TOME 12. N° 4. AVRIL 1951.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM

SUR LA POSSIBILITÉ D'UNE STRUCTURE COMPLEXE DES PARTICULES DE SPIN DIFFÉRENT DE $\frac{1}{2}$

Par LOUIS DE BROGLIE.

SOMMAIRE. — L'idée que les particules de spin différent de $\frac{1}{2}$ $\left(\text{en unité } \frac{h}{2\pi}\right)$ sont complexes a été émise par l'auteur dès 1933-1934 lorsqu'il a commencé à développer sa Mécanique ondulatoire du photon. Elle a été reprise récemment, notamment dans un travail de M. Frenkel et dans un article de MM. Fermi et Yang. Nous avons étudié à nouveau cette question depuis quelque temps avec la collaboration de Mme Tonnelat et nous donnons ici un exposé de nos dernières idées à ce sujet.

Après avoir rappelé une tentative assez imparfaite que nous avions faite dans ce sens en 1936, nous la reprenons d'une manière qui paraît plus satisfaisante. Raisonnant sur le cas d'une particule de spin 1 considérée comme formée de deux constituants de spin $\frac{1}{2}$, nous montrons comment on peut séparer le mouvement du centre de gravité de la particule du mouvement « interne » et nous explicitons les solutions relatives au mouvement interne, qui sont étudiées d'autre part avec plus de détails par Mme Tonnelat. Nous montrons ensuite comment il est possible de transporter sur le centre de gravité les propriétés de spin de l'ensemble des deux constituants et de retrouver ainsi les équations bien connues qui représentent le mouvement des particules de spin 1 considérées comme des unités. On obtient également ainsi une interprétation de la forme non définie positive de la densité de probabilité de présence dans la théorie de la particule de spin 1. Ces considérations, qui sont vraisemblablement susceptibles de généralisations pour les particules de spin supérieur à 1, semblent justifier les idées qui ont servi de points de départ à la Mécanique ondulatoire du photon et qui nous ont permis d'écrire les équations de la particule de spin 1, puis de les généraliser par la même méthode aux cas des particules de spin supérieur à 1.

1. Exposé de la question. — Dans l'état actuel de nos connaissances, il est tentant de supposer que les particules de spin $\frac{1}{2}$ telles que l'électron, le proton, le neutron, le neutrino, etc. sont des particules ou corpuscules « élémentaires ».

Malgré la difficulté qu'il y a à préciser exactement l'idée de corpuscule élémentaire, il nous semble donc naturel d'admettre que les corpuscules élémentaires sont toujours de spin $\frac{1}{2}$, en ce sens que toute particule de spin différent de $\frac{1}{2}$ doit pouvoir se représenter comme formée par l'union de corpuscules de spin $\frac{1}{2}$. Cette idée se trouve renforcée par le fait bien connu que les particules de spin entier en unité $\left(\frac{h}{2\pi}\right)$ suivent la statistique de Bose-Einstein tandis que les particules de spin demi-entier suivent la statistique de Fermi-Dirac. Or, il résulte d'un théorème important démontré, il y a plus de 20 ans, avec rigueur par MM. Ehrenfest et Oppenheimer, qu'un système formé d'un nombre pair de constituants de spin $\frac{1}{2}$ doit suivre la statistique de Bose-Einstein, tandis qu'un système formé d'un nombre impair de constituants de spin $\frac{1}{2}$ doit obéir à la statistique de Fermi-Dirac; ce théorème a joué un rôle capital dans l'étude de la constitution des noyaux atomiques. Il vient fortement à l'appui de l'hypothèse faite plus haut sur la complexité des particules de spin différent de $\frac{1}{2}$.

C'est cette hypothèse sur la constitution des particules de spin différent de $\frac{1}{2}$ qui m'a amené dès 1933-1934 à tenter de construire sur cette base une théorie des photons. Les photons doivent, en effet, être des particules de spin 1 comme le prouve la symétrie de l'onde qui leur est associée, c'est-à-dire de l'onde électromagnétique, car les propriétés de polarisation de l'onde lumineuse peuvent être considérées comme traduisant le fait que le spin du photon a la valeur 1. J'ai donc essayé dès cette date de construire une théorie du photon en le considérant comme une particule complexe formée de deux constituants de spin $\frac{1}{2}$. Naturellement, une telle théorie doit conduire à définir un état de la particule complexe (état pseudo-scalaire) où le spin résultant est nul par suite de la compensation du spin des deux constituants et un autre état (état vectoriel) où il y a addition du spin des deux constituants et où le spin résultant est par suite égal à 1 : le premier état correspondrait à un photon pseudo-scalaire de spin 0 qui n'est pas actuellement connu, tandis que l'état vectoriel décrit le photon usuel, le photon de la lumière. Ceci conduit à préciser que le système formé de deux constituants de spin $\frac{1}{2}$ forme une particule de « spin maximum » 1 susceptible de deux états, l'un de spin 1, l'autre de spin 0. Cette remarque se généralise pour les particules de spin maximum $n\left(n = \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\right)$.

