INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 239, p. 737-739, séance du 27 septembre 1954.)

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Une nouvelle démonstration de la formule du guidage en théorie de la double solution*. Note de M. **Louis de Broglie**.

L'auteur donne une nouvelle démonstration de la formule du guidage en théorie de la double solution qui repose sur la méthode classique d'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre.

La théorie de la double solution telle que nous l'avions proposée en 1927 [1], repose sur le postulat qu'à chaque solution régulière $v = a\, e^{(2\pi i/h)\varphi}$ de l'équation des ondes de la Mécanique ondulatoire, correspond une solution singulière $u = f e^{(2\pi i/h)\varphi}$ de même phase φ dont l'amplitude f présente une singularité ponctuelle. Ce postulat admis, nous avions montré que le mouvement dans l'espace de la singularité de f est déterminé par la seule connaissance de la phase φ commune à v et à u. Si l'on prend comme équation des ondes de la Mécanique ondulatoire l'équation de Klein-Gordon (valable pour les particules de spin zéro et approximativement pour les autres particules quand on néglige les effets de spin), on démontre que la vitesse $\vec{v}$ du point singulier de f est donnée par la formule

$$\vec{v} = -c^2 \frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi + \frac{\varepsilon}{c}\vec{\mathrm{A}}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \mathrm{V}}, \tag{1}$$

[1] Voir *La Physique quantique restera-t-elle indéterministe ?* Gauthier Villars, 1953.

où c est la vitesse de la lumière dans le vide, ε la charge électrique de la particule, V et $\vec{A}$ le potentiel scalaire et le potentiel-vecteur du champ électromagnétique auquel elle est soumise.

Une nouvelle démonstration de la formule du guidage nous a été suggérée par un travail récent de M. Gérard Petiau [2].

En portant dans l'équation de Klein-Gordon l'expression de la solution régulière v, nous obtenons deux équations réelles dont l'une, l'équation de continuité, s'écrit

$$\frac{\partial a}{\partial t} + A(x, y, z, t)\frac{\partial a}{\partial x} + B(x, y, z, t)\frac{\partial a}{\partial y} + C(x, y, z, t)\frac{\partial a}{\partial z} + D(x, y, z, t)\,a = 0 \tag{2}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} A &= -c^2\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\varepsilon}{c}A_x}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \varepsilon V}; &\quad B &= -c^2\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\varepsilon}{c}A_y}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \varepsilon V}; \\ C &= -c^2\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \dfrac{\varepsilon}{c}A_z}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \varepsilon V}; &\quad D &= \frac{c^2}{2}\,\frac{\Box\varphi}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \varepsilon V}; \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Si φ est connue, on connaît les fonctions A, B, C, D.

Pour la solution singulière u de même phase φ, nous obtenons également l'équation (2) où l'amplitude continue a doit être remplacée par l'amplitude à singularité f.

Les équations différentielles correspondant à l'équation aux dérivées partielles (2) sont

$$dt = \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C} = -\frac{da}{Da}. \tag{4}$$

Les trois premières de ces équations admettent trois intégrales premières

$$f_1(x, y, z, t) = \lambda, \qquad f_2(x, y, z, t) = \mu, \qquad f_3(x, y, z, t) = \nu \tag{5}$$

qui, pour des valeurs constantes de λ, μ, ν, définissent des lignes de courant dans l'espace-temps : ces lignes de courant correspondent, on le voit aisément, au mouvement prévu par la formule du guidage (1).

Mais nous devons, en outre, considérer la relation $da/a = -D(x, y, z, t)\,dt$. Or les variables x, y, z peuvent s'exprimer, à l'aide de (5), en fonction de λ, μ, ν et t, de sorte que $D(x, y, z, t) = F(\lambda, \mu, \nu, t)$. Le long d'une ligne de courant, λ, μ, ν étant constantes, on a

$$a = \rho\, e^{-\int^t F(\lambda, \mu, \nu, t)\,dt} \tag{6}$$

---

[2] *Comptes rendus*, **239**, 1954, p. 344.

ρ étant une constante et l'intégration étant effectuée sur t à λ, μ, ν constants. La *même* expression (6) est valable pour f puisque la phase φ et par suite la fonction F sont les mêmes pour v et pour u.

La théorie des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre nous apprend que la solution générale de (2) s'obtient en écrivant $\rho = \Phi(\lambda, \mu, \nu)$ où Φ est une fonction arbitraire. Nous aurons donc comme forme commune pour a et pour f

$$\left.\begin{matrix} a \\ f \end{matrix}\right\} = e^{-\int^{t} F(\lambda, \mu, \nu, t)\,dt} \cdot \Phi(\lambda, \mu, \nu). \tag{7}$$

Le premier facteur du second membre de (7) est le même pour a et pour f, mais la fonction Φ est naturellement différente pour les deux amplitudes; elle devra, dans les deux cas, être choisie de façon à satisfaire l'équation de Jacobi généralisée correspondant à l'équation de Klein-Gordon.

Comme a est, par définition, une fonction régulière, le premier facteur du second membre de (7) ne peut pas présenter de singularité, sans quoi il n'existerait pas de solution régulière correspondant à la phase φ, ce qui serait contraire à l'hypothèse. Par suite, f ne peut avoir un point singulier au point x_0, y_0, z_0 de l'espace au temps t_0 que si la fonction Φ (relative à f) présente une singularité pour les valeurs $\lambda_0 = f_1(x_0, y_0, z_0, t_0)$, $\mu_0 = f_2(x_0, y_0, z_0, t_0)$, $\nu_0 = f_3(x_0, y_0, z_0, t_0)$ des variables λ, μ, ν. Mais alors la fonction f a dans l'espace-temps toute une ligne singulière définie par les équations $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$, $\nu = \nu_0$ et ceci nous fournit une nouvelle démonstration de la formule du guidage.

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
146772-54 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.