INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 235, p. 1345-1348, séance du 1er décembre 1952.)

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur l'interprétation de la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules dans l'espace de configuration par la théorie de la double solution.* Note de M. **Louis de Broglie**.

Approfondissant un raisonnement indiqué dans un Mémoire de 1927, l'auteur précise comment il paraît possible, dans la théorie de la double solution onde-pilote, de justifier le passage de la Mécanique ondulatoire du corpuscule dans un champ donné à la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules dans l'espace de configuration.

L'une des grandes difficultés de l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par les idées de double solution et d'onde-pilote est de justifier le passage de la Mécanique ondulatoire du corpuscule dans un champ donné à la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules dans l'espace de configuration. Nous avions esquissé une démonstration de la possibilité de ce passage dans notre Mémoire de 1927 sur la double solution (1). Nous allons essayer de préciser certains points de cette démonstration en nous bornant au cas d'un système de deux corpuscules, le passage au cas de plus de deux corpuscules ne paraissant pas comporter de difficultés supplémentaires.

Nous utiliserons le lemme mathématique suivant : Soient deux variables x et y et une certaine fonction u de x et de y. Considérons trois fonctions $F_1(x, u)$, $F_2(y, u)$ et $F(x, y, u)$ et supposons que nous ayons entre ces fonctions les relations

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_y \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_x$$

(1) *Journal de Physique*, série VI, 8, 1927, p. 225.

Alors on a nécessairement

$$(1) \qquad F_1(x, u) = F_{11}(x) + F_{12}(u) \qquad F_2(y, u) = F_{22}(y) + F_{21}(u),$$

avec $F_{12} = F_{21}$ et

$$(2) \qquad F(x, y, u) = F_{11}(x) + F_{22}(y) + F_{12}(u).$$

Ce lemme dont la démonstration est aisée étant admis, envisageons un système de deux corpuscules de nature différente dans l'espace physique à trois dimensions. Chaque point de cet espace sera repéré par le rayon-vecteur $\vec{R}$ qui le joint à l'origine des coordonnées. $\vec{R}_1(t)$ et $\vec{R}_2(t)$ définissent donc les positions à l'instant t des deux corpuscules. Les vecteurs $\vec{r}_1(t) = \vec{R} - \vec{R}_1(t)$ et $\vec{r}_2(t) = \vec{R} - \vec{R}_2(t)$ définissent de même la position du point $\vec{R}$ par rapport à chacun des deux corpuscules à l'instant t. Enfin nous posons $\vec{r}_{12}(t) = \vec{R}_1(t) - \vec{R}_2(t)$.

Nous supposons valables pour le mouvement de chacun des corpuscules dans un champ donné les idées de la théorie de la double solution. Si donc nous supposons connu le mouvement $\vec{R}_2(t)$ du second corpuscule, nous pourrons écrire pour le premier corpuscule l'équation de Jacobi généralisée au point $\vec{R} = \vec{R}_1$

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = E_1 = \frac{1}{2m_1}(\mathrm{grad}_1\,\varphi_1)^2 + F_1 + F_{12} + Q_1,$$

où Q_1 est le potentiel quantique égal, à l'approximation newtonienne que la Mécanique ondulatoire de l'espace de configuration suppose implicitement valable, à

$$Q_1 = -\frac{h^2}{8\pi^2 m_1}\left(\frac{\Delta a_1}{a_1}\right)_{\vec{R} = \vec{R}_1}.$$

Dans cette équation $\varphi_1(\vec{R}, \vec{r}_{12}, t)$ est la phase des ondes u_1 et Ψ_1 du premier corpuscule dans le champ de force connu créé par le second, compte tenu s'il y a lieu de la présence d'obstacles provoquant interférences et diffraction. $a_1(\vec{R}, \vec{r}_{12}, t)$ est l'amplitude de l'onde continue Ψ_1. Le symbole $\mathrm{grad}_1\,\varphi_1$ signifie $(\mathrm{grad}\,\varphi_1)_{\vec{R}=\vec{R}_1}$. La fonction $F_1(\vec{R}_1, t)$ est un potentiel extérieur agissant éventuellement sur le premier corpuscule, $F_{12}(\vec{r}_{12})$ est le potentiel représentant l'action du second corpuscule sur le premier. L'énergie E_1 n'est pas constante en général.

Mais nous pouvons au contraire supposer connu le mouvement $\vec{R}_1(t)$ du premier corpuscule et écrire l'équation de Jacobi généralisée pour le second corpuscule au point $\vec{R} = \vec{R}_2(t)$

$$(4) \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = E_2 = \frac{1}{2m_2}(\mathrm{grad}_2\,\varphi_2)^2 + F_2 + F_{21} + Q_2,$$

où Q_2 est le potentiel quantique $Q_2 = -(h^2/8\pi^2 m_2)(\Delta a_2/a_2)_{\vec{R}=\vec{R}_2}$. Le sens des autres symboles figurant dans (4) est évident. Précisons seulement que $F_{21}(\vec{r}_{12})$ est le potentiel représentant l'action du premier corpuscule sur le second et que l'on suppose toujours $F_{21} = F_{12}$. L'énergie E_2 n'est pas constante en général.

