INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 236, p. 1453-1456, séance du 13 avril 1953).

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur l'interprétation de la Mécanique ondulatoire
à l'aide d'ondes à région singulière.* Note de M. **LOUIS DE BROGLIE.**

L'auteur précise la forme que doivent avoir les ondes à région singulière envisagées par sa théorie de la double solution. Il montre que l'image ainsi obtenue est la conséquence naturelle des idées qui l'avaient guidé lors de la découverte de la Mécanique ondulatoire.

Nous rappellerons que dans notre théorie de la double solution ⁽¹⁾, on admet que, quand la Mécanique ondulatoire usuelle décrit un corpuscule dans l'espace à trois dimensions à l'aide d'une onde continue

$$\Psi = a(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)},$$

on devrait employer pour décrire vraiment la réalité physique une onde à singularité

$$u = f(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)}$$

où f comporte une petite région singulière en général mobile et où φ est la même fonction de phase que dans Ψ . On montre alors que le mouvement de la région singulière est donné par la « formule du guidage »

$$(1) \quad \vec{v} = - \frac{c^2}{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \text{grad } \varphi$$

⁽¹⁾ *Journ. de Phys.*, 6^e série, 8, mai 1927, p. 225.

qui, pour les vitesses faibles par rapport à c , se réduit à $\vec{v} = - (1/m) \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$. De plus, conformément à l'interprétation usuelle, il paraît légitime de considérer la quantité $a^2 = |\Psi|^2$ comme donnant la probabilité de présence de la singularité en chaque point et à chaque instant. Ainsi la réalité physique serait décrite par l'onde u , l'onde Ψ n'étant qu'une onde fictive servant à l'évaluation des probabilités

Rappelons aussi ⁽²⁾ que, alors que Ψ obéit partout à l'équation d'ondes linéaire de la Mécanique ondulatoire, u n'obéit sans doute à cette équation qu'en dehors de sa région singulière et dans cette région où elle prend des valeurs très élevées, elle doit obéir à une équation non-linéaire.

On est alors à se poser la question suivante. Considérons un système quantifié formé d'un seul corpuscule. La Mécanique ondulatoire usuelle le décrit à l'aide d'une fonction Ψ : elle définit les valeurs propres E_n de l'énergie et les fonctions propres correspondantes

$$\Psi_n = a_n(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} \chi_n(x, y, z)} e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t}.$$

La fonction a_n qui est normée à l'unité doit être nulle aux limites du domaine D correspondant au problème envisagé. Si l'on admet que dans un état stationnaire, la réalité physique est décrite par une onde

$$u = f(xyzt) e^{\frac{2\pi i}{h} \chi(xyzt)} e^{\frac{2\pi i}{h} E t},$$

la question est de savoir pourquoi E est nécessairement égal à l'un des E_n . Pour le comprendre, nous pouvons, comme l'a suggéré M. Vigier, décomposer u en une partie singulière u_0 qui serait très grande dans la région singulière et très petite en dehors, et une partie régulière $v(xyzt)$ qui obéirait partout à l'équation d'ondes linéaire. Si nous admettons que v s'annule aux limites du domaine D, nous pourrions écrire un développement de la forme $v = \sum_n d_n \Psi_n$ avec des coefficients d_n constants.

Nous devons alors écrire

$$(2) \quad u = u_0 + \sum_n d_n \Psi_n.$$

Cette relation devant être valable en tout point à tout instant, nous en déduisons

$$(3) \quad d_n = 0 \quad \text{pour } n \neq m, \quad E = E_0 = E_m, \quad \chi = \chi_0 = \chi_m, \quad u = u_0 + d_m \Psi_m.$$

d_m est un coefficient bien déterminé et non soumis à la condition de norma-

⁽²⁾ *Comptes rendus*, 234, 1952, p. 265.

lisation $|d_m| = 1$, puisque u est une réalité physique. En dehors de la région singulière, on a sensiblement $u = v = d_m \Psi_m$.

Il ne faut surtout pas confondre la fonction Ψ_m arbitraire normée à l'unité qui est une représentation statistique fictive du $m^{\text{ième}}$ état stationnaire avec la partie régulière $v = d_m \Psi_m$ de l'onde u qui a une valeur physique bien déterminée. La fonction Ψ n'est pas une réalité physique, mais comme v est proportionnelle à $\Psi = \Psi_m$, une confusion peut facilement s'introduire ici. Dans le cas d'un système de corpuscules, au contraire, l'onde Ψ est définie dans l'espace de configuration visiblement fictif alors que les ondes u doivent être définies dans l'espace physique : on ne peut plus méconnaître alors la différence entre l'onde u description réelle des corpuscules et l'onde Ψ normée à caractère statistique et purement fictif.

