1952

INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **235**, p. 557-560, séance du 15 septembre 1952.)

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur l'introduction des idées d'onde-pilote et de double solution dans la théorie de l'électron de Dirac*. Note de M. **Louis de Broglie**.

L'auteur montre comment on pourrait essayer d'introduire ses anciennes conceptions sur l'onde-pilote et la double solution dans la théorie de l'électron de Dirac.

Comme nous l'avons rappelé dans des Notes récentes (1), nous avions développé en 1927 une interprétation causale de la Mécanique ondulatoire sous le nom de « théorie de l'onde-pilote », interprétation qui a été reprise récemment par M. David Bohm (2). Nous lui avions donné une forme particulière que nous avions nommée « théorie de la double solution » qui est la seule, nous semble-t-il, qui pourrait être acceptable.

Dans l'article du *Journal de Physique* où nous avions résumé nos conceptions (3), nous n'avions naturellement pas cherché à les appliquer à la théorie de l'électron de Dirac qui n'existait pas encore. Si l'on cherche à le faire, on se heurte tout de suite à deux difficultés. Voici la première d'entre elles. Dans la théorie de l'onde-pilote, on fait jouer le rôle de fonction de Jacobi à la phase φ de l'onde Ψ écrite sous la forme $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$ avec a et φ réels et l'on détermine

(1) *Comptes rendus*, **233**, 1951, p. 641 et **234**, 1952, p. 265.
(2) *Phys. Rev.*, **85**, 1952, p. 166 et 180.
(3) *Journal de Physique*, **8**, 1927, p. 225.

le mouvement du corpuscule par la « formule de guidage »

$$\vec{v} = -c^2 \frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi}{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \tag{1}$$

qui donne $\vec{v} = -(1/m)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$ à l'approximation newtonienne. La fonction φ est bien déterminée puisque, au facteur $2\pi i/h$ près, elle est égale à l'argument de la fonction complexe Ψ. Mais, en théorie de Dirac, il y a 4 composantes complexes Ψ_k de la fonction d'onde qui ont en général des arguments différents. Si nous posons

$$\Psi_k = a_k e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi} = b_k e^{\frac{2\pi i}{h}\Phi_k} = b_k e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi_k} e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi} \tag{2}$$

avec $a_k = b_k e^{(2\pi i/h)\varphi_k}$ et $\Phi_k = \varphi_k + \varphi$, où a_k est une fonction complexe, b_k, Φ_k, φ_k et φ étant réelles, on aura introduit une « phase commune » φ, mais cette fonction φ sera entièrement indéterminée car, si l'on choisit φ arbitrairement, il suffira de prendre pour φ_k la différence entre l'argument Φ_k de Ψ_k et φ. Pour pouvoir définir la vitesse du corpuscule par une formule analogue à (1), il faut d'abord parvenir à définir sans ambiguïté la fonction φ.

Une seconde difficulté provient de ce que, en théorie de Dirac, il y a deux quadrivecteurs courant-densité $\vec{j}$ et $\vec{j}^{(1)}$ qui, en employant les matrices γ de von Neumann et la notation $\Psi^+ = \Psi^* \gamma_4$, sont donnés par

$$j_i = -c \sum_{1}^{4}{}_k \Psi_k^+ \gamma_i \Psi_k, \qquad j_i^{(1)} = \frac{h}{4\pi i m_0} \sum_{1}^{4}{}_k \left(\Psi_k^+ \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Psi_k^+}{\partial x_i} \Psi_k \right). \tag{3}$$

La « décomposition de Gordon » donne [4] $\vec{j} = \vec{j}^{(1)} + \vec{j}^{(2)}$ où $\vec{j}^{(2)}$ se définit à partir des densités des moments électriques et magnétiques propres de l'électron. Chacun des trois quadrivecteurs $\vec{j}$, $\vec{j}^{(1)}$ et $\vec{j}^{(2)}$ obéit à l'équation de conservation $\sum_{1}^{4}{}_i \left(\partial \vec{j} / \partial x^i \right) = 0$ et la difficulté est de savoir si l'on doit définir la vitesse du corpuscule à partir de $\vec{j}$ ou à partir de $\vec{j}^{(1)}$.

Dans notre Ouvrage sur les particules de spin 1/2, nous avons montré [5] comment on pouvait former en théorie de Dirac une équation de Jacobi (J) et une équation de continuité (C) à partir des équations du second ordre en Ψ_k, en admettant l'existence d'une phase commune φ. Nous contentant de traiter

[4] L. de Broglie, *Théorie des particules de spin 1/2*, Gauthier-Villars, 1952, p. 83 et suiv.