En développant cette théorie à laquelle j'ai donné le nom de « Mécanique ondulatoire du photon », j'ai admis que la masse propre du photon n'était pas rigoureusement nulle, mais seulement extraordinairement petite (par rapport à celle de l'électron). Je sais bien que cette hypothèse, qui amène à ne plus considérer l'invariance de jauge comme rigoureuse, est rejetée par la plupart des théoriciens. Bien que, personnellement l'hypothèse d'une masse propre non nulle du photon ne me paraisse pas inadmissible, je ne veux pas chercher ici à la défendre. Je ferai seulement remarquer qu'elle a l'avantage de permettre, en développant la théorie du photon, d'être conduit aux équations générales de la particule de spin 1 (avec termes de masse) et, si l'on veut ensuite attribuer au photon une masse propre nulle, on n'a plus qu'à poser égale à zéro, la masse propre qui figure dans les équations obtenues. C'est parce que j'ai suivi cette voie que j'ai pu obtenir dès 1934 (*Une nouvelle théorie de la lumière*, Hermann, 1934), à la fois sous forme spinorielle et sous forme tensorielle, les équations de la particule de spin 1 et, du même coup, celles de la particule de spin 0, avec les termes de masse. Ces équations ont été retrouvées deux ans plus tard (avec adjonction de termes de charge) par M. Alexandre Proca et elles sont aujourd'hui couramment appliquées aux mésons considérés comme des particules de spin 1 liées aux champs nucléaires.

On trouvera des exposés de la théorie du photon ainsi obtenue dans plusieurs ouvrages que j'ai publiés à ce sujet depuis 1934 [1]. J'ai montré en particulier comment, en introduisant dans cette théorie la seconde quantification, l'on pouvait retrouver la théorie quantique du champ électromagnétique qui doit son origine aux travaux de MM. Jordan, Pauli et Heisenberg. Il y a cependant quelques différences entre les résultats que l'on obtient ainsi et ceux de la théorie quantique des champs électromagnétiques sous sa forme usuelle : j'ai insisté sur ces points dans un récent Ouvrage [2]. On retrouve d'ailleurs dans ma présentation comme en théorie quantique des champs, les difficultés relatives à l'énergie d'interaction des particules électrisées avec le champ, énergie qui est trouvée infinie. Reprenant récemment une idée que j'avais émise, sous une forme imparfaite, dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1935 [3], j'ai essayé de trouver des valeurs finies pour l'énergie propre des corpuscules électrisés; je ne puis parler ici de cette tentative, car cela sortirait du cadre de mon exposé [4].

Généralisant l'idée qui m'avait guidé dans l'édification de la théorie de la particule de spin maximum 1, j'ai montré ensuite dans un Ouvrage intitulé *Théorie générale des particules de spin quelconque* [5] que l'on peut aisément obtenir les équations de la particule de spin maximum n en la considérant comme une particule complexe formée de $2n$ constituants de spin $\frac{1}{2}$ et en suivant la même voie que pour le photon. Les équations sont irréductiblement du type spinoriel pour les particules de spin demi-entiers $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, tandis qu'on peut les ramener au type tensoriel pour les particules de spin entier (1, 2, 3, ...). On retrouve ainsi dans l'ensemble les résultats qui avaient été déjà donnés dans les beaux travaux de MM. Dirac, Pauli et Fierz sur ce sujet.

Dans toute cette théorie des particules de spin différent de 1 on attribue à la particule trois coordonnées que je nommerai X, Y, Z. Que représentent ces coordonnées si l'on admet que la particule est complexe? Je dois à M. Jean-Louis Descouches de m'avoir suggéré, presque dès le début de mes recherches à ce sujet, que les coordonnées X, Y, Z doivent être les coordonnées du centre de gravité de la particule complexe, ce qui dans le cas d'une particule de spin maximum 1 formée de deux constituants supposés de même masse m_0 conduit à poser

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad Y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad Z = \frac{z_1 + z_2}{2};$$

où x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 sont respectivement les coordonnées des deux constituants. Partant de là, j'ai généralement établi dans mes Ouvrages les équations de la particule de spin maximum 1 en écrivant les équations auxquelles obéiraient séparément les deux constituants de spin $\frac{1}{2}$ s'ils étaient sans interaction, puis en opérant une « fusion » des deux constituants, opération qui s'exprime mathématiquement par une fusion (verschmelzung) des matrices α de Dirac relatives aux constituants. Cette manière d'obtenir les équations de la particule de spin maximum 1 par fusion des deux constituants, qui peut se généraliser pour la particule de spin maximum n, n'est qu'un procédé heuristique et n'est pas logiquement satisfaisante. Elle implique notamment que l'on introduise la masse propre M_0 de la particule complexe comme égale à la somme $2\,m_0$ des masses des constituants : or la formation de la particule stable à partir de ses constituants devant être exoénergétique, la masse propre de cette particule doit être inférieure à la somme des masses propres de ses constituants.

Conscient de l'insuffisance de mes raisonnements, j'ai essayé en 1936 dans une Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [6] d'établir une théorie détaillée de la structure complexe des particules de spin maximum 1. Les idées qui m'ont guidé en écrivant cette Note et que je crois toujours exactes, sont les suivantes :

1° Il doit être possible de séparer le mouvement du centre de gravité de la particule complexe du mouvement relatif des constituants autour du centre de gravité, de telle façon que le mouvement du centre de gravité soit décrit par les équations de la particule de spin 1 (du type des équations de la Mécanique ondulatoire du photon) et *de façon que soit ainsi réalisé un transfert sur le mouvement du centre de gravité des propriétés de spin des constituants.*

2° Dans le système propre de la particule, c'est-à-dire dans un système de référence où son centre de gravité est au repos, il doit être possible de trouver une fonction d'onde qui décrive l'état interne de la particule.

