INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 243, p. 617-620, séance du 13 Août 1956.)

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Illustration par un exemple de la forme des fonctions d'ondes singulières de la théorie de la double solution.* Note de M. **LOUIS DE BROGLIE.**

L'auteur montre sur un exemple que l'on peut trouver une équation d'ondes non linéaire possédant une solution qui remplit toutes les conditions nécessaires pour l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution.

Comme nous l'avons montré ailleurs ⁽¹⁾, l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution paraît imposer l'idée suivante : le guidage du corpuscule par son onde u ne peut pas être réalisé quand on admet pour l'onde u une équation d'ondes linéaire et il semble nécessaire que cette équation soit non linéaire. Néanmoins, si l'équation d'ondes est non linéaire, les termes non linéaires qui y figurent ne doivent avoir de l'importance que dans une très petite région, la « région singulière », où les valeurs de u sont très élevées et qui constitue le corpuscule au sens étroit du mot. En dehors de cette très petite région, les termes non linéaires doivent être très faibles et l'équation des ondes, devenant ainsi approximativement linéaire, doit coïncider sensiblement avec l'équation de propagation usuellement employée en Mécanique ondulatoire pour l'onde Ψ .

En creusant cette idée, on s'aperçoit que, pour pouvoir comprendre le succès du calcul usuel des phénomènes d'interférences et de diffraction et celui du calcul usuel des valeurs propres de l'énergie correspondant aux états station-

naires des systèmes quantifiés, il est nécessaire de préciser la forme de l'onde u en supposant qu'à l'extérieur de la région singulière, là où l'équation d'ondes est sensiblement linéaire, u a pour expression

$$(1) \quad u = u_0 + v.$$

En dehors du voisinage immédiat de la région singulière, le terme u_0 doit être extrêmement petit devant v : cette hypothèse, qu'on pourrait nommer le postulat de l'étroite localisation du corpuscule, a une très grande importance dans cette théorie. La fonction u_0 doit croître extrêmement rapidement quand on approche de la région singulière et elle deviendrait infinie si l'on pouvait la prolonger jusqu'au centre de cette région, c'est-à-dire si l'équation linéaire continuait à y être valable. Quant au terme v de l'expression (1), c'est une solution régulière de l'équation linéaire qui doit, au moins en général, coïncider à un facteur constant près avec la forme usuellement admise pour l'onde Ψ dans le problème considéré.

Ainsi, dans le domaine extérieur à la région singulière, u peut être décomposée en une somme de deux termes u_0 et v , l'un étant une solution à singularité ponctuelle et l'autre une solution régulière de l'équation linéaire habituelle. La solution u_0 apparaît alors comme une sorte d'aiguille très fine implantée sur une onde v qui a la même forme que l'onde Ψ . Mais il est essentiel de faire la remarque suivante : l'équation non linéaire en u admet en réalité *une* solution u et ce n'est qu'approximativement que l'on peut décomposer u en une somme de deux solutions u_0 et v de l'équation linéaire dans la région extérieure à la région singulière, ces deux solutions n'étant par suite nullement indépendantes l'une de l'autre. Nous voulons montrer sur un exemple comment ces circonstances peuvent se trouver réalisées.

Considérons le cas simple d'un corpuscule de spin 0 immobile dans un système de référence galiléen, le centre de sa région singulière étant pris pour origine des coordonnées et supposons que l'équation de l'onde u du corpuscule soit l'équation non linéaire

$$(2) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + k_0^2 u = - \frac{1}{C^2} e^{-\frac{a}{r}} \frac{a^2}{r^4} u^2 u^*$$

avec $k_0 = (2\pi/h) m_0 c$, m_0 masse propre du corpuscule. Le premier membre de l'équation (2) égalé à zéro donnerait l'équation de Klein-Gordon en l'absence de champ. Le second membre non linéaire a une forme en $u^2 u^*$ déjà envisagée, dans le cadre d'idées tout à fait différentes des nôtres, par les auteurs qui ont cherché à introduire de la non-linéarité en Mécanique ondulatoire; il contient une fonction de la distance r à l'origine que nous avons choisie arbitrairement et où figurent deux constantes C et a dont la première est une constante numérique et la seconde une très petite longueur définissant une sorte de

« rayon » du corpuscule à symétrie sphérique. Par définition, nous poserons $\varepsilon = Ca$.

