INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 237, p. 441-444, séance du 17 août 1953.)

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur l'interprétation causale et non linéaire de la Mécanique ondulatoire*. Note de M. **Louis de Broglie**.

L'auteur précise divers points de sa tentative d'interprétation causale et non linéaire de la Mécanique ondulatoire.

L'idée de base de la théorie de la double solution consiste à admettre que le corpuscule constitue la région centrale d'un champ ondulatoire étendu. Ce champ serait décrit par une onde u à caractère objectif obéissant à une équation de propagation *non linéaire*. Les termes non linéaires de cette équation ne seraient sensibles qu'à l'intérieur d'une très petite région constituant le corpuscule au sens étroit du mot, région où u et ses dérivées auraient des valeurs très grandes. En dehors de cette région singulière, l'équation de propagation de u se réduirait sensiblement à l'équation de propagation linéaire considérée par la Mécanique ondulatoire usuelle.

Dans une Note récente (¹), j'ai admis avec M. Vigier qu'en dehors de la région singulière, la fonction u devait avoir approximativement la forme

$$u \simeq u_0 + v, \tag{1}$$

u_0 et v étant solutions de l'équation linéaire. u_0, partie « singulière » de u, croîtrait très rapidement quand on s'approche de la région singulière, mais deviendrait très petite dès qu'on s'en éloigne tandis que v, partie « régulière »

(¹) *Comptes rendus*, 236, 1953, p. 1453.

de u, serait une solution continue de l'équation linéaire. J'ai alors montré que, pour pouvoir comprendre le succès du calcul de l'énergie des états quantifiés par la Mécanique ondulatoire usuelle, il fallait admettre que u, u_0, v ont la même phase et que v est approximativement donné par $v \simeq C\Psi$ où Ψ est la fonction d'onde normée de la Mécanique ondulatoire usuelle dans le problème considéré et C un facteur constant à signification objective, donc à valeur physique bien déterminée. J'ai ensuite indiqué qu'en appliquant ces résultats au cas où v est une onde plane monochromatique, on obtenait une interprétation des expériences d'interférences et de diffraction, notamment de celles des trous d'Young *a priori* si difficile à comprendre du point de vue de la double solution.

On peut se figurer schématiquement la région singulière comme une sphère de rayon r_0 très petit ($r_0 \leqq 10^{-13}$ cm). Dans cette région, on ne peut pas admettre pour u la décomposition (1) qui ne peut être approximativement valable que là où l'équation des ondes est sensiblement linéaire. Il doit exister ensuite une « région intermédiaire » ($r_0 < r < r_1$ avec r_1 aussi très petit) où l'équation des ondes est déjà sensiblement linéaire, où la décomposition (1) est valable, mais où u_0 n'est pas encore négligeable devant v et a de grandes dérivées [2]. Enfin la région extérieure ($r > r_1$) est celle où l'on peut écrire approximativement $u \simeq v \simeq C\Psi$.

Pour préciser tout ceci sur un exemple très simple et montrer l'importance de la non linéarité, considérons un corpuscule dont la structure interne ait la symétrie sphérique et qui se trouve au centre O d'une enceinte sphérique de rayon R. Admettons d'abord, conformément à mes idées primitives sur la double solution, que l'onde u possède une singularité ponctuelle en $1/r$, ce qui conduit à admettre l'équation d'ondes linéaire avec second membre représentant une source ponctuelle

$$\Box u + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 u = \varepsilon\, \delta(r). \tag{2}$$

Les fonctions propres à symétrie sphérique du problème envisagé sont

$$\Psi_n = a_n \frac{\sin k_n r}{r} e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t},$$

où k_n est déterminée par la condition $\sin k_n R = 0$ et où E_n est la valeur propre de l'énergie correspondant à k_n. La formule (1) conduit à poser pour valeur de u

(2) Précisons que c'est dans cette région intermédiaire qu'il faut placer la sphère S dont je me suis servi pour la démonstration de la formule du guidage aux pages 56 à 58 de l'Ouvrage « *La physique quantique restera-t-elle indéterministe ?* », Gauthier-Villars, Paris, 1953.