3° La complexité interne de la particule doit pouvoir expliquer pourquoi la densité de probabilité de présence qui, pour un corpuscule de spin $\frac{1}{2}$ a la forme définie positive $|\Psi|^2$, n'a plus cette forme pour une particule de spin différent de $\frac{1}{2}$, mais peut, dans le cas d'une particule de spin maximum 1 animé d'un mouvement d'ensemble rectiligne et uniforme de vitesse βc, s'écrire $|\Phi|^2\sqrt{1-\beta^2}$, avec apparition du facteur de contraction de Lorentz $\sqrt{1-\beta^2}$, Φ étant ici la fonction d'ondes.

Si les idées précédentes qui m'ont guidé dans ma Note de 1936 me paraissent toujours exactes, je dois dire que la façon dont j'ai alors essayé de les développer ne m'a jamais donné satisfaction. En écrivant l'équation du système des deux constituants, je n'avais pas introduit de terme d'interaction, ce qui revenait à admettre implicitement entre ces constituants une interaction en $\delta\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|\right)$, hypothèse arbitraire qui conduisait à des difficultés : de plus, la masse propre M_0 de la particule complexe était toujours posée égale à la somme $2\,m_0$ des masses propres des constituants, ce qui, comme je l'ai dit déjà, n'est guère admissible.

Après être resté longtemps sans reprendre ce problème, j'ai eu connaissance, il y a deux ou trois ans, d'un Mémoire de M. Frenkel où il a développé, sans avoir eu connaissance de mes travaux, des idées très analogues aux miennes [7]. Il a écrit en effet, en parlant des équations d'ondes des particules de spin différent de $\frac{1}{2}$: « I believe that equations of this type will give an adequate description of complex particles treated as material points with certain inner degrees of freedom ». Mon attention ayant été ramenée sur ce sujet par la lecture de ce Mémoire, j'ai entrepris alors avec Mme Tonnelat quelques nouveaux calculs qui ne nous ont pas donné entière satisfaction et que nous n'avons pas publiés. Mais tout récemment une tentative analogue a été faite par MM. E. Fermi et C. N. Yang [8] qui ont calculé la fonction d'onde représentant l'état interne pseudo-scalaire d'un méson considéré comme une particule complexe formée de deux constituants de spin $\frac{1}{2}$. Nous avons alors, Mme Tonnelat et moi, repris de nouveau l'étude de la question et nous sommes parvenus à des résultats qui sont, je crois, beaucoup plus satisfaisants que les résultats antérieurs : on trouvera dans un article complémentaire de Mme Tonnelat quelques précisions sur le détail des calculs.

2. Vérification des trois idées directrices. —

Nous désignerons par x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées des deux constituants de spin $\frac{1}{2}$ que nous supposerons pour simplifier avoir la même masse m_0. Ces deux constituants ont pour équation d'ondes des équations de Dirac où nous choisirons, suivant notre habitude, pour les matrices α de Dirac les valeurs suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix},\qquad
\alpha_2=\begin{vmatrix}0&0&0&i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{vmatrix},\\
&\alpha_3=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{vmatrix},\qquad
\alpha_4=\begin{vmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}.
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Nous introduirons ensuite les matrices à 16 lignes et 16 colonnes qui sont classiques en Mécanique ondulatoire du photon :

$$(a_j^{(1)})_{ik,lm}=(\alpha_j)_{il}\,\delta_{km},\qquad (a_j^{(2)})_{ik,lm}=(-1)^j(\alpha_j)_{km}\,\delta_{il};\qquad(2)$$

où les δ sont des symboles de Kronecker et où tous les indices varient de 1 à 4.

Nous prendrons alors comme équations d'ondes du système des deux corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ formant la particule complexe (comme dans ma Note de 1936, mais avec en plus un terme d'interaction) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_{ik}}{\partial t} = \Big[& a_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_1} + a_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_2} + a_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + a_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial y_2} + a_3^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + a_3^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2} \\ & + \frac{2\pi i}{h} m_0 c (a_4^{(1)} + a_4^{(2)}) \\ & + \frac{2\pi i}{h} V\left(\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|\right)\left(1 - \vec{\alpha}_1 . \vec{\alpha}_2\right)\Big]\Psi_{ik}, \quad (3)\end{aligned}$$

les Ψ_{ik} (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t) étant les 16 composantes de la fonction d'onde du système des deux constituants. Nous avons introduit un terme d'interaction de la forme proposée par M. Fermi dans son récent Mémoire. On peut choisir, à titre d'essai, pour la fonction $V\left(\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|\right)$ une forme simple telle que celle du « trou de potentiel ».

Nous définirons alors les coordonnées X, Y, Z du centre de gravité de la particule complexe et les coordonnées relatives ξ, η, ζ par les formules

$$\left.\begin{aligned} & X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad Y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad Z = \frac{z_1 + z_2}{2}; \\ & \xi = x_1 - X = \frac{x_1 - x_2}{2}, \qquad \eta = y_1 - Y = \frac{y_1 - y_2}{2}, \\ & \qquad \zeta = z_1 - Z = \frac{z_1 - z_2}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Si nous employons ces nouvelles variables, l'équation d'onde (3) s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_{ik}}{\partial t} = \Big[& \frac{a_1^{(1)} + a_1^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{a_2^{(1)} + a_2^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial Y} \\ & + \frac{a_3^{(1)} + a_3^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{a_1^{(1)} - a_1^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \xi} \\ & + \frac{a_2^{(1)} - a_2^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{a_3^{(1)} - a_3^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \zeta} \\ & + \frac{2\pi i}{h} m_0 c (a_4^{(1)} + a_4^{(2)}) \\ & + \frac{2\pi i}{h} V\left(1 - \vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2\right)\Big]\Psi_{ik}, \quad (5)\end{aligned}$$

où Ψ_{ik} est maintenant exprimée à l'aide des variables X, Y, Z, ξ, η, ζ.

