INSTITUT DE FRANCE

ACADÉMIE DES SCIENCES

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 243, p. 689-692, séance du 20 août 1956.)

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *La signification du* $|\Psi|^2$ *pour les états stationnaires dans l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire.* Note (*) de M. **Louis de Broglie**.

S'inspirant de la justification proposée par MM. Bohm et Vigier, dans le cadre de l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire, pour le postulat bien connu suivant lequel le carré du module de la fonction d'onde $|\Psi|^2$ donne la probabilité de présence d'un corpuscule, l'auteur examine comment cette probabilité de présence peut se trouver réalisée pour un corpuscule dans un état stationnaire.

Dans toute tentative de réinterprétation causale de la Mécanique ondulatoire, on doit se demander comment on peut justifier le fait, depuis longtemps bien établi, que le carré du module de la fonction d'onde Ψ donne la probabilité de présence du corpuscule en chaque point à chaque instant. MM. Bohm et Vigier (1) ont apporté une contribution importante à la solution de ce problème en montrant que, si le mouvement du corpuscule défini par la « formule du guidage » subit constamment de petites perturbations aléatoires, la distribution de probabilité de présence en $|\Psi|^2$ doit s'établir très rapidement. Ces petites perturbations aléatoires jouent le même rôle que le « chaos moléculaire » dans la Mécanique statistique de Boltzmann. A quoi peuvent être dues ces incessantes petites perturbations aléatoires ? A des interactions avec d'autres systèmes passant à proximité (collisions), à de faibles fluctuations des conditions aux limites imposées à l'onde, peut-être même, d'après M. Vigier, à des interactions avec un champ ondulatoire tourbillonnaire et incoordonné qui remplirait ce que nous nommons le « vide ».

D'un point de vue général, on peut remarquer que dans toute théorie qui assigne au corpuscule un mouvement bien déterminé, il est nécessaire pour obtenir une Mécanique statistique d'introduire un élément aléatoire (chaos moléculaire de Boltzmann en Mécanique classique, hypothèse des perturbations de Bohm et Vigier dans l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire). Mais le résultat statistique que l'introduction de cet élément aléatoire permet de justifier est en quelque sorte contenu d'avance dans les équations du mouvement dont on part, ce qui permet de prévoir ce résultat *a priori*. Ainsi, dans le cadre des anciennes Mécaniques de Newton et d'Einstein, on peut démontrer le théorème de Liouville qui affirme la conservation au cours du temps du domaine d'extension en phase occupé par les points représentatifs dans cet espace abstrait d'un nuage de corpuscules se déplaçant dans l'espace physique suivant les lois de la Dynamique. Ce théorème rend probable *a priori* qu'en Mécanique statistique classique ou relativiste, le principe statistique fondamental doit être l'égale probabilité des éléments égaux de l'extension en phase. Mais la démonstration rigoureuse de cette proposition, objet des théories ergodiques, paraît exiger toujours l'introduction plus ou moins explicite d'un élément aléatoire analogue au chaos moléculaire de Boltzmann.

De même dans les théories de la double solution ou de l'onde pilote (la distinction entre les deux est ici sans importance), le rôle joué dans les Mécaniques anciennes par le théorème de Liouville appartient à l'équation de continuité $\left[(\partial\rho/\partial t) + \operatorname{div} \rho\vec{v} = 0\right]$ valable pour le fluide fictif associé à la propagation de l'onde régulière. Cette équation rend probable *a priori* que, dans la nouvelle Dynamique découlant de la formule du guidage, la quantité $\rho\, dv$ (où $\rho = |\Psi|^2$ avec l'équation de Schrödinger) soit la probabilité pour que le corpuscule soit présent à l'instant t dans l'élément de volume dv de l'espace physique. Mais ici encore cette affirmation ne peut être vraiment justifiée, par des raisonnements analogues à ceux de MM. Bohm et Vigier, qu'en introduisant un élément aléatoire constitué par les incessantes petites perturbations dont nous avons parlé plus haut.

Quelle que soit l'origine physique de ces perturbations, nous pouvons nous les représenter de la façon suivante. Supposons qu'abstraction faite de ces perturbations, l'onde régulière associée à un corpuscule (onde Ψ ou onde v, partie régulière de l'onde u dans la théorie de la double solution, peu importe si on les suppose proportionnelles) soit de la forme $a\, e^{2\pi i/h\, \varphi}$ avec a et φ réels ; le mouvement du corpuscule incorporé à cette « onde non perturbée » sera défini par la formule du guidage qui, en nous bornant au cas simple de l'équation de Schrödinger, s'écrira

$$\vec{v} = -\frac{1}{m}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\varphi. \tag{1}$$

