

INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 244, p. 529-533, séance du 28 janvier 1957.)

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Idées nouvelles concernant les systèmes de corpuscules dans l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire.* Note (*) de
MM. **LOUIS DE BROGLIE** et **JOÃO ANDRADE E SILVA**.

Pour justifier, dans le cadre de l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution, le succès de la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules dans l'espace de configuration, les auteurs introduisent deux idées nouvelles qu'ils exposent dans le cas particulier d'un système isolé formé de deux corpuscules en interaction.

Dans le développement de l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution, un des problèmes les plus importants est de justifier le succès de la représentation d'un système de corpuscules par une onde Ψ dans l'espace de configuration du système suivant la méthode classique depuis les travaux de M. Schrödinger. La propagation d'une onde dans un espace abstrait de configuration étant visiblement fictive, l'interprétation causale, qui tente de rétablir une représentation concrète des corpuscules et des ondes dans le cadre de l'espace physique, doit chercher à associer au mouvement d'un ensemble de N corpuscules la propagation de N ondes ν dans l'espace physique, mais cette propagation doit s'effectuer de telle façon que l'onde Ψ de Schrödinger dans l'espace de configuration se trouve représenter exactement la probabilité des positions « corrélées » des N corpuscules dans l'espace physique. Naturellement, du point de vue de l'interprétation causale, la représentation du système par une onde Ψ dans l'espace de configuration est plus pauvre que la représentation de N ondes ν individuelles dans l'espace

physique puisqu'elle ne décrit que les positions « corrélées » des corpuscules et ne nous renseigne pas sur la forme des ondes individuelles.

Le problème qui vient d'être rappelé a été envisagé par l'un de nous dès 1927 et a été repris par lui dans ces dernières années. L'état actuel de la question a été exposé dans un Ouvrage récent ⁽¹⁾, mais les résultats obtenus n'apportent pas une solution complète des difficultés à surmonter. Travaillant ensemble sur ce sujet, nous avons eu dernièrement deux idées nouvelles qui pourraient peut-être permettre de progresser davantage vers la solution cherchée. Nous allons les exposer successivement en nous bornant au cas simple d'un système isolé formé de deux corpuscules en interaction et en utilisant les notations et certains des résultats de l'ouvrage cité plus haut.

A. La théorie de la double solution (ou celle de l'onde pilote qui lui est ici équivalente) associe à chacun des deux corpuscules la propagation d'une onde v individuelle ⁽²⁾ dans l'espace physique suivant l'équation linéaire usuelle de la Mécanique ondulatoire. Pour ces ondes v , les équations de continuité sont de la forme

$$\frac{\partial a_1^2}{\partial t} + \operatorname{div}(a_1^2 \vec{v}_1) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial a_2^2}{\partial t} + \operatorname{div}(a_2^2 \vec{v}_2) = 0,$$

les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ étant définis pour les positions corrélées des corpuscules par

$$\vec{v}_1 = -\frac{1}{m_1} \overrightarrow{\operatorname{grad}}_1 \varphi_1 = -\frac{1}{m_1} \overrightarrow{\operatorname{grad}}_1 \varphi \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = -\frac{1}{m_2} \overrightarrow{\operatorname{grad}}_2 \varphi_2 = -\frac{1}{m_2} \overrightarrow{\operatorname{grad}}_2 \varphi.$$

Dans ces formules, a_1 et a_2 sont les amplitudes des ondes individuelles dans l'espace physique, φ_1 et φ_2 les phases correspondantes, φ la phase de l'onde Ψ de Schrödinger dans l'espace de configuration. Les équations de continuité individuelles pour les positions corrélées sont donc

$$(1) \quad \frac{\partial a_1}{\partial t} - \sum_{x,y,z} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \frac{1}{m_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{1}{2 m_1} a_1 \Delta_1 \varphi,$$

$$(2) \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} - \sum_{x,y,z} \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \frac{1}{m_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{1}{2 m_2} a_2 \Delta_2 \varphi,$$

où les amplitudes a_1 et a_2 doivent être écrites $a_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2(t), t)$ et $a_2(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2, t)$, $\vec{r}_1(t)$ et $\vec{r}_2(t)$ étant les fonctions vectorielles du temps qui définissent les positions successives des corpuscules.