Plaçons-nous maintenant dans le système propre de la particule, c'est-à-dire dans un système de référence où le centre de gravité est au repos et où la fonction d'onde, que nous désignerons par $\Psi^{(0)}$ (ξ_0, η_0, ζ_0, t_0) en affectant de l'indice o tout ce qui se rapporte au système propre, ne dépend plus que des variables relatives. Dans le système propre, nous obtenons les équations suivantes, pour déterminer les états internes quantifiés de la particule complexe :

$$\begin{aligned}\Big[& \frac{a_1^{(1)} - a_1^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \xi_0} + \frac{a_2^{(1)} - a_2^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \eta_0} \\ & + \frac{a_3^{(1)} - a_3^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \zeta_0} \\ & + \frac{2\pi i}{h} m_0 c (a_4^{(1)} + a_4^{(2)}) \\ & + \frac{2\pi i}{h} V\left(\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|\right)\left(1 - \vec{\alpha}_1 . \vec{\alpha}_2\right)\Big]\Psi_{ik}^{(0)} = \frac{2\pi i}{h}\frac{W_0}{c}\Psi_{ik}^{(0)}. \quad (6)\end{aligned}$$

A l'état interne d'énergie quantifiée W_0 correspond une masse propre de la particule complexe égale d'après le principe de l'inertie de l'énergie à $M_0 = \frac{W_0}{c^2}$.

On trouve ainsi d'abord une série d'états quantifiés internes pseudo-scalaires; puis on trouve une autre série d'états quantifiés vectoriels. Chacune de ces séries peut être représentée par les solutions trouvées par M. Fermi et aussi par des solutions indépendantes qui, d'après leur forme, correspondent à des doublets dont l'axe est dirigé suivant $O\xi_0$, $O\eta_0$ ou $O\zeta_0$.

Nous fixerons notre attention exclusivement sur les états « normaux », c'est-à-dire sur ceux qui, dans le cas vectoriel comme dans le cas pseudo-scalaire, correspondent à la plus petite valeur propre. Soit alors

$$\Psi_{ik}^{(0)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t_0) = \varphi_{ik}^{(0)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t_0)\, e^{\frac{2\pi i}{h} M_0 c^2 t_0}, \quad (7)$$

l'un de ces états normaux (la valeur de M_0 peut varier suivant que l'état considéré est l'état normal vectoriel ou l'état normal pseudo-scalaire et la forme des $\varphi_{ik}^{(0)}$ varie suivant que l'état considéré est l'état normal pseudo-scalaire, ou l'un ou l'autre des états triplets vectoriels normaux).

Il s'agit maintenant de retrouver pour le mouvement du centre de gravité de la particule complexe, les équations de la particule de spin maximum 1 de telle façon que le spin des constituants se trouve reporté sur le centre de gravité.

Pour cela nous remarquerons que, d'après les résultats connus de la Mécanique ondulatoire du photon, pour une onde plane monochromatique décrivant un mouvement d'ensemble rectiligne et uniforme de la particule, il y a quatre indices privilégiés, que je désignerai par $\underline{i}\,\underline{k}$, tels que les composantes $\Phi_{\underline{i}\underline{k}}^{(0)}(t_0)$ de cette onde dans le système propre soient les seules composantes non nulles (quand on prend dans le système propre l'axe des z dans la direction de la propagation initiale de l'onde). Avec la représentation (I) adoptée ici pour les α, l'indice $\underline{i}$ ne peut prendre que les valeurs 3 et 4 et l'indice $\underline{k}$ que les valeurs 1 et 2. D'autre part, nous venons de voir qu'il existe quatre états quantifiés normaux de la particule, l'un à symétrie sphérique, les trois autres correspondant à un doublet.

Il est alors aisé de voir que l'on peut faire correspondre chacune de ces quatre solutions à un couple d'indices privilégiés (¹) et par suite la représenter par $\varphi_{\underline{i}\underline{k}}^{(0)}$. La fonction d'onde du système pouvant

(¹) En réalité, ceci n'est pas tout à fait exact, parce que, tandis que les deux états vectoriels de composantes de spin le long de Oz égales à ± 1 correspondent respectivement aux couples d'indices $i = 3$, $k = 1$ et $i = 4$, $k = 2$, l'état pseudo-scalaire et le troisième état vectoriel intéressent à la fois les couples d'indices $i = 3$, $k = 2$ et $i = 4$, $k = 1$, ce qui oblige à compliquer un peu la démonstration qui suit sans rien y changer d'essentiel (*voir* Appendice).