Introduisons les petites perturbations : bien qu'elles soient très nombreuses pendant chaque unité de notre temps macroscopique (par exemple par seconde), nous les supposerons très courtes et séparées dans le temps par des intervalles très longs par rapport à leur durée. Pendant l'une de ces perturbations, l'onde prendra la forme $(a+\varepsilon)\,e^{(2\pi i/h)(\varphi+\eta)}$ où ε et η sont les petites variations de l'amplitude et de la phase. En raison du caractère aléatoire des perturbations, il est naturel de supposer que les valeurs moyennes dans le temps $\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\eta}$ sont nulles. Pendant la durée d'une perturbation, la vitesse du corpuscule devient la somme de la vitesse non perturbée donnée par (1) et de la vitesse additionnelle $\vec{v}_1 = -1/m\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\eta$. Bien que la valeur moyenne de $\vec{v}_1$ dans le temps soit nulle, ces vitesses additionnelles feront passer le corpuscule de sa trajectoire non perturbée initiale à une autre trajectoire non perturbée, puis de celle-ci à une troisième, etc. Finalement, bien que la durée de chacune des perturbations soit par hypothèse beaucoup plus courte que celle des intervalles pendant lesquels le corpuscule décrit une trajectoire non perturbée, le nombre énorme des perturbations subies par seconde aura pour effet qu'au bout d'un temps très court à notre échelle, la probabilité de présence $|\Psi|^2 = a^2$ se trouvera réalisée : c'est ce que paraissent démontrer les raisonnements de MM. Bohm et Vigier. Cette probabilité se trouve d'ailleurs aussi égale à la valeur moyenne du carré de l'amplitude perturbée $\overline{(a+\varepsilon)^2}$ si l'on s'en tient au premier ordre, puisque $\bar{\varepsilon} = 0$.

Il est intéressant d'appliquer les considérations qui précèdent au cas des états stationnaires d'un système quantifié pour écarter une objection qui se présente naturellement au sujet de la formule du guidage (1).

Considérons un état stationnaire d'un système quantifié, par exemple d'un électron dans l'atome d'hydrogène. En général, la fonction d'onde correspondante est de la forme $a(x, y, z)\,e^{(2\pi i/h)\mathrm{E}_n t}$, E_n étant la valeur quantifiée de l'énergie et a une fonction réelle des variables x, y, z. La formule (1) nous indique alors que l'électron doit rester immobile en un point quelconque, mais bien déterminé de l'atome; ceci correspond au fait que la force $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{Q}$ dérivant du « potentiel quantique » fait alors équilibre à la force électrostatique. Dans d'autres cas, on pourra trouver que l'électron est animé d'un mouvement périodique simple : ainsi pour l'électron dans l'atome d'hydrogène, quand la fonction d'onde est de la forme $\Psi = \mathrm{F}(r, \theta)\,e^{im\alpha}e^{(2\pi i/h)\mathrm{E}_n t}$ où r, θ, α sont les coordonnées polaires autour du noyau, comme la phase est alors une fonction linéaire de l'angle α de longitude, l'électron doit d'après la formule (1) décrire un « parallèle » autour de l'axe polaire avec une vitesse uniforme. Dans tous ces cas, l'électron étant immobile ou animé d'un mouvement très simple, on ne voit pas du tout comment la densité de probabilité de présence $|\Psi|^2$ peut être réalisée. L'objection paraît grave.

Mais introduisons maintenant les petites perturbations aléatoires brusques et espacées et commençons par envisager le cas où l'électron de l'atome d'hydrogène a un mouvement circulaire uniforme. On peut voir facilement que la longueur de la trajectoire circulaire doit être de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-9} cm et la vitesse de l'ordre de 10^9 cm/s. La période du mouvement est donc de l'ordre de 10^{-18} s. On voit alors que, si l'on admet qu'il se produit en moyenne un milliard de perturbations brusques par seconde, le corpuscule aura cependant le temps de décrire en moyenne dans chaque intervalle de temps entre deux perturbations un milliard de tours sur sa trajectoire non perturbée. Cet exemple montre que le corpuscule pourra être considéré comme animé *presque constamment* du mouvement non perturbé défini par la formule (1) bien qu'il change de trajectoire circulaire un milliard de fois par seconde. Ceci nous permet de comprendre comment, malgré la forme circulaire des trajectoires non perturbées, on puisse s'attendre à trouver l'électron en n'importe quel point de l'atome avec la probabilité $|\Psi|^2$.

Dans le cas où l'électron dans son état non perturbé reste immobile en un point de l'atome, on peut dire que le mouvement non perturbé se réduit à l'immobilité. Mais, si nous admettons toujours qu'il se produit en moyenne un milliard de perturbations brusques par seconde, l'électron sera projeté un milliard de fois par seconde en moyenne d'une position dans une autre et, au bout d'une seconde, il aura occupé un milliard de positions différentes dans l'atome, et cela bien qu'il soit resté en moyenne dans chacune de ces positions pendant un temps très long par rapport à la période de son onde (qui, étant toujours voisine de h/m_0c^2, est de l'ordre de 10^{-20} s). Ici encore, nous arrivons à comprendre comment, grâce à ce sautillement continuel, peut se réaliser la probabilité de présence en $|\Psi|^2$ bien que le corpuscule reste *presque constamment* immobile en accord avec la formule (1).

(*) Séance du 13 août 1956.

(1) D. Bohm, *Phys. Rev.*, 85, 1952, p. 166 et 180; D. Bohm et J. P. Vigier, *Phys. Rev.*, 96, 1954, p. 208.

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
150490-56 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.