Laboratoire National de Radioélectricité

NOTE PRELIMINAIRE N° 129

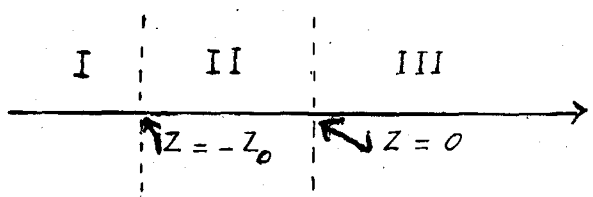
PENETRATION D UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE DANS UN MILIEU OU LA CONSTANTE DIELECTRIQUE VARIE LINEAIREMENT.

par

Louis de BROGLIE

PENETRATION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE DANS UN MILIEU OU LA CONSTANTE DIELECTRIQUE VARIE LINEAIREMENT.

Considérons une propagation d'ondes s'effectuant dans une direction prise pour axe Oz. L'onde se trouve d'abord dans un milieu I de constante diélectrique égale à un. A partir de l'abscisse $z = -z_0$, elle pénètre dans un milieu où la constante diélectrique varie suivant la loi $K = -\frac{z}{z_0}$. Cette constante devient donc negative à partir du plan $z = 0$ et le milieu au delà de ce plan (région III) est un milieu éteignant où il n'y a plus de propagation possible



Supposons qu'une onde incidente vienne de la gauche penétrer dans la région II. Dans la région I, on peut ecrire l'onde incidente sous la forme $e^{-j\alpha z}$ en prenant l'amplitude comme unité, ce qui ne restreint pas la generalité. L'onde incidente pénètre dans la région où elle se propage avec une vitesse variable différente de c. Au-delà du point $z = 0$ dans le milieu III, l'onde ne peut plus se propager et, comme il n'y a pas d'absorption, il faut qu'il y ait reflexion totale de l'onde sur la région III. Dans les régions I et II, il doit donc y avoir des ondes incidentes et reflechies de même intensité de sorte que le flux total d'énergie est partout nul

Calculons le phénomène. Dans la région I, on aura (au facteur $e^{j\omega t}$ près)

1) $$E_I = e^{-j\alpha z} + R\,e^{j\alpha z} \qquad \left(\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

R est l'amplitude reflechie, l'amplitude incidente étant prise pour unité.

Dans les régions II et III, l'équation de propagation est

2) $$\ddot{E} - \frac{\alpha}{z_0}\, z\, E = 0$$

équation dont la solution génerale peut s'écrire

3) $$E = \sqrt{z}\; Z_{\frac{1}{3}}(u) \quad \text{avec} \quad u = \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{\alpha^2}{z_0}}\; z^{\frac{3}{2}} = \frac{2j\alpha}{3\sqrt{z_0}}\; z^{\frac{3}{2}}$$

$Z_{\frac{1}{3}}$ étant une solution de l'équation de Bessel d'ordre 1/3. Mais il importe de distinguer ce que se passe dans la région II de ce qui se passe dans la région III. Dans la région II, z est négatif et en posant $A = \frac{2\alpha}{3\sqrt{z_0}}$, on a $u_{II} = jA(-|z|)\,j\sqrt{|z|} = A\,|z|^{\frac{3}{2}}$, quantité réelle. Dans la région III, z est positif et l'on a $u_{III} = jA\,z^{\frac{3}{2}}$, quantité purement imaginaire qu'on peut écrire $u_{III} = jv$ avec $v = A\,z^{\frac{3}{2}}$. Dans la région II, on devra donc poser

4) $$E_{II}(z) = a\sqrt{|z|}\;J_{\frac{1}{3}}(u) + b\sqrt{|z|}\;J_{\frac{1}{3}}(u)$$

a et b etant deux constantes complexes. Dans la région III, chaque solution sera le produit de $\sqrt{z}$ par une solution de l'equation de Bessel modifiée d'ordre 1/3 : $\ddot{Z} + \frac{1}{v}\dot{Z} - \left(1 + \frac{1}{9v^2}\right) Z = 0$ de la variable reelle v.

(voir Goudet, fonctions de Bessel, p.45 et ss). La seule solution de cette équation qui est nulle à l'infini à droite est celle qui se comporte pour v infini comme $e^{-v} = e^{ju}$: à une constante près, c'est donc la fonction

$$K_{\frac{1}{3}}(v) = j^{-\frac{1}{3}} J_{\frac{1}{3}}(jv) - j^{\frac{1}{3}} J_{-\frac{1}{3}}(jv)$$ (voir Goudet P.47 et 48).