correspondre à une superposition d'états quantifiés normaux, nous poserons

$$\Psi_{rs}^{(0)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t_0) = \sum_{\underline{ik}} a_{\underline{ik}}^{(0)} (\varphi_{\underline{ik}}^{(0)})_{rs}\, e^{\frac{2\pi i}{h} W_{\underline{ik}}^{(0)} t_0}. \tag{8}$$

où $(\varphi_{\underline{ik}}^{(0)})_{rs}$ est la composante rs de la fonction $\varphi_{\underline{ik}}^{(0)}$. Les fonctions indépendantes $\varphi_{\underline{ik}}^{(0)}$ représentant les différents états de spin sont orthogonales entre elles : nous les normerons de façon à avoir

$$\int \sum_{rs} (\varphi_{\underline{ik}}^{(0)})_{rs}^{\star} (\varphi_{\underline{jl}}^{(0)})_{rs}\, d\tau_0 = \delta_{\underline{ij}}\, \delta_{\underline{kl}} \frac{1}{|\Delta|}, \tag{9}$$

où $d\tau_0 = d\xi_0 d\eta_0 d\zeta_0$ et où Δ est le déterminant jacobien (égal à -8) des variables x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 par rapport aux variables X, Y, Z, ξ, η, ζ. Nous définirons les seules composantes non nulles de la fonction $\Phi^{(0)}(t_0)$ qui décrit le mouvement du centre de gravité dans le système propre par la formule

$$\Phi_{\underline{ik}}^{(0)}(t_0) = |\Delta| \int \varphi_{\underline{ik}}^{(0)\star} \Psi^0\, d\tau_0, \tag{10}$$

c'est-à-dire que $\Phi_{\underline{ik}}^{(0)}$ est la projection de $\Psi^{(0)}$ sur $\varphi_{\underline{ik}}^{(0)}$. On trouve alors, d'après (8),

$$\begin{aligned}\Phi_{\underline{ik}}^{(0)}(t_0) &= |\Delta| \sum_{\underline{jl}} a_{\underline{jl}}^{(0)} \int \sum_{rs} (\varphi_{\underline{ik}}^{(0)})_{rs}^{\star} (\varphi_{\underline{jl}}^{(0)})_{rs}\, d\tau_0\, e^{\frac{2\pi i}{h} W_{\underline{jl}}^{0} t^0} \\ &= a_{\underline{ik}}^{(0)}\, e^{\frac{2\pi i}{h} W_{\underline{ik}}^{(0)} t_0},\end{aligned} \tag{11}$$

On a ainsi défini dans le système propre la fonction d'onde du centre de gravité, c'est-à-dire la fonction d'onde de la particule complexe considérée comme une unité. Si l'on passe alors du système propre à un autre système galiléen par une transformation de Lorentz avec vitesse relative le long de l'axe oz (qui a servi à classer les états normaux dans le système propre), la fonction $\Phi(X, Y, Z, t)$ obtenue par cette transformation à partir de $\Phi^{(0)}(t_0)$ satisfait aux équations de la particule de spin 1 ou de spin 0 et admet par suite les solutions vectorielles et pseudo-scalaires bien connues en Mécanique ondulatoire du photon.

Finalement nous sommes donc parvenus à décrire les états quantifiés internes de la particule et à reporter, d'une façon qui me paraît satisfaisante, le spin des constituants sur le centre de gravité. Les deux premiers points du programme tracé dans notre Note de 1936 se trouvent ainsi remplis; il reste à examiner le troisième point en reprenant, avec nos nouvelles définitions, le raisonnement esquissé en 1936.

Reprenons la question. Si Φ désigne la fonction d'onde d'une particule de spin 1, la quantité $|\Phi|^2 = \sum_{ik} |\Phi_{ik}|^2$ représente la densité d'énergie et non pas la densité de probabilité de présence. Pour obtenir une quantité qui puisse, dans une certaine mesure, jouer le rôle de probabilité de présence, il faut considérer la grandeur

$$\rho = \sum_{ik} \Phi_{ik}^{\star} \frac{a_4^{(1)} + a_4^{(2)}}{2} \Phi_{ik}. \tag{12}$$

Or si l'onde Φ est une onde plane monochromatique décrivant un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse βc de la particule, on trouve que ρ a la valeur $\sum_{ik} |\Phi_{ik}|^2 \sqrt{1-\beta^2}$, où l'on voit apparaître le facteur $\sqrt{1-\beta^2}$ de la contraction de Lorentz. D'où cela provient-il ?

Pour essayer de le comprendre, remarquons d'abord que si $\Psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t)$ est la fonction d'onde du système formé par les deux constituants, la quantité

$$\begin{aligned}&|\Psi|^2\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2 \\ &\quad = \sum_{ik} |\Psi_{ik}|^2\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2\end{aligned}$$

sera la probabilité de présence du point figuratif dans l'élément $dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2$ de l'espace de configuration à l'instant t. Nous devons donc normer Ψ en posant

$$\begin{aligned}1 &= \int \sum_{ik} |\Psi_{ik}|^2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2 \\ &= \int \sum_{ik} |\Psi_{ik}|^2 |\Delta|\, dX\, dY\, dZ\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,\end{aligned} \tag{13}$$

Δ étant le déterminant fonctionnel déjà rencontré plus haut. Dans le système propre, on doit aussi avoir de même

$$\int \sum_{ik} |\Psi_{ik}^{(0)}|^2 |\Delta|\, dX_0\, dY_0\, dZ_0\, d\xi_0\, d\eta_0\, d\zeta_0 = 1. \tag{14}$$

Or la contraction de Lorentz nous donne

$$\left.\begin{aligned} dX\, dY\, dZ &= dX_0\, dY_0\, dZ_0 \sqrt{1-\beta^2}, \\ d\xi\, d\eta\, d\zeta &= d\xi_0\, d\eta_0\, d\zeta_0 \sqrt{1-\beta^2} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

et le fait que $|\Psi|^2$ et $|\Psi^{(0)}|^2$ ne dépendent pas de X, Y, Z et de X_0, Y_0, Z_0 permet de voir que

$$\begin{aligned}&\int \sum_{rs} |\Psi_{rs}|^2 d\xi\, d\eta\, d\zeta \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \int \sum_{rs} |\Psi_{rs}^{(0)}|^2 d\xi_0\, d\eta_0\, d\zeta_0.\end{aligned} \tag{16}$$

