INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **239**, p. 565-567, séance du 23 août 1954.)

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Justification, du point de vue de la théorie de la double solution, de la Mécanique ondulatoire des systèmes dans l'espace de configuration.* Note (*) de M. **Louis de Broglie**.

Reprenant une méthode développée dans une Note précédente (1) et l'étendant au delà des limites de l'optique géométrique, nous justifions, du point de vue de la théorie de la double solution, l'emploi de la Mécanique ondulatoire des systèmes dans l'espace de configuration dans le cas de deux corpuscules en interaction quand on peut séparer le mouvement relatif du mouvement du centre de gravité.

Reprenons d'abord le cas d'un système *isolé* formé de deux corpuscules en interaction et écrivons l'équation de propagation de son onde Ψ dans l'espace de configuration

$$(1)\quad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m_1}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z_1^2}\right)-\frac{h^2}{8\pi^2 m_2}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_2^2}+\frac{\partial\Psi}{\partial z_2^2}\right)+\mathrm{V}(r).$$

Si l'on exprime Ψ sous la forme $a(x_1\ldots z_2,\ t)\,e^{2\pi i/h\,\varphi(x_1\ldots z_2,\,t)}$, la grandeur $\mathrm{E}=(\partial\varphi/\partial t)$ devra être l'énergie constante du système. Du point de vue de la double solution, les corpuscules doivent être bien localisés et décrire dans l'espace physique à trois dimensions des trajectoires corrélées L_1 et L_2 représentées dans l'espace de configuration par la trajectoire L du point représentatif qui est l'une des courbes orthogonales aux surfaces $\varphi=$ const. Les mouvements

(*) Séance du 18 août 1954.

(1) *Comptes rendus*, **239**, 1954, p 521.

des corpuscules sur les trajectoires L_1 et L_2 de l'espace physique seraient donnés par les formules de guidage.

$$\vec{v}_1 = -\frac{1}{m_1}\overrightarrow{\mathrm{grad}_1}\varphi, \qquad \vec{v}_2 = -\frac{1}{m_2}\overrightarrow{\mathrm{grad}_2}\varphi. \tag{2}$$

Ainsi la représentation dans l'espace de configuration ferait toujours correspondre à la phase φ l'ensemble des mouvements corrélés d'une même classe.

Comme dans notre Note précédente, nous allons introduire les mouvements relatifs de chacun des corpuscules par rapport à l'autre. On démontre aisément que, dans le système non galiléen lié à l'un des corpuscules, on a pour l'onde Ψ l'équation de propagation

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi^\star}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2\mu}\left(\frac{\partial^2\Psi^\star}{\partial x^{\star 2}} + \frac{\partial^2\Psi^\star}{\partial y^{\star 2}} + \frac{\partial^2\Psi^\star}{\partial z^{\star 2}}\right) + \mathrm{V}(r) \tag{3}$$

où μ est la masse réduite $m_1 m_2/m_1 + m_2$ et où l'astérisque indique qu'une grandeur est évaluée dans le système relatif.

Quelle doit être, du point de vue de la double solution, l'équation de propagation (en dehors de la région singulière) de l'onde u du corpuscule 1 dans le système de référence lié au corpuscule 2 ? Si nous l'écrivons sous la forme

$$u_1^\star(x^\star, y^\star, z^\star, t) = a_1^\star(x^\star, y^\star, z^\star, t)\, e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi_1^\star(x^\star, y^\star, z^\star, t)} \tag{4}$$

nous savons qu'à l'approximation de l'optique géométrique, nous aurions $\varphi_1^\star = S_1^\star$ et que nous devrions retrouver l'équation (6) de la Note précédente. Ceci nous conduit à écrire comme équation de propagation de $u_1^\star$ dans le système relatif

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial u_1^\star}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2\mu}\left(\frac{\partial^2 u_1^\star}{d x^{\star 2}} + \frac{\partial^2 u_1^\star}{\partial y^{\star 2}} + \frac{\partial^2 u_1^\star}{\partial z^{\star 2}}\right) + \mathrm{V}(r) \tag{5}$$

Le mouvement s'effectuera suivant l'une des courbes orthogonales aux surfaces $\varphi_1^\star = \text{const.}$ avec la vitesse

$$\vec{v}_1^\star = -\frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{grad}^\star}\varphi_1^\star. \tag{6}$$

Comme dans le cas correspondant de la Mécanique classique, toute l'énergie du système se trouvera reportée sur le corpuscule 1 et $\mathrm{E}_1^\star = \partial\varphi_1^\star/\partial t$ sera égale à l'énergie constante E du système.

Naturellement, si nous avions pris comme origine des coordonnées du système relatif le corpuscule 1, nous aurions dû prendre comme équation de propagation de l'onde $u_2^\star$ du corpuscule 2 dans ce système

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial u_2^\star}{\partial t} = -\frac{-h^2}{8\pi^2\mu}\left(\frac{\partial^2 u_2^\star}{\partial x^{\star 2}} + \frac{\partial^2 u_2^\star}{\partial y^{\star 2}} + \frac{\partial^2 u_2^\star}{\partial z^{\star 2}}\right) + \mathrm{V}(r). \tag{7}$$

Les fonctions $u_1^\star$ et $u_2^\star$ obéissant à des équations de même forme peuvent être regardées comme égales à une même fonction de $\vec{r}^\star$ et de t, ce qui nous conduit à leur donner l'expression commune $a^\star(\vec{r}^\star, t)\, e^{(2\pi i/h)\varphi^\star(\vec{r}^\star, t)}$.