Dans la région III, on posera donc

5) $$E_{III}(z) = c\sqrt{z}\left[j^{-\frac{1}{3}} J_{\frac{1}{3}}(jv) - j^{\frac{1}{3}} J_{-\frac{1}{3}}(jv)\right]$$

Au voisinage de $z = o$ on aura les développements suivants

$$E_{II}(z) = a\sqrt{|z|}\,(A|z|^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} + b\sqrt{|z|}\,(A|z|^{\frac{3}{2}})^{-\frac{1}{3}} + \dots = -aMA^{\frac{1}{3}}z + bNA^{-\frac{1}{3}} + \dots z^2 + \dots$$

6)

$$E_{III}(z) = c\sqrt{z}\left[j^{-\frac{1}{3}}(jv)^{\frac{1}{3}} - j^{\frac{1}{3}}(jv)^{-\frac{1}{3}} + \dots\right] = cMA^{\frac{1}{3}}z - cNA^{-\frac{1}{3}} + \dots z^2 + \dots$$

avec $M = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})}$ et $N = \frac{1}{2^{1/3}\Gamma(\frac{4}{3})}$

En écrivant que pour $z = o$, on a $E_{II}(o) = E_{III}(o)$, $\dot{E}_{II}(o) = \dot{E}_{III}(o)$,

on trouve $a = b = -c$, d'où

7) $$E_{II}(z) = -c\left[\sqrt{|z|}\,J_{\frac{1}{3}}(A|z|^{\frac{3}{2}}) + \sqrt{|z|}\,J_{-\frac{1}{3}}(A|z|^{\frac{3}{2}})\right]$$

Cette forme de E_{II} est satisfaisante car, en exprimant $J_{-\frac{1}{3}}$ en fonction de $J_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ (ce qui n'introduit que des coefficients réels) on trouve

$$E_{II}(z) = c^{te}\sqrt{|z|}\left[(\gamma - j\delta)\,H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(A|z|^{\frac{3}{2}}) + (\gamma + j\delta)\,H^{(2)}_{\frac{1}{3}}(A|z|^{\frac{3}{2}})\right]$$ où γ et δ

sont des constantes réelles (car $J_{\frac{1}{3}}(u) + J_{-\frac{1}{3}}(u) = \gamma J_{\frac{1}{3}}(u) + \delta N_{\frac{1}{3}}(u)$ avec γ et δ réels). L'onde dans la région II est donc la superposition d'une onde incidente en $H^{(2)}$ et d'une onde réfléchie en $H^{(1)}$ qui ont même intensité puisque $|\gamma - j\delta|^2 = |\gamma + j\delta|^2 = \gamma^2 + \delta^2$. Ceci était prévu.

Au point $z = -z_0$, nous devons écrire

$$E_I(-z_0) = E_{II}(-z_0) \;;\; \dot{E}_I(-z_0) = \dot{E}_{II}(-z_0)$$

d'où d'après (I) et (7)

8) $$e^{j\alpha z_0} + R\,e^{-j\alpha z_0} = E_{II}(-z_0) \;;\; -j\alpha\,e^{j\alpha z_0} + j\alpha R\,e^{-j\alpha z_0} = \dot{E}_{II}(-z_0)$$

d'où l'on tire

9) $$R = e^{2j\alpha z_0}\,\frac{1 - \frac{j}{\alpha}\left(\frac{\dot{E}_{II}}{E_{II}}\right)_{z=-z_0}}{1 + \frac{j}{\alpha}\left(\frac{\dot{E}_{II}}{E_{II}}\right)_{z=-z_0}}$$

Or d'après (7), même si C est complexe, on a $\frac{\dot{E}_{II}}{E_{II}} =$ quantité réelle. En particulier $\left(\frac{\dot{E}_{II}}{E_{II}}\right)_{z=-z_0}$ est réel. Donc $R = e^{2j\alpha z_0}\,\frac{1-jC}{1+jC}$ où C est réel.

Donc $|R| = 1$: les deux ondes dans la région I ont même intensité, il y a réflexion totale.

Conformément à un théorème de M. MESNY, le vecteur de Poynting a partout la même valeur parce qu'il est partout nul.

JUIN 1949