D'autre part, d'après la façon dont nous avons défini les amplitudes de la fonction d'onde Φ du centre de gravité de manière à reporter sur lui le spin des constituants, on voit que, lorsqu'on passe du système propre à un autre système galiléen, la transformation des $a_{ik}^{(0)}$ en a_{ik} est la même que la transformation des $\Psi_{ik}^{(0)}$ en Ψ_{ik}. On peut donc écrire encore la relation (16) en y remplaçant les Ψ par les a, ce qui, d'après la seconde relation (15), donne, puisque les a sont des constantes,

$$\sum_{rs} |a_{rs}|^2 = \frac{\sum_{rs} |a_{rs}^{(0)}|^2}{1-\beta^2} = \sum_{\underline{ik}} |a_{\underline{ik}}^{(0)}|^2 \frac{1}{1-\beta^2}, \qquad (17)$$

car, parmi les $a_{rs}^{(0)}$, seuls les $a_{\underline{ik}}^{(0)}$ sont différents de zéro.

Maintenant il est évident que l'on doit obtenir la probabilité de présence du centre de gravité de la particule complexe dans l'élément de volume $dXdYdZ$ en intégrant sur ξ, η, ζ l'expression

$$\sum_{rs} |\Psi_{rs}|^2 |\Delta| \, dX \, dY \, dZ \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

de la probabilité de présence dans l'espace de configuration. La probabilité de présence de la particule complexe considérée comme une unité est donc

$$\rho(X, Y, Z, t) = \int \sum_{rs} |\Psi_{rs}|^2 \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \, |\Delta|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \int \sum_{rs} |\Psi_{rs}^{(0)}|^2 |\Delta| \, d\xi_0 \, d\eta_0 \, d\zeta_0. \qquad (18)$$

Or, avec les définitions adoptées et la normalisation (9) des $\varphi_{ik}^{(0)}$, nous avons

$$\int \sum_{rs} |\Psi_{rs}^{(0)}|^2 \, d\xi_0 \, d\eta_0 \, d\zeta_0$$
$$= \sum_{\underline{ik}} \sum_{\underline{jl}} a_{\underline{ik}}^{(0)*} a_{\underline{jl}}^{(0)} \int \sum_{rs} (\varphi_{\underline{ik}}^{(0)})_{rs}^* (\varphi_{\underline{jl}}^{(0)})_{rs} \, d\tau_0$$
$$= \sum_{\underline{ik}} \frac{|a_{\underline{ik}}^{(0)}|^2}{|\Delta|} = \sum_{ik} |a_{ik}|^2 \frac{1-\beta^2}{|\Delta|}. \qquad (19)$$

D'où

$$\rho(X, Y, Z, t) = \sum_{ik} |a_{ik}|^2 \sqrt{1-\beta^2}, \qquad (20)$$

ce qui est bien la formule que l'on voulait retrouver.

Nous avons donc maintenant justifié les trois idées essentielles de la Note de 1936. Nous l'avons fait en nous bornant à considérer une particule de spin maximum 1 dont les deux constituants de spin $\frac{1}{2}$ auraient la même masse propre. On pourrait généraliser en considérant une particule de spin maximum n $\left(\text{en unité } \frac{h}{2\pi}\right)$ formée de $2n$ constituants de spin $\frac{1}{2}$ toujours supposés avoir la même masse propre. On retrouverait alors pour le mouvement du centre de gravité les équations d'onde de la particule de spin maximum n et l'on parviendrait à justifier l'expression correspondante de la probabilité de présence qui pour une onde plane monochromatique est

$$\rho(X, Y, Z, t) = \sum_{rs\ldots} |\Phi_{rs\ldots}|^2 (1-\beta^2)^{\frac{2n-1}{2}}$$

et contient $(2n-1)$ fois le facteur de contraction de Lorentz par suite des $(2n-1)$ intégrations sur les $(2n-1)$ variables relatives ζ. Il serait probablement assez aisé de généraliser ce qui précède en attribuant des masses propres différentes aux divers constituants de la particule complexe.

3. **Conclusions.** — Avant de conclure, nous voulons présenter deux remarques qui nous paraissent intéressantes.

D'abord, nous noterons que nous n'avons pas, à proprement parler, donné une déduction des équations de la particule de spin 1 à partir des équations (5) du système des deux constituants. Nous avons seulement montré qu'il est *possible* d'opérer, par un procédé qui paraît naturel, le transport des propriétés de spin des constituants sur le mouvement du centre de gravité : ce faisant, nous avons obtenu, pour le mouvement d'ensemble de la particule complexe considérée comme une unité, des équations d'onde qui « reflètent » pour ainsi dire les propriétés de symétrie de son état interne, et ces équations d'ondes sont précisément les équations d'ondes de la particule de spin 1. Ainsi bien délimité le résultat obtenu nous apparaît comme constituant néanmoins un progrès important.