[5] *Loc. cit.*, p. 121-122.

le cas de l'absence de champs électromagnétiques, nous écrirons ces équations avec les notations ici employées :

(J) $$\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \mathrm{grad}^2\varphi\right]\sum_{1}^{4}{}_k\, a_k^+ a_k - \frac{h^2}{4\pi^2}\sum_{1}{}_k\,(a_k^+\Box\, a_k + \Box\, a_k^+\, a_k)$$ $-m_0^2c^2$

$$= -\frac{h}{2\pi i}\sum_{1}^{4}{}_k\left[\left(a_k^+\frac{1}{c}\frac{\partial a_k}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial a_k^+}{\partial t}\right)\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(a_k^+\frac{\partial a_k}{\partial x} - \frac{\partial a_k^+}{\partial x}a_k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right.$$
$$\left. + \left(a_k^+\frac{\partial a_k}{\partial y} - \frac{\partial a_k^+}{\partial y}a_k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \left(a_k^+\frac{\partial a_k}{\partial z} - \frac{\partial a_k^+}{\partial z}a_k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right].$$

(C) $$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{1}^{4}{}_k\frac{\partial\varphi}{\partial t}a_k^+ a_k + \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi\sum_{1}^{4}{}_k\, a_k^+ a_k\right) = -\frac{h}{2\pi i}\sum_{1}^{4}{}_k\,(a_k^+\Box\, a_k - \Box a_k^+\, a_k).$$

Dans (J) le dernier terme du premier membre correspond au potentiel quantique en h^2. Le second membre en h peut paraître surprenant : il provient en réalité de l'indétermination de la phase commune φ et l'on peut évidemment l'annuler en imposant aux phases φ_k des a_k les 4 conditions

(4) $$\sum_{1}^{4}{}_k\, b_k^+ b_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Si l'on admet qu'elles peuvent être vérifiées, on trouve

(5) $$j_i^{(1)} = \frac{1}{m_0}\sum_{1}^{4}{}_k\, b_k^+ b_k\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_i} = \frac{1}{m_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\sum_{1}^{4}{}_k\, b_k^+ b_k,$$

parce que $\Phi_k = \varphi_k + \varphi$. La valeur des $j_i^{(1)}$ étant parfaitement déterminée quand on connaît les Ψ_k comme on le voit sur la première expression, la phase commune φ se trouve maintenant parfaitement définie (à une constante près).

Or, compte tenu de (4), le second membre de (C) se trouve être nul et l'on peut écrire (C) sous la forme

(6) $$\sum_{1}^{4}{}_i\frac{\partial j_i^{(1)}}{\partial x_i} = 0.$$

Ceci nous semble prouver que c'est le quadrivecteur $\vec{j}^{(1)}$, et non le quadrivecteur $\vec{j}$, qui doit servir à définir la vitesse $\vec{v}$ du corpuscule, car on aurait alors

(7) $$\vec{v} = -c^2\frac{\displaystyle\sum_{1}^{4}{}_k\left(\psi_k^+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi_k - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi_k^+\psi_k\right)}{\displaystyle\sum_{1}^{4}{}_k\left(\psi_k^+\frac{\partial\psi_k}{\partial t} - \frac{\partial\psi_k^+}{\partial t}\psi_k\right)} = -c^2\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}}$$

en accord avec la formule (1).

Si nous passons maintenant à la théorie de la double solution, nous devons introduire, à côté de la solution continue Ψ, une solution u à singularité de composantes

$$u_k = f_k e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi} = g_k e^{\frac{2\pi i}{h}\Phi_k} = g_k e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi_k} e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi} \qquad (k = 1, 2, 3, 4), \tag{8}$$

où f_k est une fonction complexe, $\Phi_k \varphi_k \varphi$ et g_k étant réels. Nous obtiendrons encore des équations de la forme (J) et (C), mais où les f_k, amplitudes à singularité, remplaceront les a_k. Du moins, en sera-t-il ainsi dans les régions de l'espace-temps où les équations de propagation des u_k sont linéaires et identiques à celles des Ψ_k (6). Nous imposerons aux φ_k les conditions

$$\sum_{1}^{4}{}_k\, g_k^+ g_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{9}$$

qui nous débarrasseront encore des seconds membres de (J) et de (C) et assureront la détermination de la phase commune φ. Si, comme le postule le principe de la double solution, la phase φ est la même pour l'onde Ψ et pour l'onde u, il en résultera, en comparant les équations (J) pour les deux ondes, que l'on devra avoir comme expressions équivalentes du potentiel quantique

$$\frac{\frac{1}{2}\sum_{1}^{4}{}_k (a_k^+ \Box a_k - \Box a_k^+ a_k)}{\sum_{1}^{4}{}_k a_k^+ a_k} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{1}^{4}{}_k (f_k^+ \Box f_k - \Box f_k^+ f_k)}{\sum_{1}^{4}{}_k f_k^+ f_k}. \tag{10}$$

Dans la Mécanique ondulatoire relativiste à un seul Ψ, on a une seule valeur pour k et l'on peut poser $\gamma_4 = 1$. En écrivant a pour $|a_k|$ et f pour $|f_k|$, la relation (10) devient identique à la relation $\Box a/a = \Box f/f$ de mon Mémoire de 1927.

Les considérations qui précèdent manquent de rigueur sur certains points et ne sont que provisoires. Elles demanderaient à être approfondies et étendues s'il se montrait vraiment utile de revenir à mes idées de 1927.

(6) *Voir* sur ce point : *Comptes rendus*, 234, 1952, p. 265.

Expression de la masse propre M_0

$$M_0^2 = m_0^2 - \frac{h^2}{4\pi^2 c^2} \frac{\sum_1^4{}_k (a_k^+ \Box a_k - \Box a_k^+ \cdot a_k)}{\sum_1^4 a_k^+ a_k} = m_0^2 - \frac{h^2}{4\pi^2 c^2} \frac{\sum_1^4{}_k (f_k^+ \Box f_k - \Box f_k^+ \cdot f_k)}{\sum_1^4{}_k f_k^+ f_k}$$

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
142753-52 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55