dans le n^e état stationnaire à symétrie sphérique

$$(4) \qquad u = u_0 + v = \left[\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\cos k_n r}{r} + C\frac{\sin k_n r}{r}\right] e^{\frac{2\pi i}{h}E_n t},$$

u_0 et v devant avoir même phase d'après la Note citée plus haut. Si l'on suppose $\varepsilon \ll C$, on a bien trois régions à distinguer : une région intérieure près de O où le terme u_0 est prédominant, une région intermédiaire où u_0 et v sont du même ordre, enfin une région extérieure où $u \simeq v$. Mais (et ceci est un point capital) C serait une constante *arbitraire* et le terme v serait entièrement indépendant du terme u_0. Ceci correspond à une remarque souvent faite par M. Einstein suivant laquelle, si l'on part d'une équation linéaire telle que (2), on peut ajouter à la solution à singularité une solution régulière quelconque de l'équation sans second membre : on ne peut donc pas arriver à établir ainsi une véritable solidarité entre le corpuscule et l'onde v. Si l'interprétation actuelle de la Mécanique ondulatoire ne parvient pas à localiser le corpuscule dans l'onde, c'est peut-être parce qu'elle emploie uniquement des équations linéaires.

Il paraît donc nécessaire de remplacer l'équation (2) par une équation non linéaire où les termes non linéaires soient à peu près négligeables partout sauf à l'intérieur d'une très petite sphère de rayon r_0 entourant l'origine. En dehors de cette région singulière, la décomposition (4) serait approximativement valable, mais avec une valeur de C bien déterminée en raison de la « soudure » que l'existence des termes non linéaires établit dans la région singulière entre u_0 et v.

La relation approximative $v \simeq C\Psi$ ne paraît pas soulever de difficulté dans le cas des systèmes quantifiés à spectre discontinu, ni dans le cas de l'onde plane monochromatique. Mais dans la réalité, il n'y a pas d'ondes planes monochromatiques ; il n'y a que des groupes d'ondes de dimensions limitées, classiquement représentés par des intégrales de Fourier portant sur un très petit intervalle spectral. Il semblerait donc que dans ce cas la partie extérieure de l'onde u devrait être approximativement représentée par une telle intégrale. Mais on se heurte alors à la difficulté suivante : les groupes d'ondes du type classique ont une tendance à s'étaler constamment dans l'espace avec diminution corrélative de leur amplitude. Pendant la propagation, la partie extérieure de l'onde u irait donc en s'évanouissant : le corpuscule perdrait progressivement son onde ! Cette conclusion n'est guère admissible et semble même en contradiction avec la soudure de u_0 et de v réalisée dans la région singulière par les termes non linéaires.

Il paraît en résulter que la représentation de la partie extérieure de l'onde u par une intégrale de Fourier n'est pas exacte. Parmi les raisons que l'on peut invoquer pour expliquer ce fait, l'une me paraît très intéressante. Les termes non linéaires de l'équation en u contiennent très probablement les dérivées de u : ceci est en particulier fortement suggéré par les tentatives de M. Vigier pour interpréter l'onde u dans le cadre de la relativité générale. Or, sur les bords d'un groupe d'ondes ces dérivées doivent être très grandes de sorte que l'équation des ondes u, sensiblement linéaire dans le corps du groupe d'ondes en dehors de la région singulière, pourrait redevenir non linéaire sur ces bords ([3]). La fonction v s'y trouverait de nouveau « soudée » à la fonction u_0 (qui dépend de la distance à la région singulière centrale) et l'on pourrait peut-être grâce à cette circonstance, arriver à concevoir des trains d'ondes sans étalement progressif, entièrement solidaires de la région singulière centrale. Ainsi se trouverait mise en lumière la très grande importance physique des fronts d'ondes ([4]).

Nous avons d'ailleurs quelques raisons de penser que c'est peut-être également en faisant intervenir des fronts d'ondes à propriétés non linéaires que l'on parviendrait à lever certaines objections classiques contre l'interprétation causale de la mécanique ondulatoire (partage des ondes par les miroirs semi-transparents, réduction du paquet de probabilités, etc.).

([3]) C'est là un point dont on devrait aussi tenir compte dans l'étude de la propagation des petites perturbations gravifiques en théorie de la relativité générale.

([4]) Cette importance a été récemment soulignée par M. Schrödinger (*British journal for the Philosophy of sciences*, III, 11, 1952, p. 21-22).

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
144580-53 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.