Comme l'on doit avoir $u = f e^{ik_0 ct}$ avec f fonction réelle de r seulement, on trouve pour f l'équation

$$(3) \quad \Delta f \equiv \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} = \frac{1}{C^2} e^{-\frac{2a}{r}} \frac{a^2}{r^3} f^3$$

équation qui admet pour solution

$$(4) \quad f = C e^{\frac{a}{r}}.$$

Cette solution prend des valeurs très élevées au voisinage de l'origine (pour $r \ll a$) et devient même infinie pour $r = 0$.

Nous pouvons considérer le domaine extérieur à la région singulière comme définie par $r \gg a$. On voit alors que dans ce domaine extérieur, f prend très approximativement la forme

$$(5) \quad f = C + \frac{\varepsilon}{r} \quad (\varepsilon = Ca).$$

Ceci correspond au fait, facile à vérifier, que le premier membre de l'équation (3) est de l'ordre de $C/r^2 \cdot a/r$ tandis que le second membre est de l'ordre de $C/r^2 (a/r)^2$, donc négligeable par rapport au premier membre dans le domaine extérieur. Dans ce domaine, l'équation non linéaire (3) se réduit donc sensiblement à l'équation $\Delta f = 0$ et il est naturel de trouver que f prend approximativement la forme générale d'une solution à symétrie sphérique de cette équation.

Dans la région singulière qui entoure l'origine, là où r est de l'ordre de a ou inférieur à a , les deux membres de l'équation (3) sont du même ordre de grandeur et il faut prendre pour f l'expression rigoureuse (4).

Maintenant, si l'équation linéaire $\Delta f = 0$ était valable partout, sa solution générale à symétrie sphérique serait $f = A + (B/r)$ où les constantes A et B auraient des valeurs arbitraires. Or, dans le domaine extérieur où l'équation de l'onde u se réduit approximativement à l'équation linéaire de Klein-Gordon, nous avons trouvé pour f l'expression (5) qui est bien de la forme $A + (B/r)$, mais avec des valeurs *déterminées* de A et de B , savoir $A = C$ et $B = Ca = \varepsilon$. Et l'on voit bien que ces valeurs sont imposées par la non-linéarité de l'équation de l'onde u dans la très petite région singulière qui entoure l'origine.

La solution « extérieure » (5) est bien de la forme $u = u_0 + v$, u_0 ayant une singularité ponctuelle à l'origine et v étant une fonction régulière (qui se réduit à une constante). De plus, comme l'on a $(u_0/v) = (\varepsilon/Cr) = (a/r)$, on voit aussi que u_0 devient beaucoup plus petit que v dès qu'on s'éloigne de la région singulière. Nous avons donc ainsi retrouvé la décomposition $u = u_0 + v$ de l'onde u dans le domaine extérieur avec toutes les caractéristiques que nous lui souhaitons.

Nous pouvons encore ajouter une remarque. La solution (4) présente une singularité à l'origine. Si l'on pensait, comme le faisait Einstein, qu'il faut éviter l'intervention de singularités dans la représentation des corpuscules, on pourrait prendre à la place des équations (2) et (3) celle qu'on obtient en y remplaçant r par $\varphi = r + \alpha$ où α est une longueur positive beaucoup plus petite que a ($0 < \alpha \ll a$). Grâce à cet artifice, on transformerait la solution (4) en

$$(6) \quad f = C e^{\frac{a}{\varphi}} = C e^{\frac{a}{r+\alpha}}$$

de sorte que f prendrait au point $r = 0$ une valeur extrêmement grande, mais finie. La modification introduite ne se ferait d'ailleurs sentir que dans le centre de la région singulière, là où $r \ll a$ devient de l'ordre de α . Il en résulte évidemment que toutes les conséquences que nous avons déduites plus haut de l'équation (3) subsisteraient après cette modification.

Naturellement nous n'avons aucune raison de penser que l'équation non linéaire (3) représente réellement la structure d'un corpuscule et qu'elle soit la véritable équation non linéaire de l'onde u d'un corpuscule de spin 0. Mais elle nous offre un exemple simple de la façon dont une non-linéarité très localisée de l'équation du champ ondulatoire u peut avoir pour conséquence de « souder » l'un à l'autre les deux termes de l'expression $u = u_0 + v$ valable dans le domaine extérieur à la région singulière et de déterminer complètement la valeur des coefficients C et ε qui figurent dans u_0 et v .

(¹) Voir *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la Mécanique ondulatoire (la théorie de la double solution)*, Gauthier-Villars, 1956, chap. XVII.