D'autre part, l'équation de continuité pour l'onde Ψ dans l'espace de configuration est $(\partial a^2 / \partial t) + \operatorname{div}(a^2 \vec{v}) = 0$, soit

$$(3) \quad \frac{\partial a}{\partial t} - \sum_{x,y,z} \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} \frac{1}{m_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_2} \frac{1}{m_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{m_1} \Delta_1 \varphi + \frac{1}{m_2} \Delta_2 \varphi \right).$$

Nous allons montrer que l'équation (3) résulte des équations (1) et (2) si l'on admet l'hypothèse exprimée par la formule

$$(4) \quad a(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = a_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) \cdot a_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t).$$

D'après (4), pour obtenir a , il faut faire le produit de $a_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2(t), t)$ et de $a_2(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2, t)$ puis remplacer $\vec{r}_1(t)$ et $\vec{r}_2(t)$ par les variables de configuration $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, le couple des vecteurs $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ définissant un point de l'espace de configuration. On voit alors que les dérivées par rapport au temps de $a_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2(t), t)$, $a_2(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2, t)$ et $a(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$ sont liées par la relation

$$(5) \quad \frac{\partial a}{\partial t} = a_1 \frac{\partial a_2}{\partial t} + a_2 \frac{\partial a_1}{\partial t} + \sum_{xy \neq} \left(a_1 \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \frac{1}{m_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \frac{1}{m_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right).$$

En effet, la dérivée par rapport à t de $a_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2(t), t)$ s'obtient en ajoutant à la dérivée calculée en maintenant $\vec{r}_2(t)$ fixe la quantité

$$\sum_{xy \neq} \frac{\partial a_1}{\partial x_2} v_{2x} = - \sum_{xy \neq} \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \frac{1}{m_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

et une remarque analogue est valable pour a_2 .

Multiplions alors l'équation (1) par a_2 et l'équation (2) par a_1 , puis ajoutons. Dans l'équation obtenue, remplaçons $(a_1 \partial a_2 / \partial t) + (a_2 \partial a_1 / \partial t)$ par sa valeur tirée de (5). Nous obtenons l'équation (3) si nous admettons la définition (4).

Donc, et c'est là notre première idée nouvelle, nous pouvons définir (à la normalisation près) l'amplitude de l'onde Ψ fictive de l'espace de configuration à partir des amplitudes des ondes v objectives de l'espace physique de telle façon que l'équation (3) résulte des équations (1) et (2) (3).

B. Dans les études que nous avons faites antérieurement sur ce problème, nous avons admis l'hypothèse assez naturelle que les équations de propagation des ondes v individuelles dans l'espace physique étaient

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial v_1}{\partial t} &= - \frac{h^2}{8\pi^2 m_1} \Delta v_1 + V(\vec{r} - \vec{r}_2(t)) v_1; \\ \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial v_2}{\partial t} &= - \frac{h^2}{8\pi^2 m_2} \Delta v_2 + V(\vec{r} - \vec{r}_1(t)) v_2 \end{aligned}$$

et nous cherchions ensuite à démontrer qu'en admettant la formule (4), les couples de mouvements *correlés* définis dans l'espace physique par la formule du guidage correspondaient aux mouvements du point représentatif du système défini dans l'espace de configuration par l'application de la formule du guidage à la fonction d'onde Ψ de Schrödinger solution de l'équation

$$(7) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{h^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{m_1} \Delta_1 \Psi + \frac{1}{m_2} \Delta_2 \Psi \right) + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \Psi.$$

