INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **241**, p. 345-348, séance du 25 juillet 1955.)

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Ondes régulières et ondes à région singulière en Mécanique ondulatoire*. Note de M. **Louis de Broglie**.

Généralisant une démonstration donnée l'an dernier, l'auteur indique une démonstration du théorème du guidage en théorie de la double solution qui s'appuie uniquement sur l'équation de continuité. Il montre l'importance que peut présenter l'image ainsi obtenue pour l'interprétation de la Mécanique ondulatoire.

Dans une Note antérieure [1], nous avons donné, dans le cas de l'équation de Klein-Gordon, une démonstration de la formule du guidage faisant uniquement intervenir la méthode générale d'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre. Nous allons donner à cette démonstration une forme plus générale qui, partant directement de la notion de lignes de courant et de l'équation de continuité, est applicable à toutes les équations d'ondes que l'on rencontre en Mécanique ondulatoire et en particulier aux équations de Dirac.

Toutes les équations d'ondes que l'on emploie en Mécanique ondulatoire pour les diverses sortes de corpuscules, permettent d'obtenir une image hydrodynamique en définissant en chaque point xyz à l'instant t une densité ρ et un vecteur densité de courant $\rho\vec{v}$, grandeurs qui s'expriment à l'aide d'expres-

[1] *Comptes rendus*, **239**, 1954, p. 737.

sions bilinéaires à partir de la fonction d'onde et de sa complexe conjuguée et qui obéissent à l'équation de continuité

$$(1) \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\operatorname{div}\vec{v} = 0$$

Admettons alors ([2]) qu'à toute solution partout régulière Ψ de l'équation d'ondes, on puisse faire correspondre une autre solution u possédant une singularité ponctuelle mobile, ces deux solutions ayant les *mêmes* lignes de courant définies par le même champ de vitesse $\vec{v}(x, y, z, t)$. Pour la solution Ψ, la densité $\rho(\Psi)$ est partout régulière; pour la solution u, la densité $\rho(u)$ présente une singularité ponctuelle mobile. D'ailleurs les deux fonctions ρ obéissent à l'équation (1). La méthode classique d'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre fait correspondre à (1) les équations différentielles

$$(2) \qquad dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = -\frac{d\rho}{\rho\operatorname{div}\vec{v}}$$

Les trois premières équations (2) admettent les intégrales

$$(3) \qquad f_1(x, y, z, t) = \lambda, \qquad f_2(x, y, z, t) = \mu, \qquad f_3(x, y, z, t) = \nu$$

qui, pour une valeur constante de λ, μ, ν, définissent une ligne de courant d'univers. Les relations (3) nous permettent d'exprimer $\operatorname{div}\vec{v}$ sous la forme $F(\lambda, \mu, \nu, t)$ et l'on trouve comme dans la Note précitée

$$(4) \qquad \rho(\Psi) = e^{-\int F(\lambda,\mu,\nu,t)\,dt}\,\Phi_1(\lambda, \mu, \nu); \qquad \rho(u) = e^{-\int F(\lambda,\mu,\nu,t)\,dt}\,\Phi_2(\lambda, \mu, \nu),$$

les fonctions arbitraires Φ_1 et Φ_2 n'étant pas déterminées par l'intégration. Le premier facteur étant le même dans les deux expressions (4) doit être régulier et, par suite, Φ_2 doit à tout instant présenter une singularité ponctuelle pour $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$, $\nu = \nu_0$. Il en résulte, comme dans la Note précédente, que la singularité ponctuelle de u doit avoir à chaque instant la vitesse $\vec{v}$, et que son mouvement est représenté dans l'espace-temps par *l'une* des lignes de courant d'Univers définies par (3) et l'on retrouve ainsi le théorème du guidage sous une forme très générale.