Dans le système non galiléen lié au corpuscule 2, ce corpuscule ne joue plus que le rôle d'un centre de force et nous sommes ramenés au cas du mouvement d'un corpuscule dans un champ de force donné, l'onde $u_1^\star = a_1^\star\, e^{(2\pi i/h)\varphi_1^\star}$ obéissant à l'équation (5). L'ensemble des courbes orthogonales aux surfaces $\varphi_1^\star = \text{const.}$ et les mouvements définis par la formule $\vec{v}_1^\star = -1/m_1 \operatorname{grad}^\star \varphi_1^\star$ représentent dans ce système l'ensemble des mouvements possibles d'une même classe. Si $L_1^\star$ est la trajectoire décrite par le corpuscule 1, on pourra, en revenant au système lié au centre de gravité et en utilisant la relation $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$, déduire du mouvement $L_1^\star$ les mouvements corrélés L_1 et L_2 des deux corpuscules autour du centre de gravité.

Finalement on voit, et c'est le point capital, que dans le mouvement relatif la fonction $a^\star e^{(2\pi i/h)\varphi^\star}$ représente à la fois l'ensemble des mouvements $L_1^\star$ d'une même classe du corpuscule 1 et (sauf dans la région singulière) l'onde $u_1^\star$ du corpuscule 1 *quand il décrit l'une quelconque des trajectoires* $L_1^\star$.

Naturellement, si nous rapportons le mouvement du corpuscule 2 au corpuscule 1, ce sera la fonction $a^\star e^{(2\pi i/h)\varphi^\star}$ qui nous donnera à la fois l'ensemble des trajectoires de même classe $L_2^\star$ et l'onde $u_2^\star$ associée au corpuscule 2 quand il décrit l'une quelconque des trajectoires $L_2^\star$.

Si maintenant nous comparons les équations (5) et (7) avec l'équation (3) satisfaite par l'onde Ψ de l'espace de configuration, on voit [2] qu'on peut choisir pour la fonction $\Psi^\star$ la même expression $a^\star(\vec{r}^\star, t)\, e^{(2\pi i/h)\varphi^\star(\vec{r}^\star, t)}$ que pour $u_1^\star$ et $u_2^\star$. On en conclut que l'on peut écrire

$$(8)\qquad \begin{cases} \varphi_1(\vec{r}_{12}, t) = \varphi_2(\vec{r}_{12}, t) = \varphi(\vec{r}_{12}, t) = \varphi_{12}(\vec{r}_{12}, t), \\ Q_1(\vec{r}_{12}, t) = Q_2(\vec{r}_{12}, t) = Q(\vec{r}_{12}, t) = Q_{12}(\vec{r}_{12}, t) \end{cases}$$

qui, d'après notre Note du 1er décembre 1952 [3] et avec les notations qui y sont employées, donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour que, dans le cas présent, soit justifié du point de vue de la double solution l'emploi de la Mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration.

---

(2) Le résultat que nous obtenons ainsi peut s'exprimer en disant que, dans le système de référence relatif, où l'un des corpuscules joue seulement le rôle de centre de forces, la partie régulière de l'onde u d'un corpuscule coïncide (à une constante de normalisation près) avec son onde Ψ. C'est là une conception dont nous avons déjà montré la nécessité. *Voir* notamment *Comptes rendus*, **236**, 1953, p. 1453.

(3) *Comptes rendus*, **235**, 1952, p. 1345.

Dans un système galiléen dans lequel le centre de gravité serait animé d'un mouvement rectiligne et uniforme d'énergie E_g et de quantité de mouvement P, les termes $E_g t - P_x x - P_y y - P_z z$ s'introduiraient dans la phase et l'on retrouverait les formules plus générales

$$(9)\qquad \left.\begin{aligned} \varphi_1(\vec{R}_1, \vec{r}_{12}, t) &= \varphi_{11}(\vec{R}_1, t) + \varphi_{12}(\vec{r}_{12}, t) \\ \varphi_2(\vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t) &= \varphi_{22}(\vec{R}_2, t) + \varphi_{21}(\vec{r}_{12}, t) \end{aligned}\right\} \varphi_{12} = \varphi_{21}$$
$$\varphi(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t) = \varphi_{11}(\vec{R}_1, t) + \varphi_{22}(\vec{R}_2, t) + \varphi_{12}(\vec{r}_{12}, t)$$

de la Note qui vient d'être citée.

Les raisonnements précédents sont valables en l'absence d'un champ extérieur. S'il existe des champs extérieurs, on retrouve encore aisément les formules de ma Note du 1er décembre 1952 dans le cas où, ces champs étant sensiblement constants dans toute l'étendue du système, il y a séparation entre le mouvement du centre de gravité et le mouvement relatif.

Le cas où il n'y a pas séparation entre le mouvement du centre de gravité et le mouvement relatif ainsi que le cas où le système comprend plus de deux corpuscules appelleraient des recherches nouvelles.

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
146675-54 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.