Passons maintenant au cas plus général d'un corpuscule dans un état non stationnaire. Son onde Ψ sera de la forme

$$\Psi = \sum_n c_n a_n(x,y,z) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_n(x,y,z,t)}$$

avec la condition de normalisation $\sum_n |c_n|^2 = 1$. Ce qui précède nous conduit à

penser que la fonction v doit ici avoir la forme $v = \mathbf{K} \Psi$ où $\mathbf{K}$ est une constante à signification physique ayant une valeur bien définie. Si nous posons

$$u = f e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}, \quad u_0 = f_0 e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_0}, \quad \Psi = e a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$$

où les amplitudes et les phases sont fonctions de x,y,z,t , nous devons avoir en tout point à tout instant,

$$(4) \quad f e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi} = f_0 e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_0} + \mathbf{K} a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$$

et nous sommes conduit à poser $\varphi' = \varphi_0 = \varphi$. En dehors de la région singulière, on aura alors $u = \mathbf{K} \Psi = \mathbf{K} a e^{(2\pi i/h)\varphi}$; l'onde u y sera un multiple bien défini de la fonction Ψ normée.

L'accord des phases qui est la clef de voûte de la théorie de la double solution doit donc toujours être réalisé pour que la fonction singulière u_0 puisse « engrener » avec la fonction régulière v qui lui sert de base. On peut considérer ce résultat comme le couronnement de l'idée fondamentale qui a été à la base de nos premières recherches sur la Mécanique ondulatoire suivant laquelle *le corpuscule est assimilable à une petite horloge qui se déplace dans une onde de manière à rester constamment en phase avec l'onde.*

Ces idées se transposent dans le cas d'une onde en propagation libre en se souvenant que seuls les trains d'onde limités ont une existence physique. Pour tous les genres de corpuscules, les phénomènes de diffraction et d'interférences trouvent alors leur explication. Par exemple dans le cas des photons,

la partie régulière v de l'onde u est une onde lumineuse du type classique à amplitude bien définie. Au sein de cette onde glisse une très petite région singulière dont le mouvement est donné par la formule (1) seule capable d'assurer d'une façon permanente la concordance des phases entre la partie singulière de l'onde u et la partie régulière qui lui sert de support. Ce point de vue semble permettre d'expliquer le succès des prévisions de la théorie classique en les rendant compatibles avec l'existence de corpuscules *localisés*. L'onde Ψ normée qui est fictive n'intervient que pour exprimer les résultats statistiques des interférences et de la diffraction.

Pour l'électron de Dirac, comme la fonction d'onde Ψ a quatre composantes Ψ_k , on aura à considérer des développements de la forme

$$(5) \quad \Psi_k = \sum_n c_n \Psi_{n,k} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

$\Psi_{n,k}$ étant la k^e composante de la n^e fonction propre et les c_n ne dépendant pas de l'indice k . Après avoir posé $c_k = K \Psi_k = K a_k e^{i(2\pi/\hbar)\varphi_k}$, on sera conduit à écrire avec des notations évidentes

$$(6) \quad f_k e^{\frac{2\pi i}{\hbar}\varphi_k} = f_{0,k} e^{\frac{2\pi i}{\hbar}\varphi_{0,k}} + K a_k e^{\frac{2\pi i}{\hbar}\varphi_k}$$

et à en conclure que $\varphi'_k = \varphi_{0,k} = \varphi_k$ pour chaque valeur de k . En dehors de la région singulière, on aura sensiblement $u_k = K \Psi_k$, K ayant une valeur bien définie. Chaque composante u_k y est donc proportionnelle à la composante k de la fonction d'onde normée Ψ . En comparant avec une Note récente de M. Vigier ⁽³⁾, on verra que la singularité suit la ligne de courant de la théorie de Dirac, ce qui semble montrer l'exactitude de la manière dont il a effectué la transposition de la théorie de la double solution au cas de l'électron de Dirac.

Dans la rédaction de cette Note, j'ai beaucoup profité de mes conversations avec M. J. P. Vigier; il m'avait, en effet, signalé que la partie régulière de l'onde u lui paraissait devoir être proportionnelle à l'onde Ψ .

(³) *Comptes rendus*, 235, 1952, p. 1107.