Pour développer notre seconde remarque, nous partirons de l'observation suivante. Dans la Mécanique ondulatoire sans spin et dans la Mécanique ondulatoire de la particule de spin $\frac{1}{2}$ (théorie de Dirac), on peut toujours envisager sur un pied de parfaite égalité « la représentation q » liée aux localisations dans l'espace et la « représentation p » liée aux états de mouvement (ondes planes monochromatiques quand il n'y a pas de champ). Ces deux représentations décrivent les deux « aspects complémentaires » sous lesquels on peut toujours d'après Bohr envisager une particule. Or, en Mécanique ondulatoire du photon ou en théorie quantique des champs (théories qui sont presque équivalentes), on introduit toujours dans toutes les formules, qu'elles soient ou non superquantifiées, le développement des fonctions d'onde ou des grandeurs électromagnétiques en ondes planes monochromatiques, comme si la représentation p présentait ici une véritable supériorité sur la représentation q. Rappelons qu'en Mécanique ondulatoire du photon, nous avons été amenés à adopter une densité de probabilité de présence $\rho = \Phi^* \frac{a_4^{(1)} + a_4^{(2)}}{2} \Phi$, qui est définie positive (et égale à $|\Phi|^2 \sqrt{1-\beta^2}$) dans le cas d'une onde plane monochromatique, mais qui ne l'est pas dans le cas général; ceci souligne bien les difficultés de la représentation q dans ces théories. Les idées exposées dans le présent article semblent permettre d'entrevoir l'origine de la supériorité que prend ici la représentation p sur la représentation q. En effet, pour définir d'onde Φ de la particule de spin 1 considérée comme une unité, nous sommes partis de la description de l'état interne dans le système de référence propre du centre de gravité : or ce système n'est défini que si la particule complexe a un mouvement d'ensemble rectiligne et uniforme, donc représenté par une onde plane monochromatique. En considérant une « superposition » de tels mouvements, on arrive à une définition de la fonction Φ qui est essentiellement liée à sa décomposition en ondes planes monochromatiques, c'est-à-dire à sa représentation p et, en y réfléchissant, on comprend d'où vient la difficulté de la représentation q.

En résumé, les considérations exposées ci-dessus paraissent apporter une confirmation de la conception suivant laquelle les particules de spin diffèrent de $\frac{1}{2}$ seraient des particules complexes formées de constituants de spin $\frac{1}{2}$. Elles semblent justifier les idées qui ont servi de points de départ pour la Mécanique ondulatoire du photon et de ses généralisations pour les particules de spin total maximum supérieur à 1 et elles doivent permettre d'établir sur une base plus solide que dans mes exposés antérieurs la déduction des équations d'ondes du photon et de toutes celles qu'on en déduit par généralisation.

APPENDICE.

Dans cet Appendice, nous voulons reprendre plus rigoureusement les démonstrations esquissées dans le texte. Nous représenterons par $\varphi_{0,0}^{(0)}, \varphi_{1,1}^{(0)}, \varphi_{1,0}^{(0)}, \varphi_{1,-1}^{(0)}$ les fonctions d'onde qui, dans le système propre, représentent respectivement l'état à symétrie sphérique et les trois états correspondant à un doublet. A partir de ces quatre fonctions d'onde orthogonales et supposées normées $\left(\text{en } \frac{1}{|\Delta|}\right)$, nous pouvons définir les quatre fonctions orthonormales suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{\underline{41}}^{(0)} = \varphi_{1,1}^{(0)}, \qquad \varphi_{\underline{32}}^{(0)} = \varphi_{1,-1}^{(0)}, \\ &\varphi_{\underline{42}}^{(0)} = \frac{\varphi_{1,0}^{(0)} + \varphi_{0,0}^{(0)}}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_{\underline{31}}^{(0)} = \frac{\varphi_{1,0}^{(0)} - \varphi_{0,0}^{(0)}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Supposons d'abord que la masse propre de l'état pseudo-scalaire ait la même valeur M_0 que la masse propre des états vectoriels. On pourra alors désigner par P le facteur de phase $e^{\frac{2\pi}{h} M_0 c^2 t_0}$ qui sera le même pour les deux sortes d'états et l'on posera simplement

$$\Psi_0 = \sum_{\underline{ik}} c_{\underline{ik}}^{(0)} \varphi_{\underline{ik}}^{(0)} P. \tag{2}$$

La définition

$$\Phi_{\underline{ik}}^{(0)} = |\Delta| \int \varphi_{\underline{ik}}^{(0)\star} \Psi^{(0)} \, d\tau_0 \tag{3}$$

donne

$$\Phi_{\underline{ik}}^{(0)} = a_{\underline{ik}}^{(0)} P, \qquad \text{avec} \quad a_{\underline{ik}}^{(0)} = c_{\underline{ik}}^{(0)} \tag{4}$$

et le transport du spin sur le centre de gravité se trouve ainsi effectué tout à fait correctement. D'autre part, la démonstration du « théorème de la contraction de Lorentz » donnée dans le texte repose uniquement sur la relation

$$|\Delta| \int |\Psi^{(0)}|^2 \, d\tau_0 = \sum_{\underline{ik}} |\Phi_{\underline{ik}}^{(0)}|^2, \tag{5}$$

qui est ici tout à fait évidente puisque les $a_{\underline{ik}}^{(0)}$ et les $c_{\underline{ik}}^{(0)}$ coïncident.