Einstein nous a appris que, si l'on veut représenter le corpuscule comme une sorte d'accident local incorporé à un champ, il faut le considérer non pas comme une véritable singularité mathématique du champ, mais comme une très petite région de l'espace où le champ prend des valeurs très élevées, mais finies (champ à bosse). Suivant cette idée, nous devons considérer la fonction u comme possédant non pas une singularité mathématique, mais une petite

([2]) Sous réserve d'un théorème d'existence à démontrer.

région singulière mobile où elle a des valeurs très élevées (et où d'ailleurs l'équation satisfaite par u peut n'être plus linéaire). Ceci ne change rien d'essentiel à notre raisonnement car la fonction Φ_2 dans (4) doit alors prendre des valeurs très grandes quand les variables λ, μ, ν sont voisines des valeurs λ_0, μ_0 ν_0 et l'on voit que le mouvement de la région singulière est représenté dans l'espace-temps par un tube d'univers extrêmement délié dont l'axe coïncide avec l'une des lignes de courant d'univers : le théorème du guidage est donc encore valable.

Revenons maintenant aux origines de la Mécanique ondulatoire. L'une des idées qui lui ont servi de bases a été de donner un sens physique à la théorie d'Hamilton-Jacobi en la considérant comme définissant à l'approximation de l'Optique géométrique une propagation d'ondes associée au mouvement d'un corpuscule. Les lignes de courant correspondant à cette propagation forment un ensemble de trajectoires possibles du corpuscule dans le champ de force considéré; mais à cette représentation globale d'un ensemble de mouvements possibles, la théorie d'Hamilton-Jacobi ajoutait implicitement, en accord avec les conceptions classiques de la Dynamique du point matériel, l'image d'un corpuscule décrivant l'une des trajectoires possibles. Dans mes premiers travaux, j'avais admis que la fonction de Jacobi déterminait, à l'approximation de l'Optique géométrique, la phase de l'onde associée au corpuscule (que j'appelais pour cette raison « l'onde de phase »), mais je ne m'étais pas prononcé sur la forme de l'amplitude, la question me paraissant difficile. Or, dans son premier Mémoire sur la Mécanique ondulatoire, M. Schrödinger en 1926 a précisé l'image physique tirée de la théorie d'Hamilton-Jacobi en supposant que l'onde associée au corpuscule avait une amplitude continue comme les ondes de la Physique classique. Extrapolant cette image au delà des limites de l'Optique géométrique, il a pu trouver la première forme (valable pour un corpuscule sans spin à l'approximation non relativiste) de l'équation des ondes en Mécanique ondulatoire. Mais, en procédant ainsi, on mettait sur le même pied toutes les lignes de courant, c'est-à-dire tout un ensemble de trajectoires possibles. On perdait donc l'image d'un corpuscule décrivant une trajectoire déterminée et, ne pouvant plus la retrouver, on était acculé à l'une des hypothèses suivantes : ou bien, avec M. Schrödinger, on attribuait exclusivement aux ondes continues une réalité physique et on considérait le corpuscule comme une apparence; ou bien on conservait l'onde et le corpuscule, mais en ne leur attribuant plus qu'une existence fantomatique, le corpuscule étant réparti statistiquement sur un ensemble de trajectoires et ne se localisant plus que lors de certaines observations, l'onde ne possédant plus de son côté que le caractère subjectif d'une représentation de probabilité.

Aucune de ces deux interprétations ne me paraissait satisfaisante et je voyais avec étonnement la seconde, l'interprétation purement probabiliste, l'emporter peu à peu dans l'esprit des théoriciens. C'est pour tenter de l'éviter que j'ai introduit en 1927, sous le nom de théorie de la double solution, l'image des ondes *u* à singularité (je dis aujourd'hui des ondes *u* à région singulière du type « champ à bosse »). Le théorème du guidage que j'avais aperçu dès 1927 me paraissait permettre de comprendre la véritable relation entre l'onde Ψ et l'onde *u* : la première donnerait par ses lignes de courant une image statistique exacte d'un ensemble de mouvements possibles ; la seconde, représentation plus complète de la réalité physique, montrerait en plus qu'un accident local incorporé à l'onde se déplace le long d'une des lignes de courant, ce qui permettrait de conserver la notion de corpuscule. Ces considérations me portent à croire que l'introduction de l'onde *u* reste la seule voie pouvant peut-être permettre d'échapper à l'interprétation purement probabiliste.

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
148615-55 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.