

INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 239, p. 521-524, séance du 18 août 1954.)

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Considérations de Mécanique classique préparant la justification de la Mécanique ondulatoire des systèmes dans la théorie de la double solution.* Note de M. **LOUIS DE BROGLIE**.

Dans le cas d'un système isolé de deux corpuscules en interaction, on peut préciser la relation entre les fonctions de Jacobi individuelles des corpuscules et la fonction de Jacobi du système en introduisant les mouvements relatifs. Du point de vue de la double solution, nous obtenons ainsi la relation entre les phases des ondes u individuelles et celle de l'onde Ψ du système à l'approximation de l'optique géométrique.

Soit un système isolé formé de deux corpuscules en interaction. En Mécanique classique, le mouvement des deux corpuscules est donné par les équations de Newton

$$(1) \quad m_1 \vec{\gamma}_1 = - \vec{\text{grad}}_1 V; \quad m_2 \vec{\gamma}_2 = - \vec{\text{grad}}_2 V,$$

$V(r)$ étant le potentiel d'interaction fonction de la distance r des corpuscules. Les deux corpuscules décrivent dans l'espace physique des trajectoires L_1 et L_2 , les trajectoires et les mouvements correspondants sont « corrélés » d'une manière biunivoque.

On peut aussi représenter le mouvement des deux corpuscules par le déplacement d'un point représentatif dans l'espace de configuration $x_1 \dots z_2$ du système et écrire dans cet espace l'équation de Jacobi

$$(2) \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m_1} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_1} \right)^2 \right] + \frac{1}{2m_2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_2} \right)^2 \right] + V(r),$$

où $(\partial S/\partial t)$ a la valeur constante E , énergie totale du système. A chaque intégrale complète $S(x_1 \dots x_2, t, \alpha, \beta \dots)$ de (3) correspond une trajectoire L du point représentatif qui est l'une des courbes orthogonales aux surfaces $S = \text{const.}$ dans l'espace de configuration et le mouvement des corpuscules sur les trajectoires correspondantes L_1 et L_2 de l'espace physique est donné par les formules

$$(3) \quad \vec{v}_1 = -\frac{1}{m_1} \overrightarrow{\text{grad}}_1 S \quad \vec{v}_2 = -\frac{1}{m_2} \overrightarrow{\text{grad}}_2 S$$

Mais, pour étudier le mouvement des corpuscules, on peut aussi en Mécanique classique se servir d'une méthode entièrement différente des précédentes qui consiste à envisager le mouvement relatif d'une des particules par rapport à l'autre. Il est bien connu que, si nous prenons un système d'axes de directions fixes ayant pour origine l'un des corpuscules, le mouvement de l'autre corpuscule dans ce système de référence *non galiléen* sera le même que si le système était galiléen et si cet autre corpuscule possédait une « masse réduite » μ telle que

$$(4) \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}; \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Dans le système de référence lié à l'un des corpuscules, on peut donc écrire pour le mouvement de l'autre l'équation de type newtonien

$$(5) \quad \mu \vec{v}_1^* = - \overrightarrow{\text{grad}}^* V$$

où l'astérisque indique qu'une grandeur est évaluée dans le système non galiléen. Supposons pour préciser que nous prenons le corpuscule 2 comme origine du système de référence relatif. L'équation de Jacobi du corpuscule 1 sera dans ce système

$$(6) \quad \frac{\partial S_1^*}{\partial t} = \frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{\partial S_1^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] + V(r).$$

Le mouvement relatif du corpuscule 1 correspondant à une intégrale complète de (6) s'effectuera suivant une trajectoire L_1^* qui sera une courbe orthogonale aux surfaces $S_1 = \text{Const.}$ et le mouvement le long de L_1^* sera donné par

$$(7) \quad \vec{v}_1^* = -\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}}^* S_1^*.$$

Tandis que, dans le système galiléen lié au centre de gravité, les énergies individuelles $E_1 = T_1 + V$ et $E_2 = T_2 + V$ des deux corpuscules en mouvement sont variables et que, seule, l'énergie totale du système $E = T_1 + T_2 + V$ est constante, dans le mouvement relatif l'énergie du corpuscule mobile [$E_1^* = (\partial S_1^*/\partial t)$] reste constante et est égale à E comme on peut le vérifier aisément. Ceci résulte du fait qu'en passant au système lié à 2, nous avons reporté toute l'énergie des deux corpuscules sur le seul corpuscule qui reste en mouvement.