Mais nous nous sommes heurtés à des difficultés très considérables et c'est ce qui nous a amenés à envisager une deuxième idée nouvelle. Nous sommes partis de la remarque suivante : tandis qu'en raison de ses succès nous ne pouvons modifier la forme (7) de l'équation de Schrödinger, rien ne nous empêche de supposer que la forme (6) des équations représentant la propagation des ondes objectives ν_1 et ν_2 soit incomplète et qu'il faille ajouter à leurs seconds membres des termes $V'_1(\vec{r} - \vec{r}_1(t))$ et $V'_2(\vec{r} - \vec{r}_2(t))$ respectivement, termes représentant des « interactions quantiques » s'exerçant entre les corpuscules par l'intermédiaire des ondes ν et non contenues dans les termes classiques V_1 et V_2 . Les termes V'_1 et V'_2 devront s'annuler pour $\hbar$ tendant vers zéro afin qu'on puisse retrouver à l'approximation de l'optique géométrique la théorie classique d'Hamilton-Jacobi.

Naturellement l'introduction de V'_1 et V'_2 modifiera les mouvements des corpuscules prévus par la formule du guidage, mais on peut espérer que, par un choix convenable de ces potentiels, il deviendra possible d'établir entre le mouvement des corpuscules dans l'espace physique et celui du point représentatif dans l'espace de configuration la correspondance souhaitée.

Pour simplifier, plaçons-nous dans l'hypothèse où toutes les grandeurs ne sont fonction que des coordonnées relatives $u_1 = x_1 - x_2$, $u_2 = y_1 - y_2$, $u_3 = z_1 - z_2$. Les équations des ondes ν_1 et ν_2 nous fournissent alors comme expressions des potentiels quantiques individuels

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_1(u_1, u_2, u_3) &= -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_1} \sum_i^3 \frac{1}{a_i} \frac{\partial^2 a_i}{\partial u_i^2} + V'_1(u_1, u_2, u_3), \\ Q_2(u_1, u_2, u_3) &= -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_2} \sum_i^3 \frac{1}{a_i} \frac{\partial^2 a_i}{\partial u_i^2} + V'_2(u_1, u_2, u_3). \end{aligned} \right.$$

Nous avons été amenés à penser que V'_1 et V'_2 doivent être choisis de façon à avoir

$$(9) \quad Q_1(u_1, u_2, u_3) = Q_2(u_1, u_2, u_3) = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 \mu} \sum_i^3 \left[\frac{1}{a_i} \frac{\partial^2 a_i}{\partial u_i^2} + \frac{1}{a_2} \frac{\partial^2 a_2}{\partial u_i^2} + \frac{2}{a_1 a_2} \frac{\partial a_1}{\partial u_i} \frac{\partial a_2}{\partial u_i} \right],$$

μ étant la masse réduite telle que $1/\mu = (1/m_1) + (1/m_2)$.

Le potentiel quantique de l'espace de configuration étant ici

$$(10) \quad Q(u, v, w) = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 \mu} \frac{1}{a} \sum_i^3 \frac{\partial^2 a}{\partial u_i^2},$$

la formule (4) introduite dans (10) nous montre que $Q_1 = Q_2 = Q$, ce qui assure la correspondance que nous voulions réaliser entre le mouvement des

deux corpuscules dans l'espace physique et celui du point représentatif dans l'espace de configuration.

L'un de nous (M. Andrade e Silva) se propose d'étudier de plus près la signification des idées nouvelles que nous venons de présenter, de les généraliser et d'en examiner les conséquences éventuelles.

(*) Séance du 14 janvier 1957.

(¹) L. DE BROGLIE, *Une interprétation causale et non linéaire de la Mécanique ondulatoire (la théorie de la double solution)*, Gauthier Villars, Paris, 1956, chap. XII.

(²) Dans la théorie de la double solution, l'onde v est la partie régulière de l'onde objective u avec laquelle l'onde u se confond sensiblement en dehors de la très petite région singulière qui constitue le corpuscule au sens étroit du mot.

(³) En élevant au carré l'équation (4), on peut avoir l'impression que notre hypothèse a quelque chose à voir avec le théorème des probabilités composées, mais la question est assez délicate et demanderait à être examinée de près.