Le raisonnement est un peu plus délicat dans le cas où la masse propre $M_0^{(S)}$ de l'état pseudo-scalaire n'est pas égale à la masse propre $M_0^{(V)}$ des états vectoriels. Il faut alors distinguer le facteur de phase $P_S = e^{\frac{2\pi i}{h} M_0^{(S)} c^2 t_0}$ de l'état pseudo-scalaire du facteur de phase $P_V = e^{\frac{2\pi i}{h} M_0^{(V)} c^2 t_0}$ des états vectoriels. Les formules de la Mécanique ondulatoire du photon conduisent à poser à la place de (2)

$$\begin{aligned} \Psi_0 = {} & \left[c_{\underline{41}}^{(0)} \varphi_{1,1}^{(0)} + c_{\underline{32}}^{(0)} \varphi_{1,-1}^{(0)} + \frac{c_{\underline{42}}^{(0)} + c_{\underline{31}}^{(0)}}{\sqrt{2}} \varphi_{1,0}^{(0)} \right] P_V \\ & + \frac{c_{\underline{42}}^{(0)} - c_{\underline{31}}^{(0)}}{\sqrt{2}} \varphi_{0,0} P_S. \end{aligned} \tag{6}$$

La définition (3) que nous conservons nous donne

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{\underline{41}}^{(0)} = a_{\underline{41}}^{(0)} P_V, \qquad \Phi_{\underline{32}}^{(0)} = a_{\underline{32}}^{(0)} P_V, \\ &\Phi_{\underline{42}}^{(0)} = (a_{\underline{42}}^{(0)})_V P_V + (a_{\underline{42}}^{(0)})_S P_S, \\ &\Phi_{\underline{31}}^{(0)} = (a_{\underline{31}}^{(0)})_V P_V + (a_{\underline{31}}^{(0)})_S P_S, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} &a_{\underline{41}}^{(0)} = c_{\underline{41}}^{(0)}, \qquad a_{\underline{32}}^{(0)} = c_{\underline{32}}^{(0)}, \\ &(a_{\underline{42}}^{(0)})_V = \frac{c_{\underline{42}}^{(0)} + c_{\underline{31}}^{(0)}}{2}, \qquad (a_{\underline{42}}^{(0)})_S = \frac{c_{\underline{42}}^{(0)} - c_{\underline{31}}^{(0)}}{2}, \\ &(a_{\underline{31}}^{(0)})_V = \frac{c_{\underline{42}}^{(0)} + c_{\underline{31}}^{(0)}}{2} = (a_{\underline{42}}^{(0)})_V, \\ &(a_{\underline{31}}^{(0)})_S = -\frac{c_{\underline{42}}^{(0)} - c_{\underline{31}}^{(0)}}{2} = -(a_{\underline{42}}^{(0)})_S. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Si, dans les formules (6), (7) et (8), on fait $P_S = P_V = P$, on retombe, comme cela doit être, sur les formules (2) et (4). Les formules (7) et (8) réalisent correctement le transport du spin sur le centre de gravité.

Pour que le « théorème de la contraction de Lorentz » puisse ici encore être démontré, il faut toujours que la formule (5) soit vérifiée. Or on trouve aisément

$$\left.\begin{aligned} |\Delta| \int |\Psi^{(0)}|^2 \, d\tau_0 = {} & |c_{\underline{41}}^{(0)}|^2 + |c_{\underline{32}}^{(0)}|^2 \\ & + |c_{\underline{42}}^{(0)}|^2 + |c_{\underline{31}}^{(0)}|^2, \\ \sum_{\underline{ik}} |\Phi_{\underline{ik}}^{(0)}|^2 = {} & |a_{\underline{41}}^{(0)}|^2 + |a_{\underline{32}}^{(0)}|^2 + |(a_{\underline{42}}^{(0)})_V|^2 \\ & + |(a_{\underline{42}}^{(0)})_S|^2 + |(a_{\underline{31}}^{(0)})_V|^2 + |(a_{\underline{31}}^{(0)})_S|^2 \\ & + \Big[\Big((a_{\underline{42}}^{(0)})_V^\star (a_{\underline{42}}^{(0)})_S \\ & \quad + (a_{\underline{31}}^{(0)})_V^\star (a_{\underline{31}}^{(0)})_S \Big) P_V^\star P_S \\ & \quad + \text{conjuguée} \Big], \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

et les relations (8), qui montrent la nullité du dernier crochet, permettent de vérifier aisément la relation (5).

Manuscrit reçu le 7 novembre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BROGLIE L. DE — Une nouvelle théorie de la lumière. *Actualités scientifiques*, n° 181, Hermann, Paris, 1934. Nouvelles recherches sur la théorie de la lumière. *Actualités scientifiques*, n° 411, Hermann, Paris, 1936. Une nouvelle théorie de la lumière : la Mécanique ondulatoire du photon, Hermann, Paris, 2 volumes, 1940-1942.
[2] BROGLIE L. DE. — La Mécanique ondulatoire du photon et la théorie quantique des champs électromagnétiques, Gauthiers-Villars, Paris, 1949.
[3] BROGLIE L. DE. — *C. R. Acad. Sc.*, 1935, **200**, 361.
[4] BROGLIE L. DE. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **229**, 157; 1949, **229**, 269; 1949, **229**, 401; 1949, **229**, 640; *Portugaliae Mathematica*, 1949, **8**, 37.
[5] BROGLIE L. DE. — Théorie générale des particules de spin quelconque, Gauthier-Villars, Paris, 1943.
[6] BROGLIE L. DE. — *C. R. Acad. Sc.*, 1936, **203**, 473.
[7] FRENKEL J. — *J. Phys. U. R. S. S.*, 1945, **9**, 1943.
[8] FERMI E. et YANG C. N. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 1739.