Naturellement, si nous avons pris pour origine des coordonnées relatives le corpuscule 1, nous aurions trouvé pour le corpuscule 2 l'équation de Jacobi relative

$$(8) \quad \frac{\partial S_2^*}{\partial t} = \frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{\partial S_2^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_2^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_2^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] + V(r)$$

et l'énergie $[E_2 = (\partial S_2^* / \partial t)]$ aurait été une constante, elle aussi égale à E.

Les deux intégrales complètes correspondantes S_1^* et S_2^* , solutions des équations de même forme (6) et (8), devront être égales à une même fonction $F(\vec{r}^*, t)$ des coordonnées relatives et du temps.

Considérons une certaine intégrale complète $S_1^*(\vec{r}^*, t)$ de l'équation (6). Les diverses courbes orthogonales aux surfaces $S_1^* = \text{const.}$ et les mouvements correspondants définis par (7) représentent des mouvements possibles de la particule 1 autour de la particule 2. Soit L_1 l'une de ces trajectoires possibles : en revenant au système galiléen lié au centre de gravité et en se servant de la relation $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$, on peut déduire du mouvement L_1 les mouvements corrélés des deux corpuscules autour du centre de gravité. Parmi les courbes C formant la congruence des normales aux surfaces $S_1^* = \text{const.}$ dans le système lié à 2, une seule est effectivement décrite par le corpuscule 1 dans son mouvement relatif : cependant, comme dans le système non galiléen lié à 2 le corpuscule 2 ne joue plus que le rôle d'un centre de force, ce qui nous ramène au cas d'un corpuscule dans un champ donné, nous pouvons dire, en adoptant le point de vue de la double solution, que la fonction S_1^* représente en tout point du système relatif et à l'approximation de l'optique géométrique la phase de l'onde u_1^* du corpuscule 1 évaluée dans ce système, *et cela quelle que soit la trajectoire L_1 qu'il décrit.* C'est là le point essentiel du présent raisonnement.

Naturellement, si nous rapportons le mouvement du corpuscule 2 au corpuscule 1, c'est la fonction $S_2^*(\vec{r}^*, t) = S_1^*(\vec{r}^*, t)$ qui nous servirait à représenter l'ensemble des mouvements du corpuscule 2 dans le champ central permanent créé par le corpuscule 1 et qui nous donnerait également, en tout point du système relatif et à l'approximation de l'optique géométrique, la phase de l'onde u_2^* du corpuscule 2 quand il décrit l'une quelconque des trajectoires L_2^* .

Considérons maintenant la fonction de Jacobi S pour l'ensemble des deux corpuscules dans l'espace de configuration. C'est une fonction des six variables de configuration et du temps, $S(x_1, \dots, z_2, t)$, qui obéit à l'équation (2) de Jacobi. En introduisant les variables relatives $x^* = x_1 - x_2, \dots$, il est bien connu que l'on peut écrire l'équation (2) de Jacobi sous la forme

$$(9) \quad \frac{\partial S^*}{\partial t} = \frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{\partial S^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial S^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial S^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] + V(r).$$

L'identité de forme des équations (6), (8) et (9) montre que la fonction S de Jacobi pour le système des deux corpuscules (qui est égale à la phase de

l'onde ψ dans l'espace de configuration à l'approximation de l'optique géométrique) a dans le système lié au corpuscule 2 la même expression que S_1 et dans le système lié au corpuscule 1 la même expression que S_2 .

Revenant alors au système galiléen lié au centre de gravité, on voit qu'en employant les notations d'une Note précédente ⁽¹⁾ on a

$$(10) \quad S_1(\vec{R}_1, \vec{r}_{12}, t) = S_2(\vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t) = S(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t) = F(\vec{r}_{12}, t)$$

et la validité aux points corrélés des trajectoires L_1 et L_2 des formules

$$(11) \quad m_1 \vec{v}_1 = -\overrightarrow{\text{grad}}_1 S_1 = -\overrightarrow{\text{grad}}_1 S; \quad m_2 \vec{v}_2 = -\overrightarrow{\text{grad}}_2 S_2 = -\overrightarrow{\text{grad}}_2 S$$

devient évidente. Or dans le cas particulier envisagé ici (absence de champs extérieurs et approximation de l'optique géométrique qui permet de confondre les phases φ_1 , φ_2 et φ respectivement avec les fonctions de Jacobi S_1 , S_2 et S), les relations (11) et (10) sont précisément celles que nous avons indiquées dans la Note en question comme conditions nécessaires et suffisantes pour la justification, dans le cadre de la théorie de la double solution, de l'emploi de la Mécanique ondulatoire des systèmes dans l'espace de configuration. Mais il reste à généraliser cette justification en l'étendant au delà de l'optique géométrique.

(1) *Comptes rendus*, 235, 1952, p. 1345.