^{(i)}$ et de se servir du théorème des probabilités composées, on n'est plus fondé à écrire les relations (1) et (3). Et pourtant les cartes de notre jeu, bien que dépourvues de caractéristiques objectives, *existent* réellement.

Il en est de même en Microphysique. Les corpuscules de l'échelle atomique existent, les physiciens l'admettent et à ce point de vue restent réalistes au sens philosophique du terme; mais ces corpuscules n'ont pas de caractéristiques objectives, celles que nous pouvons leur attribuer à certains instants dépendant des opérations que nous effectuons pour les constater (mesures) et de l'ordre dans lequel elles sont effectuées.

L'exemple du jeu de cartes microphysique est instructif, mais il n'offre pas une analogie complète avec le cas des systèmes de la Microphysique. En effet, pour ceux-ci, les probabilités s'expriment par le carré du module d'une quantité complexe, et c'est ce qui donne lieu à l'intervention de l'interférence des probabilités. Cette caractéristique essentielle des probabilités de la théorie quantique n'apparaît pas explicitement dans l'exemple du jeu de cartes.

* * *

Pour terminer, nous allons montrer sur un exemple physique simple comment l'interférence des probabilités traduit l'existence de ce qu'on nomme, en Physique expérimentale, des phénomènes d'interférences. Nous considérerons l'expérience des franges de Wiener qui se produisent au voisinage d'un miroir, et nous supposerons que l'onde incidente tombe normalement sur le miroir, le cas de l'incidence oblique n'apportant aucune complication essentielle.




L'onde incidente de la forme $ae^{2\pi i\nu t}e^{-2\pi i\frac{x}{\lambda}}$ est réfléchie totalement par le miroir, et l'onde réfléchie de la forme $ae^{2\pi i\nu t}e^{2\pi i\frac{x}{\lambda}}$ se superpose à l'onde incidente. Les formules sont applicables aussi bien à la réflexion de la lumière sur un miroir qu'à la réflexion sur un miroir d'un faisceau de corpuscules (électrons). La seule différence est que la relation entre $\lambda$ et $\nu$ n'est pas la même dans les deux cas, mais cela importe peu ici.

Si l'on désigne par V le volume total occupé par l'onde incidente et l'onde réfléchie superposées, la première sera représentée par la fonction d'onde *normée*

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{V}}\, e^{2\pi i\nu t}\, e^{-2\pi i\frac{x}{\lambda}},$$

et la seconde par la fonction d'onde normée

$$\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{V}}\, e^{2\pi i\nu t}\, e^{2\pi i\frac{x}{\lambda}},$$

qui seront les deux fonctions propres de l'opérateur $p_x = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}$ correspondant aux valeurs propres $\pm\frac{h}{\lambda}$. Au voisinage du miroir, l'onde $\Psi$ totale formée par la superposition de $\Psi_1$ et $\Psi_2$ sera [1]

$$\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{V}}\, e^{2\pi i\nu t}\, e^{-2\pi i\frac{x}{\lambda}} + \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{V}}\, e^{2\pi i\nu t}\, e^{2\pi i\frac{x}{\lambda}}\right],$$

le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ étant un facteur de normalisation tel que l'intégrale dans le volume V de $|\Psi|^2$ soit égal à l'unité.

Considérons les deux variables aléatoires $U = x$ et $V = p_x$ donnant la position et la composante $x$ de la quantité de mouvement associée à l'onde $\Psi$. La grandeur $p_x$ ne peut prendre que les deux valeurs $\pm\frac{h}{\lambda}$, tandis que U peut prendre toutes les valeurs $x_k$ correspondant à toutes les positions du corpuscule à la gauche du miroir. Les principes de la Mécanique ondulatoire donnent immédiatement

$$P_i = |c_i|^2 = \frac{1}{2}, \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2;$$

$$P_k = |\Psi|^2 = \frac{1}{V}\left[1 + \cos\left(4\pi\frac{x}{\lambda} + \varphi\right)\right].$$

La première expression signifie que si l'on fait une expérience permettant d'attribuer une quantité de mouvement au corpuscule, on aura une égale probabilité de la trouver dirigée vers le miroir ou dirigée en sens inverse.

Quant à l'expression de $P_k$, elle exprime l'existence, au voisinage du miroir, d'une variation périodique de la probabilité de présence du corpuscule, celle-ci étant nulle pour les abscisses $x_k$ telles que le cosinus soit égal à $-1$, et maximum pour les abscisses $x_k$ telles que le cosinus soit égal à 1. Cette variation, qui provient de la différence des phases entre l'onde incidente et l'onde réfléchie, résulte de l'interférence des probabilités et se traduit physiquement par l'existence des franges de Wiener au voisinage du miroir.

Si les deux faisceaux de sens de propagation inverses qui se superposent à la gauche du miroir étaient incohérents, la probabilité de présence du corpuscule dans cette région serait $|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$, au lieu de $|\Psi_1 + \Psi_2|^2$, et l'on trouverait $P_k = \frac{1}{V}$ : il n'y aurait pas d'interférences de probabilité, ni, par suite, de franges de Wiener.

Nous terminerons en attirant l'attention des spécialistes du Calcul des Probabilités sur la nécessité de faire reposer cette science sur des postulats assez larges pour qu'elle puisse contenir les lois statistiques de la Microphysique, lois statistiques qu'on peut considérer comme reposant sur des bases expérimentales très-assurées.

*(manuscrit reçu le 3 mars 1948)*

[1] $\varphi$ est la différence de phase introduite par la réflexion sur le miroir.