Passons maintenant au point de vue de l'espace de configuration où les coordonnées x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 deviennent des variables indépendantes. Si nous admettons la validité de l'équation de Schrödinger pour l'onde Ψ dans l'espace de configuration, nous pouvons écrire l'équation de Jacobi au point $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ de l'espace de configuration

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv E = \frac{1}{2m_1}(\text{grad}_1 \varphi)^2 + \frac{1}{2m_2}(\text{grad}_2 \varphi)^2 + F_1 + F_{12} + F_2 + Q, \tag{5}$$

où le potentiel quantique Q est donné par

$$Q = -\frac{h^2}{8\pi^2}\left(\frac{1}{m_1}\frac{\Delta_1 a}{a} + \frac{}{m_2}\frac{\Delta_2 a}{a}\right)_{\vec{R}_1, \vec{R}_2}. \tag{6}$$

Dans (5), $\varphi(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$ est la phase de l'onde Ψ dans l'espace de configuration, $a(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$ son amplitude; F_1, F_2 et F_{12} ont les mêmes significations que précédemment.

Du point de vue de la théorie de la double solution, la représentation du système dans l'espace physique à trois dimensions est la seule qui représente la réalité physique et la représentation dans l'espace de configuration est purement fictive. Mais, comme elles doivent être compatibles, il faut avoir

$$m_1 \vec{v}_1 = -\text{grad}_1 \varphi_1 = -\text{grad}_1 \varphi, \qquad m_2 \vec{v}_2 = -\text{grad}_2 \varphi_2 = -\text{grad}_2 \varphi. \tag{7}$$

Or, d'après (1) et (2), ceci entraîne pour les phases les formes suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \varphi_1(\vec{R}_1, \vec{r}_{12}, t) = \varphi_{11}(\vec{R}_1, t) + \varphi_{12}(\vec{r}_{12}, t) \\ \varphi_2(\vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t) = \varphi_{22}(\vec{R}_2, t) + \varphi_{21}(\vec{r}_{12}, t) \end{array}\right\} \varphi_{12} = \varphi_{21}, \\ \varphi(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t) = \varphi_{11}(\vec{R}_1, t) + \varphi_{22}(\vec{R}_2, t) + \varphi_{12}(\vec{r}_{12}, t). \end{array}\right. \tag{8}$$

Ainsi se trouve précisée, même dans le cas général où il existe des champs extérieurs et des obstacles à la propagation des ondes, la forme générale des phases φ_1 et φ_2 des ondes individuelles (u ou Ψ) et de la phase φ de l'onde fictive Ψ dans l'espace de configuration.

D'autre part, les « forces quantiques » doivent avoir la même valeur qu'on les calcule dans l'espace ordinaire ou dans l'espace de configuration, ce qui nous donne les conditions

$$\text{grad}_1 Q_1 = \text{grad}_1 Q, \qquad \text{grad}_2 Q_2 = \text{grad}_2 Q, \tag{9}$$

d'où, par application des formules (1) et (2) :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} Q_1(\vec{R}_1, \vec{r}_{12}, t) &= Q_{11}(\vec{R}_1, t) + Q_{12}(\vec{r}_{12}, t) \\ Q_2(\vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t) &= Q_{22}(\vec{R}_2, t) + Q_{21}(\vec{r}_{12}, t) \end{aligned}\right\} Q_{12} = Q_{21}, \\ &Q(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t) = Q_{11}(\vec{R}_1, t) + Q_{22}(\vec{R}_1, t) + Q_{12}(\vec{r}_{12}, t). \end{aligned}\right.$$

Nous voyons ainsi que le passage de Q_1 et Q_2 à Q se fait comme en Mécanique classique le passage de E_1 et E_2 à E, c'est-à-dire en ne prenant qu'une fois le terme d'énergie mutuelle.

Maintenant, en comparant (3), (4) et (5) et en tenant compte de (8), on obtient

$$(11)\qquad E = E_1 + E_2 - F_{12} + Q - Q_1 - Q_2,$$

puis, d'après (10),

$$(12)\quad E = E_1 + E_2 - F_{12} - Q_{12} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + F_1 + F_2 + F_{12} + Q_1 + Q_2 + Q_{12}.$$

La formule (12) paraît satisfaisante parce qu'elle traite symétriquement le potentiel ordinaire d'interaction F_{12} et le potentiel quantique d'interaction Q_{12} (1).

Le raisonnement précédent précise celui que nous avions donné en 1927. Il contient encore, du moins en apparence, une sorte de cercle vicieux parce que nous avons admis la validité de l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration au lieu de la démontrer. M. J. P. Vigier a évité cet inconvénient en démontrant que la validité de l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration découle de la conservation du flux de particules (2).

Ce que nous avons dit dans cette Note s'applique au cas des particules de nature différente ($m_1 \neq m_2$). Nous comptons étudier dans une prochaine communication le cas des particules de même nature qui est, on le sait, très important.

---

(1) On peut remarquer que, d'après les formules (8) et (10), φ_{12} et Q_{12} doivent dépendre des composantes du vecteur $\vec{r}_{12}$; mais il ne paraît pas nécessaire qu'elles dépendent seulement de la distance $|\vec{r}_{12}|$ des deux corpuscules.

(2) *Voir* J. P. Vigier, *Comptes rendus*, 235, 1952, p. 1372.

GAUTHIER-VILLARS, IMP.-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
143167-52 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.